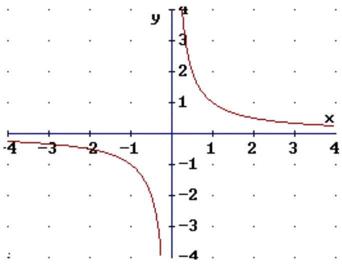
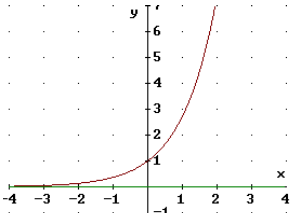
ASÍNTOTAS

1. Asíntotas

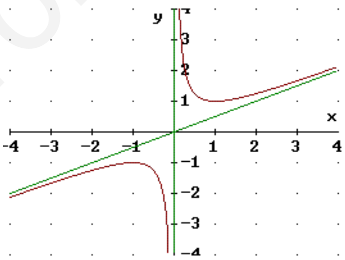


Definición: Una asíntota de una función f es una recta a la que se va aproximando la gráfica de una función a medida que ésta se aproxima al infinito, es decir, se aleja del origen de coordenadas.
Por ejemplo, los ejes de coordenadas son, cada uno de ellos, asíntotas de la función $y=\frac{1}{x}$ (Gráfico de la derecha).



La función exponencial y = e^x tiene una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$, pero no tiene asíntota cuando $x \to +\infty$. Cuando no tiene asíntota, como en este caso, se dice que tiene una rama parabólica (Gráfico de la izquierda).

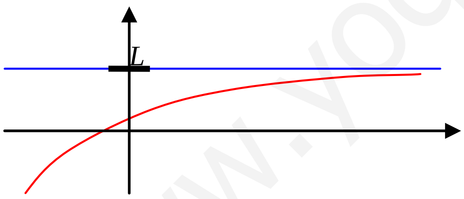
La parábola $y = x^2$ no tiene asíntotas. Es decir, tiene dos ramas parabólicas (en $-\infty$ y en $+\infty$). Su gráfica es bien conocida.



La función $y=\frac{x^2+1}{2x}$ tiene dos asíntotas, que son, el eje OY (cuya ecuación es $x = 0$) y la recta $y=\frac{x}{2}$, que está trazada en verde en el gráfico de la derecha.

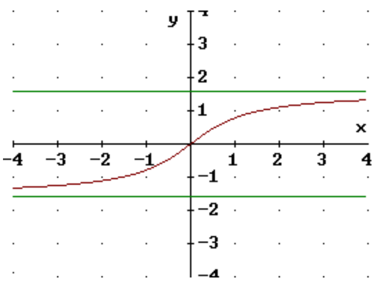
Para calcular las asíntotas de una función dada, diferenciamos entre asíntotas horizontales, verticales y oblicuas (inclinadas).

2. Cálculo de asíntotas horizontales



Cuando $x\to\infty$, las imágenes de la función tienden a aproximarse, cada vez más, a L.

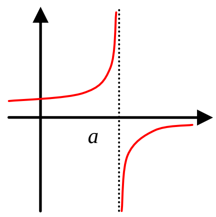
Es decir, si $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = L}$ $\Rightarrow$ la recta $y = L$ es una asíntota horizontal.



La asíntota horizontal, generalmente, lo es tanto por $+\infty$ como por $-\infty$, pero no siempre es así. Por ejemplo, vimos antes la función exponencial, que tiene una asíntota horizontal cuando $x\to -\infty$, pero no cuando $x\to +\infty$. Otro ejemplo lo tenemos en la función y = arctg x, que tiene a la recta $y = \pi/2$ como asíntota si $x\to +\infty$, y a la recta $y = -\pi/2$ cuando $x\to -\infty$ (Gráfico de la derecha). Una función definida a trozos también puede tener dos asíntotas horizontales diferentes, una en $x\to +\infty$, y otra cuando $x\to -\infty$.

Así, *una función puede tener hasta dos asíntotas horizontales*.

Cálculo de asíntotas verticales



Para cierto a, cuando $x \to a$, las imágenes de la función tienden a infinito. Es decir, si existe un valor a tal que $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty}$ $\Rightarrow$ la recta vertical $x = a$ es una asíntota vertical. Por tanto, <u>a debe ser un punto de discontinuidad</u>. Consiguientemente, calculamos los límites cuando x tiende a cada uno de los puntos de discontinuidad. Si el resultado del límite es infinito, hemos encontrado una asíntota vertical.

Si el dominio no empieza en $-\infty$ o no termina en $+\infty$, <u>deben investigarse también los puntos de comienzo y final del dominio</u>. Por ejemplo, $y = \ln x$ tiene como dominio $(0, +\infty)$ y presenta una asíntota vertical en $x = 0$.

Por lo dicho, <u>*una función puede tener cualquier número de asíntotas verticales*</u>.

3. Cálculo de asíntotas oblicuas

La recta de ecuación $y = mx + n$ es una asíntota oblicua si los dos límites siguientes existen (son finitos):

$$\boxed{m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}} \qquad \boxed{n = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx \right)}$$

Observar que *el segundo de los límites sólo puede abordarse si el primero ha dado como resultado un valor finito*, puesto que dicho resultado interviene en su cálculo.

<u>Si existe una asíntota horizontal, por ese lado ($+\infty$ ó $-\infty$) no habrá asíntota oblicua</u>: si intentamos calcularla, obtendremos la horizontal que ya teníamos.

La función puede tener una asíntota oblicua en $x \to +\infty$, y otra cuando $x \to -\infty$ (así podría suceder en una función definida a trozos). Por tanto, <u>*una función puede tener un máximo de dos asíntotas oblicuas*</u>.

4. Ejemplos

1) Calcular las asíntotas de $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

a) <u>Horizontales</u>. Como $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} x = \infty$, <u>no tiene asíntotas horizontales</u>. Notar que en el primer paso, como cuando $x \to \infty$ el comportamiento del polinomio lo decide el término de mayor grado, hemos sustituido cada uno de los dos polinomios, el del numerador y el del denominador, por el sumando de mayor grado.

b) <u>Verticales</u>. Los únicos puntos de discontinuidad son los que anulan el denominador, esto es, -1 y $+1$. Calculemos el límite cuando x tiende a cada uno de ellos.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \left(\frac{-1}{0} \right) = \infty \quad \Rightarrow \quad \underline{x = -1 \text{ es asíntota vertical}}.$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \left(\frac{1}{0} \right) = \infty \quad \Rightarrow \quad \underline{x = 1 \text{ es asíntota vertical}}.$$

c) <u>Oblicuas</u>. Entramos a calcularlas porque no hay asíntotas horizontales.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x^2-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0$$

Por lo que la recta $y = 1\cdot x + 0$, o sea, $y = x$, es asíntota oblicua.

2) Calcular las asíntotas de $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

a) Horizontales. Como $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$, la recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

b) Verticales. Tiene discontinuidades en -1 y 1. Entonces:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\left(\frac{2}{0}\right)=\infty \Rightarrow x=-1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\left(\frac{2}{0}\right)=\infty \Rightarrow x=1 \text{ es asíntota vertical.}$$

c) Oblicuas. Ya que la función tiene asíntota horizontal, tanto por $-\infty$ como por $+\infty$, no nos planteamos su cálculo, pues obtendríamos nuevamente la asíntota horizontal que ya tenemos.

3) Hallar las asíntotas de $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

- A.Horizontales. Como $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\dfrac{1}{1}=1 \Rightarrow$ $y = 1$ es una asíntota horizontal.
- A.Verticales. No están en el dominio los valores de x que anulen el denominador: $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow x=-2$ ó $x=2$.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\left(\frac{20}{0}\right)=\infty \Rightarrow \text{La recta } x=-2 \text{ es a. vertical.}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)$$ que es una indeterminación, de la que hay que desprenderse.

Para ello, descomponemos factorialmente numerador y denominador empleando Ruffini, como se hace a continuación. Recordar que Ruffini es una regla para dividir un polinomio cualquiera entre otro de la forma $x-a$. El a se escribe en la columna de la izquierda, separado. En la primera fila, se escriben los coeficientes del polinomio dividendo. En la fila inferior quedan los coeficientes del polinomio cociente y el resto. El polinomio cociente es de un grado menos que el polinomio dividendo. En nuestro caso, a es siempre el valor al que tiende x en el límite:

	1	−5	6
2		2	6
	1	−3	0

Dividendo: D = $x^2 - 5x + 6$
Divisor: d = x – 2
Cociente: C = $x - 3$
Resto: R = 0
D = d·C + R $\Rightarrow$
$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) + 0$

	1	0	−4
2		2	4
	1	2	0

Dividendo: D = $x^2 - 4$
Divisor: d = x – 2
Cociente: C = $x + 2$
Resto: R = 0
D = d·C + R $\Rightarrow$
$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) + 0$

Sustituyendo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+2}=\frac{2-3}{2+2}=-\frac{1}{4}$$

Como no hemos obtenido infinito como resultado del límite, en $x = 2$ NO hay asíntota vertical.

- A. Oblicua. No hay, puesto que tenemos una asíntota horizontal (si intentamos calcularla, nos saldrá otra vez la asíntota horizontal que ya tenemos.