Matemáticas Aplicadas II. Curso 2011-2012.
Exámenes

1. Matrices y determinantes

Ejercicio 1. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

calcular $(A+B)C^t$.

Solución:

$$A+B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)C^t = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 0 & -3 \\ -15 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2. *Calcular el rango de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(donde hemos restado la primera fila a la segunda y la tercera)

$$= \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(hemos suprimido la cuarta fila que era igual a la tercera)

$$= \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(hemos suprimido la tercera fila que es igual a la segunda dividida por 2)

$$= 2$$

Ejercicio 3. *Calcula el valor del determinante:*

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

Solución:

Empezamos poniendo ceros en la primera fila:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -5 & 4 \\ 3 & 11 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} \qquad \text{desarrollamos por la } 1^{\text{a}}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} -5 & -5 & 4 \\ 11 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 133$$

Ejercicio 4. *Hallar los valores de k para los cuales la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ k-1 & 1 & 1 \\ k-2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

no posee inversa. Calcular A^{-1} para $k = 0$.

Solución:

La matriz no tiene inversa cuando su determinante sea cero. Así pues, calculamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ k-1 & 1 & 1 \\ k-2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2\cdot(k-1)\cdot 2 + k(k-2) - 2(k-2) + 2 - k(k-1)(-1) = 2k^2 - 9k + 9$$

Igualando a cero resulta:

$$2k^2 - 9k + 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 3,\ k = \frac{3}{2}$$

Para estos valores de k no existe la matriz inversa.

Calculemos la inversa para $k = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que el determinante para $k = 0$ vale 9 tenemos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}^t = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5. *Calcular el rango de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} m+1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & m & 4 \\ 1 & m & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

según los valores del parámetro m.

Solución:

Extremos un determinante de orden 3 de la matriz. Escogemos las columnas segunda, tercera y cuarta (si tomamos la primera, segunda y tercera resulta una ecuación de tercer grado):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & m & 4 \\ m & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2m + 4m + 12 - 3m^2 - 8 - 4 = -3m^2 + 6m = 3m(-m+2)$$

El determinante es cero para $m = 0$ y $m = 2$. El rango de la matriz es:

- ⋄ Si $m \neq 0$ y $m \neq 2$ el rango de la matriz es 3.
- ⋄ Si $m = 0$ tenemos

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

  Hemos suprimido la cuarta columna puesto que sabemos que de las tres últimas debe haber una combinación lineal de las otras y la segunda y la tercera son independientes. Hemos puesto ceros en la primera fila. Finalmente, como el determinante de la matriz que resulta es cero y hay dos columnas independientes el rango de la matriz es 2.

- ⋄ Para $m = 2$ tenemos:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 3$$

  Primero hemos suprimido la tercera fila que es igual que la segunda. En segundo lugar hemos puesto ceros en la tercera fila restándole la segunda. Como el determinante de la matriz que resulta es distinto de cero, el rango de la matriz es 3.

2. Segundo examen de matrices y determinantes

Ejercicio 1. *Resolver la ecuación:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ x & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ x & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & 4 \\ x+1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ x+1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 4 & -5 & 4 \\ x+1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ x+1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 8 \cdot (3 - x - 1) \\
&= 8 \cdot (2 - x)
\end{aligned}$$

Primero hemos puesto ceros y hemos desarrollado el determinante por la segunda columna. Después hemos puesto ceros y desarrollado por la tercera fila y hemos sacado factor común 4 de la primera fila.

Puesto que este determinante debe ser igual a cero:

$$8 \cdot (2 - x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

Ejercicio 2. *Calcular la matriz X en $AX = B$, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

Despejamos la matriz incógnita multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1}B$$

Calculamos la matriz inversa de A. Para ello, obtenemos en primer lugar el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \operatorname{adj} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^t = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. *Dada* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, *halla una matriz* X *tal que* $AXA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución:

Multiplicando por la izquierda y por la derecha por A^{-1} resulta:

$$A^{-1}AXAA^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} A^{-1} \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} A^{-1}$$

La matriz A tiene determinante 1. Su inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4. *Calcular el rango de la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\text{rango } A = \text{rango} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} && F_3 \longrightarrow F_3 + F_1 \\
= \text{rango} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} && F_2 \longleftrightarrow F_3 \\
= \text{rango} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} && F_3 \longrightarrow F_3 - 2F_2, \quad F_4 \to F_4 - 8F_2 \\
= \text{rango} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -33 & -15 & 12 \end{bmatrix} && F_4 = 3F_3 \\
= \text{rango} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \end{bmatrix} \\
= 3 &
\end{aligned}$$

Ejercicio 5. Calcula el rango de la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{bmatrix}$$

según los valores de m.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz formada por las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix} = m^2 + 1 - m - 1 = m^2 - m$$

El determinante se anula para $m = 0$ y $m = 1$. Por consiguiente:

- $m \neq 0,\ m \neq 1$. El rango de la matriz es 3.
- $m = 0$. El rango de la matriz es:

  $$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

  puesto que hay tres columnas iguales.
- $m = 1$:

  $$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

  Para calcular el rango hemos suprimido la segunda columna puesto que sabemos que, de las tres primeras, solo hay dos independientes. El determinante de la matriz es claramente distinto de cero luego el rango de la matriz es 3.

3. Examen de sistemas de ecuaciones

Ejercicio 1. *Un estudiante ha gastado un total de 48 euros en la compra de una mochila, un bolígrafo y un libro. Si el precio de la mochila se redujera a la sexta parte, el del bolígrafo a la tercera parte y el del libro a la séptima parte de sus respectivos precios iniciales, el estudiante pagaría un total de 8 euros por ellos. Calcular el precio de la mochila, del bolígrafo y del libro, sabiendo que la mochila cuesta lo mismo que el total del bolígrafo y el libro.*

Solución:

Llamando x, y, z al precio de la mochila, el bolígrafo y el libro respectivamente tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=48 \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{7}=8 \\ x=y+z \end{cases}$$

Resolviendo el sistema resulta $x=24$, $y=3$, $z=21$.

Ejercicio 2. *Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real k:*

$$\begin{cases} x-y+kz=1 \\ 2x-ky+z=2 \\ x-y-z=k-1 \end{cases}$$

1. *Discútase el sistema según los valores de k.*
2. *Resuélvase el sistema para el valor de k para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.*

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{vmatrix} = (k+1)(-k+2)$$

El determinante se hace cero para $k=-1$ y $k=2$. Pueden presentarse los siguientes casos:

- ⋄ $k \neq -1$ y $k \neq 2$ rango A = rango $A^* = 3$. El sistema es compatible determinado.
- ⋄ $k=-1$

  $$\text{rango}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 3$$

  Hemos suprimido la tercera columna que era igual que la segunda; después hemos restado la primera fila a la tercera. Claramente, el determinante de la matriz que resulta es distinta de cero con lo que el rango de la matriz ampliada es 3. Como en este caso la matriz de coeficientes tiene rango 2, el sistema es incompatible.
- ⋄ Para $k=2$:

  $$\text{rango}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

  Hemos suprimido la segunda columna que es igual a la primera cambiada de signo y la última columna que es igual que la primera. Ambas matrices tienen rango 2 y el sistema es compatible indeterminado.

Vamos a resolver el sistema para $k = 2$. Busquemos en la matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

un determinante de orden 2 distinto de cero. Lo encontramos en las dos primeras filas tomando la columna primera y tercera. Eliminamos la tercera ecuación con lo que el sistema queda:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

La incógnita y que quedaba fuera del determinante la pasamos al segundo miembro como parámetro λ:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 + \lambda \\ 2x + z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

Resolvemos por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+\lambda & 2 \\ 2+2\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 + \lambda - 4 - 4\lambda}{1 - 4} = \frac{-3 - 3\lambda}{-3} = 1 + \lambda$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+\lambda \\ 2 & 2+2\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2 + 2\lambda - 2 - 2\lambda}{1 - 4} = \frac{0}{-3} = 0$$

Así pues, la solución es $(1 + \lambda, \lambda, 0)$

Ejercicio 3. *Dado el sistema:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda x + 2y + z & = & 0 \\ \lambda x - y + 2z & = & 0 \\ x - \lambda y + 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

- ⋄ *Obtener los valores del parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.*
- ⋄ *Resolver el sistema para $\lambda = 5$.*

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \end{vmatrix} = -2\lambda - \lambda^2 + 4 + 1 + 2\lambda^2 - 4\lambda = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

El determinante es cero para:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

- ⋄ Para $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 5$ el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada es 3. El sistema es compatible determinado y solamente tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.

- ⋄ Para $\lambda = 1$ o $\lambda = 5$ el sistema tiene soluciones distintas de la trivial puesto que es compatible indeterminado.

Para $\lambda = 5$ tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \\ x - 5y + 2z = 0 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes tiene rango 2. Buscamos un determinante de orden 2 distinto de 0, por ejemplo, el formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas. La tercera ecuación, que no forma parte del determinante, la eliminamos. La incógnita z la pasamos al segundo miembro como parámetro $z = t$. Así resulta el sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y = -t \\ 5x - y = -2t \end{cases}$$

Resolvemos por la regla de Cramer y obtenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -t & 2 \\ -2t & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5t}{-15} = \frac{-t}{3} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -t \\ 5 & -2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-5t}{-15} = \frac{t}{3}$$

La solución es:

$$\left(\frac{-t}{3},\ \frac{t}{3},\ t\right) \qquad \text{o bien } (-t,\ t,\ 3t)$$

4. Segundo examen de sistemas de ecuaciones

Ejercicio 1. *Un agricultor tiene repartidas sus 10 hectáreas de terreno en barbecho, cultivo de trigo y cultivo de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que en barbecho tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo de trigo y cebada. ¿Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los cultivos y cuántas están en barbecho?*

Solución:

Llamemos x, y y z al número de hectáreas en barbecho, en trigo y en cebada respectivamente. Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ y=z+2 \\ x=y+z-6 \end{cases}$$

Este sistema tiene como soluciones $x=2$, $y=5$ y $z=3$.

Ejercicio 2. *Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro λ:*

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+2y+\lambda z=-3 \\ x-2y-z=\lambda \end{cases}$$

- ⋄ *Discutir el sistema según los distintos valores de λ.*
- ⋄ *Resolver el sistema para $\lambda=2$.*

Solución:

- ⋄ Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & \lambda \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3(\lambda-1)$$

El determinante se hace cero para $\lambda=1$.

Para $\lambda\neq 1$ el rango de la matriz de coeficientes (y de la matriz ampliada) es 3. El sistema es compatible determinado.

Para $\lambda=1$, el rango de la matriz de coeficientes es claramente 2. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Primero hemos suprimido una columna de la matriz de coeficientes por que sabemos que el rango de esta matriz es 2. Después hemos sumado la tercera fila a la segunda. El determinante de la matriz que resulta es claramente distinto de cero, por lo que el rango de la matriz ampliada es 3. El sistema es incompatible.

- ⋄ Para $\lambda=2$ el sistema es compatible determinado. Podemos resolver por la regla de Cramer.El sistema es:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+2y+2z=-3 \\ x-2y-z=2 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es $3(\lambda-1)=3(2-1)=3$. Aplicando la regla de Cramer se obtiene:

$$x=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}0&1&1\\-3&2&2\\2&-2&-1\end{vmatrix}=1\,;\qquad y=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&-3&2\\1&2&-1\end{vmatrix}=0\,;\qquad z=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&2&-3\\1&-2&2\end{vmatrix}=-1$$

Ejercicio 3. *Dado el sistema*

$$\begin{cases}x-ay+3z&=&0\\x+ay-2z&=&0\\2x+z&=&0\end{cases}$$

- *Discutir su compatibilidad según los valores de a.*
- *Resolverlo cuando sea posible.*

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix}1&-a&3\\1&a&-2\\2&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-a&3\\2&0&1\\2&0&1\end{vmatrix}=0$$

Hemos sumado la primera fila a la segunda. El determinante que resulta tiene dos filas iguales y, por consiguiente es cero para todo valor de a. El rango entonces nunca puede ser igual a 3. Como, por otra parte, hay un determinante de orden 2 distinto de cero, el formado por las dos primeras filas y la primera y tercera columna, el rango de la matriz es igual a 2.

- Puesto que es un sistema homogéneo y el rango de la matriz es 2, el sistema es siempre compatible indeterminado.
- Hacemos $y=t$, suprimimos la tercera ecuación y resulta:

  $$\begin{cases}x+3z=at\\x-2z=-at\end{cases}$$

  El determinante de la matriz de coeficientes es -5. Resolviendo por la regla de Cramer resulta:

  $$x=\frac{-1}{5}\begin{vmatrix}at&3\\-at&-2\end{vmatrix}=\frac{-at}{5}\qquad z=\frac{-1}{5}\begin{vmatrix}1&at\\1&-at\end{vmatrix}=\frac{2at}{5}$$

  Puesto que en un sistema homogéneo, si se multiplica una solución por un número cualquiera se obtiene otra solución, la solución general puede expresarse también como $(-at,\,5t,\,2at)$.

---

5. Examen de Programación Lineal

Ejercicio 1. *Calcula la solución del siguiente sistema de inecuaciones y calcula las coordenadas de sus vértices:*

$$\begin{cases} x + 3y \leq 15 \\ 2x + y \leq 10 \\ x - y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

La región factible se puede ver en la figura 1.

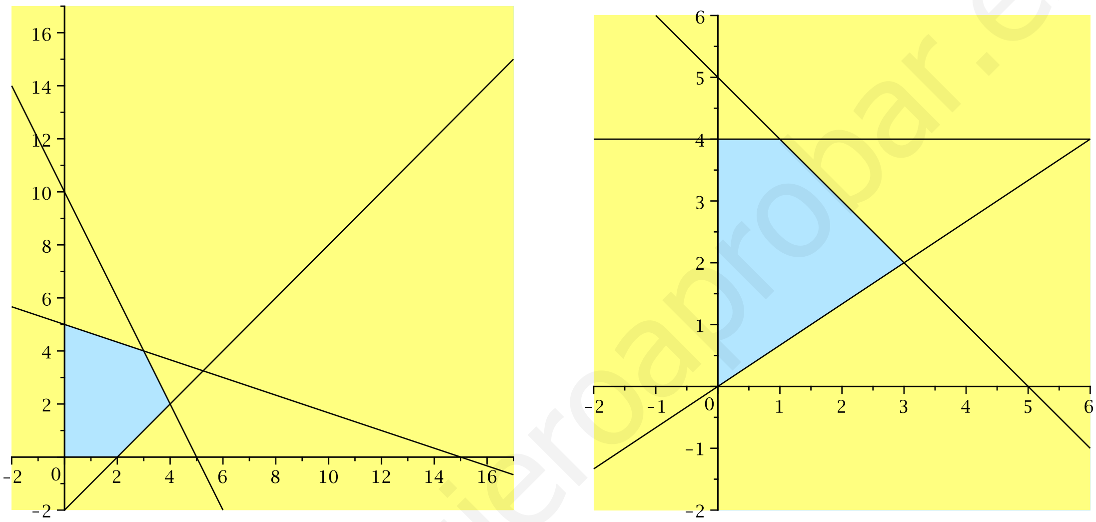


Figura 1: Ejercicios 1 y 2

Los vértices de la región son $O(0,0)$, $A(0,5)$, $B(3,4)$, $C(4,2)$ y $D(2,0)$.

Ejercicio 2. *Calcular el máximo y el mínimo de la función $F(x,y) = 3x + 8y$ con las siguientes restricciones:*

$$\begin{cases} 2x - 3y \leq 0 \\ x + y \leq 5 \\ y \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

Podemos ver la región factible en la figura 1. Los vértices de la región son los puntos $O(0,0)$, $A(0,4)$, $B(1,4)$ y $C(3,2)$.

El mínimo de la función se da en el punto $O(0,0)$ y el máximo en $B(1,4)$.

Ejercicio 3. *Se desea invertir una cantidad de dinero menor o igual que* 125000 *euros, distribuidos entre acciones del tipo A y del tipo B. Las acciones del tipo A garantizan una ganancia del* 10 % *anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de* 30000 *euros y un máximo de* 81000 *euros. Las acciones del tipo B garantizan una ganancia del* 5 % *anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de* 25000 *euros. La cantidad invertida en acciones del tipo B no puede superar el triple de la cantidad invertida en acciones del tipo A. ¿Cuál debe ser la distribución de la inversión para maximizar la ganancia anual? Determínese dicha ganancia máxima.*

Solución:

Llamemos:

x: cantidad invertida en acciones del tipo A
y: cantidad invertida en acciones del tipo B

La función objetivo es $F(x,y) = 0{,}10x + 0{,}05y$.

Las restricciones son las siguientes:

$$\begin{cases} x + y \leq 125 \\ x \geq 30 \\ x \leq 81 \\ y \geq 25 \\ y \leq 3x \\ x \geq 0\,,\ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible está representada en la figura 2.

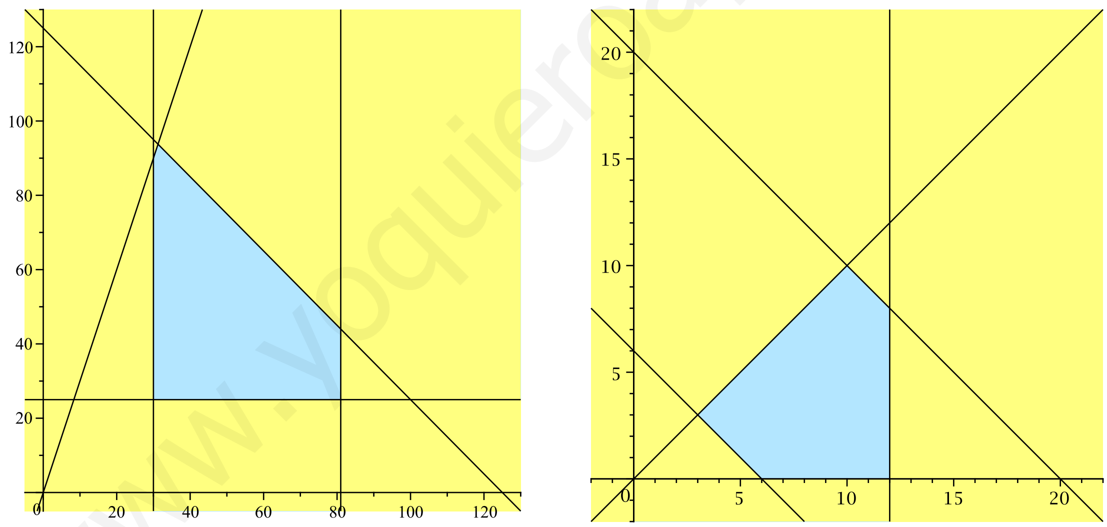


Figura 2: Ejercicios 3 y 4

El máximo puede darse en los vértices $A(31250, 93750)$ o en $B(81000, 44000)$. Calculamos la función objetivo en ambos:

$$F(31250, 93750) = 0{,}10 \cdot 31250 + 0{,}05 \cdot 93750 = 7812{,}50$$
$$F(81000, 44000) = 0{,}10 \cdot 81000 + 0{,}05 \cdot 44000 = 10300$$

El beneficio máximo de 10300 euros se da invirtiendo 81000 euros en acciones del tipo A y 44000 euros en acciones del tipo B.

Ejercicio 4. *Una compañía naviera dispone de dos barcos A y B para realizar un crucero. El barco A debe hacer tantos viajes o más que el barco B, pero no puede sobrepasar los 12 viajes. Entre los dos barcos deben hacer no menos de 6 viajes y no más de 20. La naviera obtiene un beneficio de 18000 euros por cada viaje del barco A y 12000 euros por cada viaje del B. Se desea que las ganancias sean máximas. Hallar el número de viajes que debe efectuar cada barco para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.*

Solución:

Llamamos:

x: número de viajes del barco A
y: número de viajes del barco B

La función objetivo es $F(x,y) = 18000x + 12000y$.

Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 12 \\ x + y \geq 6 \\ x + y \leq 20 \\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices que pueden dar el beneficio máximo son $A(10,10)$ o $B(12,8)$. Claramente, el máximo beneficio se da en $B(12,8)$ y vale:

$$F(12,8) = 18000 \cdot 12 + 12000 \cdot 8 = 312000$$

6. Examen global de la primera parte

Ejercicio 1. *Dada la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

calcula $A \cdot A^t - 5A^{-1}$, siendo A^t y A^{-1} las matrices traspuesta e inversa respectivamente.

Solución:

Puesto que:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \qquad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(recuérdese que la inversa de una matriz 2×2 se obtiene intercambiando los elementos de ls diagonal, cambiando de signo los otros dos y dividiendo por el determinante) tenemos que:

$$A \cdot A^t - 5A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 5 \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2. *Una empresa de telefonía móvil fabrica dos modelos de teléfonos: A y B. El número total de teléfonos fabricados mensualmente no supera los 3000. También sabemos que siempre se fabrican al menos 1000 unidades del teléfono A, y que la mitad de los teléfonos A no supera la tercera parte de los teléfonos B. Si los teléfonos A generan un beneficio de 40 euros por unidad y los B generan un beneficio de 20 euros por unidad, halla la cantidad de cada clase que hay que fabricar para obtener un beneficio máximo; halla también ese beneficio máximo.*

Solución:

Llamamos:

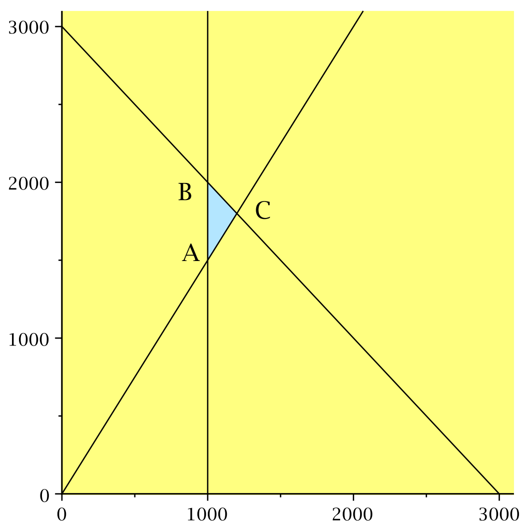
x: número de teléfonos de tipo A
y: número de teléfonos de tipo B.

La función objetivo es:

$$F(x, y) = 40x + 20y$$

Tenemos las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 3000 \\ x \geq 1000 \\ \frac{x}{2} \leq \frac{y}{3} \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices de la región factible son los puntos:

$$A(1000, 1500), B(1000, 2000) y C(1200, 1800)$$

El beneficio máximo se produce en el punto $C(1200, 1800)$ y vale:

$$F(1200, 1800) = 40 \cdot 1200 + 20 \cdot 1800 = 84000$$

Ejercicio 3. *Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:*

$$\begin{cases} x + ky + z = 1 \\ 2y + kz = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

1. *Discútase el sistema para los diferentes valores de k.*
2. *Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.*
3. *Resuélvase el sistema para $k = 3$*

Solución:

Calculamos en primer lugar el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + k^2 - 2 - k = k^2 - k$$

El determinante se anula para $k = 0$ y $k = 1$. Se pueden distinguir los siguientes casos:

- Para $k \neq 0$ y $k \neq 1$ el determinante es distinto de cero- Por consiguiente el rango de la matriz de coeficientes es 3 (igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas) y el sistema es compatible determinado.
- Para $k = 0$ tenemos:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

  En el último paso hemos restado la segunda columna a la tercera. Claramente, el determinante de la última matriz es distinto de cero. El rango de la matriz ampliada es 3 mientras que el rango de la matriz de coeficientes es 2. El sistema es incompatible.

- Para $k = 1$:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

  Hemos suprimido la segunda columna porque en la matriz de coeficientes solo puede haber dos columnas independientes. Puesto que la matriz resultante tiene dos columnas iguales su determinante es cero. El rango de ambas matrices es 2 y el sistema es compatible indeterminado.

Resolvamos el sistema para $k = 1$. Solo hay dos ecuaciones independientes. Escogemos las dos primeras y obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$$

Tomamos como parámetro la incógnita $z = \lambda$ y resulta:

$$\begin{cases} x + y = 1 - \lambda \\ 2y = 2 - \lambda \end{cases}$$

La solución es:

$$x = \frac{-\lambda}{2}, \quad y = \frac{2 - \lambda}{2}, \quad z = \lambda$$

Para $k = 3$ tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Reolviendo por la regla de Cramer se obtiene

$$x = \frac{1}{3}, y = 0, z = \frac{2}{3}$$

7. Derivadas

Ejercicio 1. *Derivar las siguientes funciones:*

- $y = (x-2)\ln x$
- $y = 5e^{3x^2-5}$
- $y = \dfrac{3x^2-1}{x^2+2}$
- $y = \sqrt{x^2+3}$
- $y = \dfrac{2x}{(x-1)^2}$

Solución:

$$y = (x-2)\ln x \qquad y' = 1\cdot\ln x + \frac{1}{x}(x-2)$$

$$y = 5e^{3x^2-5} \qquad y' = 5e^{3x^2-5}(6x)$$

$$y = \frac{3x^2-1}{x^2+2} \qquad y' = \frac{6x(x^2+2)-2x(3x^2-1)}{(x^2+2)^2}$$

$$y = \sqrt{x^2+3} \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}2x$$

$$y = \frac{2x}{(x-1)^2} \qquad y' = \frac{2(x-1)^2-2(x-1)2x}{(x-1)^4}$$

Ejercicio 2. *Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva* $y = x^3 - 4x$*:*

- *En el punto de abscisa* $x = -1$.
- *Paralela a la recta* $8x - y + 5 = 0$.

Solución:

- Calculamos la ordenada del punto de tangencia:

  $$y(-1) = (-1)^3 - 4(-1) = 3$$

  La pendiente es la derivada en el punto de abscisa -1

  $$y' = 3x^2 - 4$$
  $$m = y'(-1) = 3(-1)^2 - 4 = -1$$

  La ecuación de la tangente es:

  $$y - 3 = -1(x+1)$$

- La recta que nos dan tiene pendiente 8. En el punto de tangencia la derivada debe ser igual a 8:

  $$y' = 3x^2 - 4 = 8 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 2$$

  En el punto de abscisa -2 la ordenada es $y(-2) = (-2)^3 - 4(-2) = 0$. Como ya sabemos que la pendiente es 8, la ecuación de la tangente es:

  $$y - 0 = 8(x+2)$$

  De forma similar, la ecuación de la tangente en el punto de abscisa 2 resulta ser:

  $$y - 0 = 8(x-2)$$

Ejercicio 3. *Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:*

- ◇ $y = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$
- ◇ $y = \dfrac{x^2 + 3}{x - 2}$

Solución:

- ◇ La asíntota horizontal es $y = 0$ porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3 - 1} = 0$$

La asíntota vertical es $x = 1$ porque

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x^3 - 1} = \infty$$

- ◇ Hacemos la división y resulta:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & x^2 & & & +\ 3 & x - 2 \\ \cline{6-6}
- & x^2 & + & 2x & & x + 2 \\ \cline{1-5}
 & & & 2x & +\ 3 & \\
 & & - & 2x & +\ 4 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 7 &
\end{array}$$

La asíntota oblicua es $y = x + 2$ y la asíntota vertical $x = 2$.

Ejercicio 4. *Representar gráficamente la curva* $y = x^3 - 3x + 2$ *estudiando su monotonía y calculando sus puntos de inflexión.*

Solución:

- ◇ Calculamos las derivadas:

$$y' = 3x^2 - 3$$
$$y'' = 6x$$

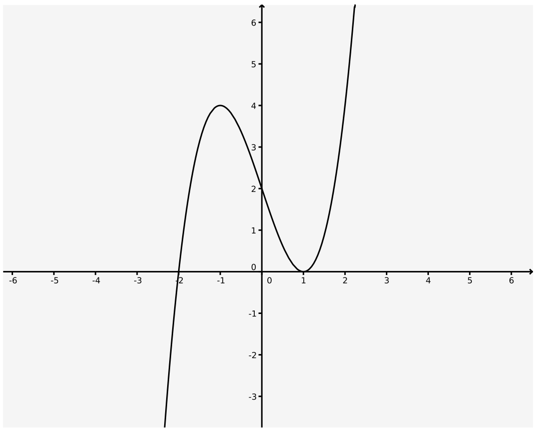
- ◇ La derivada se anula en -1 y $+1$. El signo de la derivada está dado en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & y' \\
+ & | & - & | & + & \\ \hline
 & -1 & & 1 & & x
\end{array}$$

Así pues la función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Es decreciente en $(-1, 1)$. La función tiene un máximo en -1 y un mínimo en $+1$. Calculamos las ordenadas de estos puntos y así obtenemos:

máximo$(-1, 4)$; mínimo$(1, 0)$

El punto de inflexión se obtiene haciendo cero la segunda derivada. Así se obtiene $I(0, 2)$. Con estos datos, la gráfica de la función es:



Ejercicio 5. *Calcula las asíntotas y estudia el crecimiento y decrecimiento de la curva para representar gráficamente la curva:*

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

Solución:

- ⋄ La asíntota vertical es $x = 1$ puesto que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \infty$$

No hay asíntota horizontal ya que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \infty$$

Calculemos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x - 1)} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{(x - 1)} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x + 2}{x - 1} = -1$$

Así pues, la asíntota es $y = x - 1$.

- ⋄ Estudiemos el signo de la derivada:

$$y' = \frac{(2x - 2)(x - 1) - 1 \cdot (x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$$

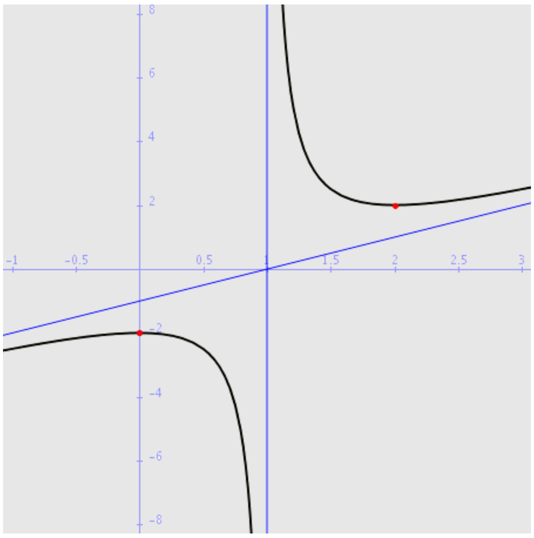
La derivada se anula para $x = 0$ y $x = 2$. El signo de la derivada viene representado en el siguiente esquema:

$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$		y'
	0		1		2			x

$x \in (-\infty, 0)$	$y' > 0$	f creciente
$x = 0$	$y' = 0$	máximo
$x \in (0, 1)$	$y' < 0$	f decreciente
$x = 1$		no existe la función
$x \in (1, 2)$	$y' < 0$	f decreciente
$x = 2$	$y' = 0$	mínimo
$x \in (2, \infty)$	$y' > 0$	f creciente

El máximo está en el punto $M(0, -2)$ y el mínimo en $m(2, 2)$.

◇ Con estos datos, la gráfica de la función es la siguiente:



8. Examen global de la segunda parte

Ejercicio 1. *Dada la función:*

$$y = \frac{(x-3)^2}{x+3}$$

◇ *Determinar las asíntotas de la función.*

◇ *Calcular sus máximos y mínimos y determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

Solución:

◇ La función puede escribirse como:

$$y = \frac{(x-3)^2}{x+3} = \frac{x^2-6x+9}{x+3}$$

Hacemos la división:

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & x^2 & -\ 6x & +\ 9 & x+3 \\ \cline{5-5}
- & x^2 & -\ 3x & & x-9 \\ \cline{1-4}
 & & -\ 9x & +\ 9 & \\
 & & +\ 9x & +\ 27 & \\ \cline{3-4}
 & & & 36 &
\end{array}$$

De forma que podemos escribir la función:

$$y = \frac{(x-3)^2}{x+3} = \frac{x^2-6x+9}{x+3} = x - 9 + \frac{36}{x+3}$$

Hay una asíntota vertical $x = -3$ y una asíntota oblicua $y = x - 9$.

◇ Para estudiar el crecimiento y decrecimiento calculamos la derivada:

$$y' = \frac{(2x-6)(x+3) - (x^2-6x+9)}{(x+3)^2} = \frac{x^2-6x-27}{(x+3)^2}$$

Los ceros de la derivada son $x = -9$ y $x = 3$. Aquí están los puntos de tangente horizontal. Por otra parte, la función no existe en $x = -3$ (asíntota vertical). El signo de la derivada está dada en el siguiente esquema:

x		-9		-3		3	
y'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Por tanto:

- La función es creciente en $(-\infty, -9) \cup (3, \infty)$.
- Es decreciente en $(-9, -3) \cup (-3, 3)$.
- Tiene un máximo en $(-9, -24)$.
- Tiene un mínimo en $(3, 0)$.
- No existe en $x = -3$.

Ejercicio 2. *Se considera la función real de variable real definida por:*

$$y = (x^2 - 1)^2$$

- *Determinar los extremos relativos de la función.*
- *Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 3$.*
- *Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función y el eje OX.*

Solución:

- Calculamos la derivada:

  $$y' = 2(x^2 - 1) \cdot 2x$$

  La derivada se anula en $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$: el signo de la derivada aparece reflejado en el siguiente esquema:

y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
x		-1		0		1	

  Así pues, hay un mínimo en $(-1, 0)$, un máximo en $(0, 1)$ y otro mínimo en $(1, 0)$.

- Para $x = 3$ la función vale:

  $$y(3) = (3^2 - 1)^2 = 64$$

  La pendiente es la derivada para $x = 3$:

  $$m = y'(3) = 2(3^2 - 1) \cdot 2 \cdot 3 = 96$$

  La ecuación de la recta tangente es:

  $$y - 64 = 96(x - 3)$$

- La curva corta al eje OX en $x = -1$ y $x = 1$. La integral vale:

  $$\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^2 \, dx = \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1) \, dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}$$

  esta es la superficie pedida.

Ejercicio 3. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$$

Calcular el valor de b tal que

$$\int_0^b f(x) \, dx = 0$$

Solución:

Aplicando la regla de Barrow:

$$\int_0^b f(x) \, dx = \int_0^b \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} \, dx = \Big[\ln(x^2 - x + 1) \Big]_0^b = \ln(b^2 - b + 1)$$

Puesto que la integral debe ser igual a cero:

$$\ln(b^2 - b + 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad b^2 - b + 1 = e^0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad b^2 - b = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 0, \quad b = 1$$

Ejercicio 4. *Se considera la función real de variable real definida por:*

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$$

- *Calcúlense a, b para que la función f tenga un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 2$.*
- *Para $a = b = 0$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y la recta de ecuación $y = 8x - 6$.*

Solución:

- La derivada de la función es:

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

  La derivada debe ser cero en $x = 1$ y $x = 2$:

$$\begin{cases} f'(1) = 6 + 2a + b = 0 \\ f'(2) = 24 + 4a + b = 0 \end{cases}$$

  Resolviendo este sistema se obtiene $a = -9$ y $b = 12$.

- Los puntos de corte de las dos gráficas son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = 2x^3 - 6 \\ y = 8x - 6 \end{cases}$$

  Este sistema tiene tres soluciones $x = 0$, $x = -2$ y $x = 2$. Calculamos por separado las integrales de la diferencia de las dos funciones entre -2 a 0 y entre 0 a 2:

$$\int_{-2}^{0} (2x^3 - 8x)\,dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{8x^2}{2}\right]_{-2}^{0} = \left[\frac{x^4}{2} - 8x^2\right]_{-2}^{0} = 8$$
$$\int_{0}^{2} (2x^3 - 8x)\,dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{8x^2}{2}\right]_{0}^{2} = \left[\frac{x^4}{2} - 8x^2\right]_{0}^{2} = -8$$

  El área es la suma de los valores absolutos de ambas integrales, es decir, 16.

Ejercicio 5. *Se considera la función real de variable real definida por*

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 2}$$

- *Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.*
- *Calcúlese la integral definida*

$$\int_2^3 f(x)\,dx$$

Solución:

- La ordenada del punto de tangencia vale:

$$f(1) = \frac{3}{1 - 2} = -3$$

Para calcular la pendiente de la tangente, calculamos primero la derivada:

$$f'(x) = \frac{3(x^2-2) - 2x \cdot 3x}{(x-2)^2}$$

La pendiente es la derivada para $x = 1$:

$$m = f'(1) = \frac{3(1-2) - 2 \cdot 3}{(1-2)^2} = -9$$

por consiguiente, la ecuación de la tangente es:

$$y + 3 = -9(x-1)$$

◇ Calculemos en primer lugar la integral indefinida:

$$\int \frac{3x}{x^2-2}\,dx = 3\int \frac{1}{x^2-2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2-2}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2-2) + C$$

Entonces:

$$\int_2^3 \frac{3x}{x^2-2}\,dx = \left[\frac{3}{2}\ln(x^2-2)\right]_2^3 = \frac{3}{2}\ln 7 - \frac{3}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\ln\frac{7}{2}$$

9. Examen de Cálculo

Ejercicio 1. *Sea la función*

$$f(x)=\begin{cases} a+bx-x^2 & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x>1\end{cases}$$

Calcular a y b para que f sea continua y derivable para cualquier valor de x.

Solución:

La función es continua y derivable para todos los valores de x distintos de 1. Para que la función sea continua en $x=1$ debe ocurrir que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$
$$\lim_{x\to 1^-} fa+bx-x^2=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}$$
$$a+b-1=1 \quad\Longrightarrow\quad a+b=2$$

La derivada de la función para $x\neq 1$ es:

$$f(x)=\begin{cases} b-2x & \text{si } x<1\\ \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } x>1\end{cases}$$

Si la función es derivable, las derivadas por la derecha y lor la izquierda deben coincidir. Por tanto:

$$f'(1^-)=f'(1^+)$$
$$b-2=-1 \quad\Longrightarrow\quad b=1$$

y de aquí $a=1$ y $b=1$.

Ejercicio 2. *Representar gráficamente la curva $y=4x-x^3$ analizando el crecimiento y decrecimiento y calculando sus máximos, mínimos y puntos de inflexión.*

Solución:

Calculamos la derivada:

$$y'=4-3x^2$$

Las raíces de la derivada son $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ y $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. El signo de la derivada es:

y'	$-$	0	$+$	0	$-$
x		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$	

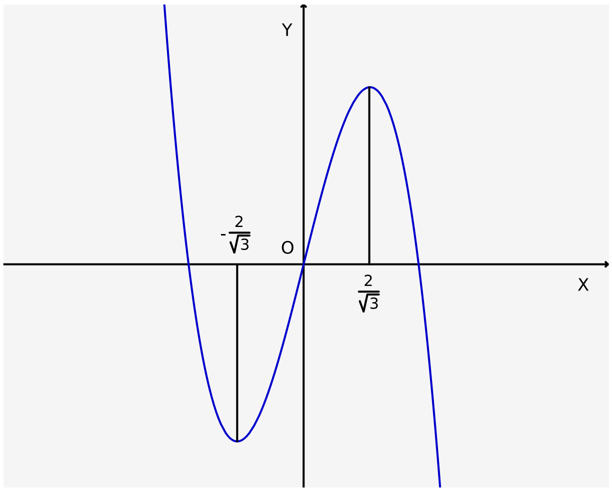
Por consiguiente, hay un mínimo en $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ y un máximo en $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Para calcular el punto de inflexión igualamos a cero la derivada segunda:

$$y''=-6x=0 \quad\Longrightarrow\quad x=0$$

El punto de inflexión esta en $(0,0)$.

Con estos datos, la representación gráfica es:



Ejercicio 3. *Descomponer el número 28 en dos sumandos tales que el producto de ambos sea máximo.*

Solución:

Llamemos a los dos números x y $28 - x$. La función que debe ser máxima es:

$$p = x \cdot (28 - x) = 28x - x^2$$

Derivando e igualando a cero:

$$p' = 28 - 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 14$$

Los dos sumandos son iguales a 14.

Ejercicio 4. *Se considera la curva $y = x^2 + 8x$. Se pide:*

- *Calcular las coordenadas del punto en que la tangente a la curva es paralela a la recta $y = 2x$.*
- *Calcular el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la curva dada y la recta $y = x + 8$.*

Solución:

- Se trata de calcular en qué punto la curva tiene pendiente 2. En ese punto la derivada debe ser igual a 2. Por tanto:

  $$y' = 2x + 8 = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = -3$$

  La ordenada de del punto de la curva que tiene de abscisa -3 es -15. Por ello, el punto es $(-3, -15)$.

- Calculamos los puntos de corte de la curva y la recta:

  $$\begin{cases} y = x^2 + 8x \\ y = x + 8 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 7x - 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

  El área es el valor absoluto de la integral

  $$\int_{-8}^{1} (x^2 + 7x - 8)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 8x\right]_{-8}^{1} = -\frac{243}{2}$$

  El área es entonces, igual a $\frac{243}{2}$.

Ejercicio 5. *Representar gráficamente la curva*

$$y = \frac{x+3}{x^2-4x-5}$$

calculando sus asíntotas y estudiando su monotonía.

Las asíntotas verticales se obtienen calculando las raíces del denominador:

$$x^2-4x-5=0 \implies \begin{cases} x=-1 \\ x=5 \end{cases}$$

Las asíntotas verticales son las rectas $x=-1$ y $x=5$.

Puesto que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x^2-4x-5} = 0$$

la asíntota horizontal es $y=0$.

Analizamos la derivada

$$y' = \frac{x^2-4x-5-(2x-4)(x+3)}{(x^2-4x-5)^2} = \frac{-x^2-6x+7}{(x^2-4x-5)^2}$$

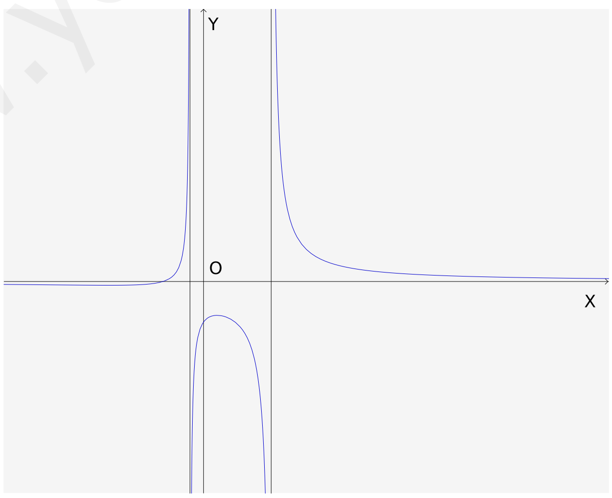
Los ceros de la derivada son:

$$-x^2-6x+7=0 \implies x^2+6x-7=0 \implies \begin{cases} x=-7 \\ x=1 \end{cases}$$

El signo de la derivada es:

y'	$-$	0	$+$	0	$-$
x		-7		1	

Hay un mínimo en $\left(-7, -\frac{1}{18}\right)$ y un máximo en $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$. Con estos datos, la gráfica es:



10. Probabilidad

Ejercicio 1. *Sean A y B dos sucesos tales que $p(A) = 0{,}6$, $p(B) = 0{,}4$ y $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}7$.*

- *Calcula $p(A \cap B)$ y razona si A y B son independientes.*
- *Calcula $p(A \cup B)$.*

Solución:

- De las leyes de Morgan se desprende que:

$$p(\overline{A} \cup \overline{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 0{,}7 \quad \Longrightarrow \quad p(A \cap B) = 1 - 0,7 = 0{,}3$$

  Puesto que:

$$p(A)p(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24 \neq p(A \cap B)$$

  los sucesos no son independientes.

- Aplicando la regla de la suma:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}7$$

Ejercicio 2. *Se consideran dos actividades de ocio: A = ver televisión y B = visitar centros comerciales. En una ciudad, la probabilidad de que un adulto practique A es igual a $0{,}46$; la probabilidad de que practique B es $0{,}33$ y la probabilidad de que practique A y B es igual a $0{,}15$.*

- *Se selecciona al azar un adulto de dicha ciudad, ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ninguna de las dos actividades anteriores?*
- *Se elige al azar un individuo de entre los que practican alguna de las dos actividades. ¿Cuál es la probabilidad de que practique las dos actividades?*

Solución:

- Los datos son los siguientes:

$$p(A) = 0{,}46\,; \qquad p(B) = 0{,}33\,; \qquad p(A \cap B) = 0{,}15$$

  Entonces:

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B})$$

  Por la regla de la suma:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}46 + 0{,}33 - 0{,}15 = 0{,}64$$

  y por consiguiente:

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$$

- Nos piden la probabilidad de $A \cap B$ condicionada a $A \cup B$:

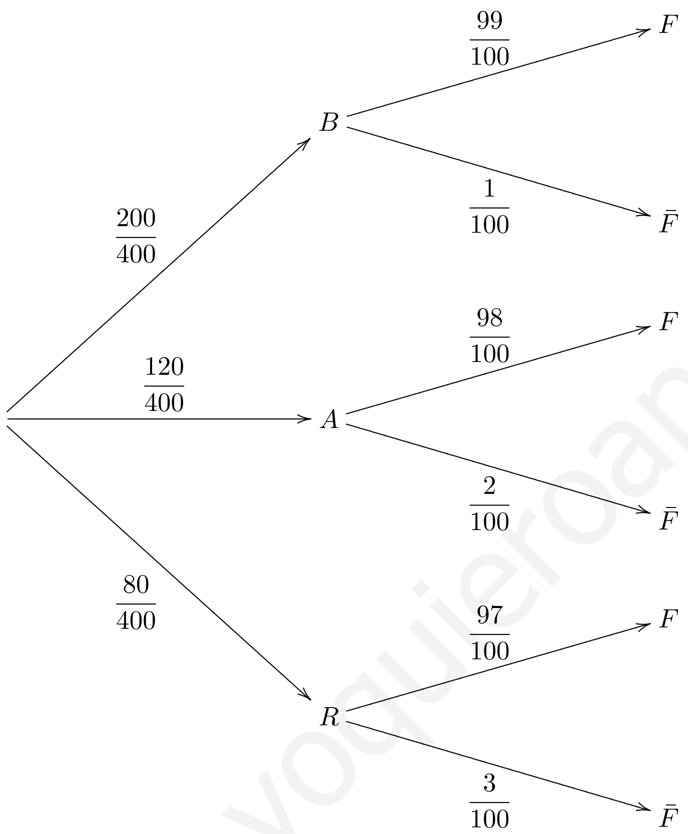
$$p(A \cap B | A \cup B) = \frac{p((A \cap B) \cap (A \cup B))}{p(A \cup B)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A \cup A)} = \frac{0{,}15}{0{,}64} = \frac{15}{64}$$

Ejercicio 3. *Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a* 0,01 *si la bombilla es blanca, es igual a* 0,02 *si la bombilla es azul y es igual a* 0,03 *si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.*

- ⋄ *Calcular la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.*
- ⋄ *Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.*

Solución:

Los datos del problema pueden expresarse mediante el siguiente esquema:



- ⋄ La probabilidad total de que la bombilla no funcione es:

$$p(\bar{F}) = \frac{200}{400} \cdot \frac{1}{100} + \frac{120}{400} \cdot \frac{2}{100} + \frac{80}{400} \cdot \frac{3}{100} = \frac{17}{1000}$$

- ⋄ Calculemos $p(A|\bar{F})$:

$$p(A|\bar{F}) = \frac{p(A \cap \bar{F})}{p(\bar{F})} = \frac{\frac{120}{400} \cdot \frac{2}{100}}{\frac{17}{1000}} = \frac{6}{17}$$

Ejercicio 4. *La probabilidad de que a un habitante de un cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a* 0,55*; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a* 0,40 *y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a* 0,25*. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste:*

- ⋄ *Al menos uno de los dos tipos de música.*
- ⋄ *La música clásica y también la música moderna.*
- ⋄ *Sólo la música clásica.*
- ⋄ *Sólo la música moderna.*

Solución:

Llamemos:

C: al habitante elegido le gusta la música clásica
M: al habitante elegido le gusta la música moderna

Tenemos los siguientes datos: $p(M) = 0{,}55$, $p(C) = 0{,}40$ y $p(\bar{C} \cap \bar{M}) = 0{,}25$.

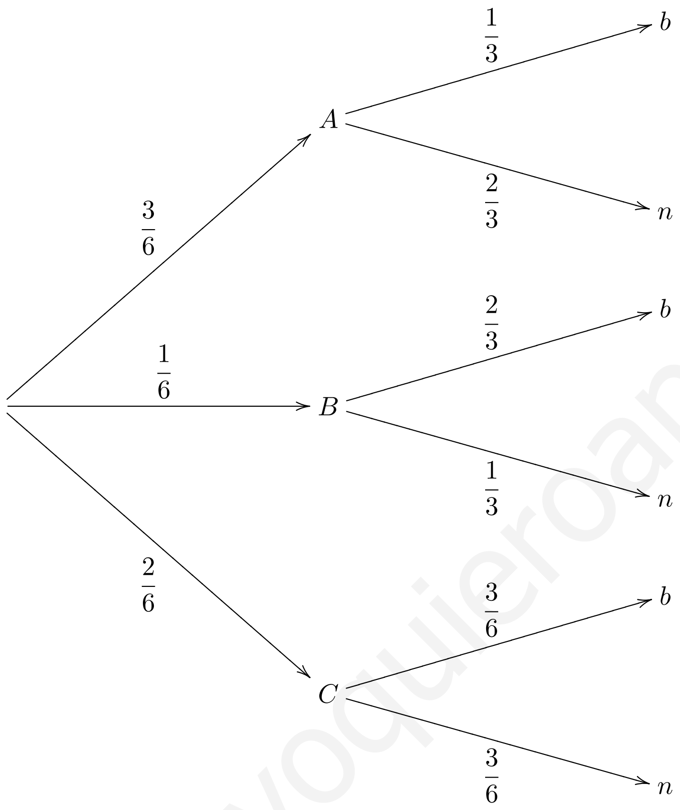
- ⋄ $p(\bar{C} \cap \bar{M}) = 0{,}25 \quad \Longrightarrow \quad p(\overline{C \cup M}) = 0{,}25 \quad \Longrightarrow \quad p(C \cup M) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$
- ⋄ $p(C \cap M) = p(C) + p(M) - p(C \cup M) = 0{,}40 + 0{,}55 - 0{,}75 = 0{,}20$
- ⋄ $p(C \cap \bar{M}) = p(C - M) = p(C) - p(C \cap M) = 0{,}40 - 0{,}20 = 0{,}20$
- ⋄ $p(M \cap \bar{C}) = p(M - C) = p(M) - p(C \cap M) = 0{,}55 - 0{,}20 = 0{,}35$

Ejercicio 5. *Se dispone de tres urnas A, B y C. La urna A contiene una bola blanca y 2 bolas negras, la urna B contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna C contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1, 2 o 3 se escoge la urna A, si sale el 4 se escoge la urna B y si sale 5 o 6 se escoge la urna C. A continuación se extrae una bola de la urna elegida.*

- *¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?*
- *Si se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna C?*

Solución:

En este caso el esquema es el siguiente:



- La probabilidad de que la bola extraída sea blanca es:

$$p(b) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{4}{9}$$

- Y la probabilidad de que haya sido extraída de la urna C condicionada a que haya salido blanca:

$$p(C|b) = \frac{p(C \cap b)}{p(b)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{8}$$

11. Probabilidad y Estadística

Ejercicio 1. *En una población, el* 40 % *son hombres y el* 60 % *mujeres. En esa población el* 80 % *de los hombres y el* 20 % *de las mujeres son aficionados al fútbol.*

- *Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al fútbol.*
- *Elegida al azar una persona resulta ser aficionada al fútbol. ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?*

Ejercicio 2. *Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen la azar sin reemplazamiento cuatro huevos.*

- *Calcular la probabilidad de extraer los cuatro huevos en buen estado.*
- *Calcular la probabilidad de extraer de entre los cuatro, exactamente un huevo roto.*

Ejercicio 3. *Sean* A *y* B *dos sucesos tales que* $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(\bar{B}) = \frac{2}{5}$ *y* $p(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$. *Calcular:*

- $p(B|A)$
- $p(\bar{A}|B)$

Ejercicio 4. *Se supone que el gasto mensual dedicado al ocio por una familia de un determinado país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a* 55 *euros. Se ha elegido una muestra aleatoria simple de* 81 *familias, obteniéndose un gasto medio de* 320 *euros.*

- *¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que* 10 *euros con un grado de confianza del* 96 %*?. Razónese la respuesta.*
- *¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para poder asegurarlo?*

Ejercicio 5. *El rendimiento por hectárea de las plantaciones de trigo en una cierta región, se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a* 1 *tonelada por hectárea. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de* 64 *parcelas con una superficie igual a 1 hectárea cada una, obteniéndose un rendimiento medio de* 6 *toneladas.*

- *¿Puede asegurarse que el error de estimación del rendimiento medio por hectárea es menor que* 0,5 *toneladas, con un nivel de confianza del* 98 %*? Razónese.*
- *¿Qué tamaño muestral mínimo ha de tomarse para que el error en la estimación sea menor que* 0,5 *toneladas con un nivel de confianza del* 95 %*?*

---

12. Examen final

Examen de Cálculo

Ejercicio 1.

- *Halla la ecuación de la recta tangente a la curva* $y = \sqrt{x+4}$ *en el punto de abscisa* 0.
- *Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva* $y = x^3 - 3x$ *que sean paralelas a la recta* $y = 6x + 10$.

Solución:

- La ordenada del punto de tangencia es:

  $$y(0) = 2$$

  Por consiguiente, el punto de tangencia es $P(0, 2)$.
  Calculamos la derivada:

  $$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

  La pendiente de la tangente es la derivada en el punto de abscisa $x_0 = 0$:

  $$m = y'(0) = \frac{1}{4}$$

  La ecuación de la recta tangente es:

  $$y - 2 = \frac{1}{4}\,(x - 0)$$

- Si las tangentes son paralelas a $y = 6x + 10$ su pendiente es igual a 6. Puesto que la pendiente es la derivada tenemos que:

  $$y' = 3x^2 - 3 = 6 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$$

  Calculamos las ordenadas de estos puntos de la curva:

  $$\begin{aligned} x = \sqrt{3} \quad &\Longrightarrow \quad y = \sqrt{27} - 3\sqrt{3} = 0 \\ x = -\sqrt{3} \quad &\Longrightarrow \quad y = -\sqrt{27} + 3\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

  Las tangentes son:

  $$y = 6(x - \sqrt{3}) \; ; \qquad y = 6(x + \sqrt{3})$$

Ejercicio 2. *Se considera la función real de variable real definida por* $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$.

- *Calcúlense* a, b *para que la función* f *tenga un máximo relativo en* $x = 1$ *y un mínimo relativo en* $x = 2$.
- *Para* $a = b = 0$, *calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de* f *y la recta de ecuación* $y = 8x - 6$.

Solución:

- La derivada en $x = 1$ y $x = 2$ debe ser igual a cero de modo que:

  $$\begin{aligned} &f'(x) = 6x^2 + 2ax + b \\ &f'(1) = 6 + 2a + b = 0 \\ &f'(2) = 24 + 4a + b = 0 \end{aligned}$$

  y resolviendo el sistema resulta $a = -9$ y $b = 12$.

- Calculamos los puntos de intersección de la curva y la recta:

$$\begin{cases} y = 2x^3 - 6 \\ y = 8x - 6 \end{cases} \implies 2x^3 - 6 = 8x - 6 \implies x^3 - 4x = 0 \implies \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Calculamos la integral de la diferencia de las dos funciones:

$$\int_{-2}^{0} \left(2x^3 - 8x\right)\, dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{8x^2}{2}\right]_{-2}^{0} = 8$$
$$\int_{0}^{2} \left(2x^3 - 8x\right)\, dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{8x^2}{2}\right]_{0}^{2} = -8$$

El área es la suma de los valores absolutos de ambas integrales, es decir, 16.

Ejercicio 3. *Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = (x^2-1)^2$.*

- *Determínense los extremos relativos de f.*
- *Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.*

Solución:

- Calculamos las derivadas de la función:

$$f'(x) = 2(x^2-1)\cdot 2x = 4x^3 - 4x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

La primera derivada se anula en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$, En esos puntos $f''(-1) > 0$, $f''(0) < 0$ y $f''(1) > 0$. Calculando las ordenadas de estos puntos en la expresión de la función tenemos que hay mínimos en $(-1,0)$ y $(1,0)$ y un máximo relativo en $(0,1)$.

- La curva corta al eje OX en los puntos:

$$\begin{cases} y = \left(x^2-1\right)^2 \\ y = 0 \end{cases} \implies x_1 = -1; \quad x_2 = 1$$

Puesto que solamente hay dos puntos de corte basta calcular una integral:

$$\int_{-1}^{1} (x^2-1)^2\, dx = \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}$$

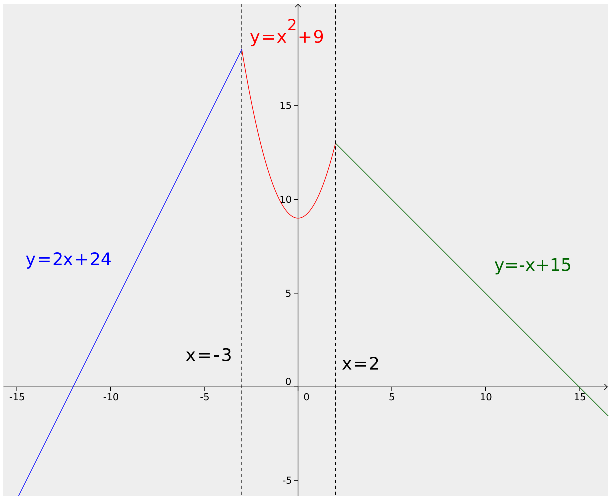
Ejercicio 4. *Se considera la función real de variable real definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 24 \text{ si } x \le -3 \\ x^2 + 9 \text{ si } -3 < x \le 2 \\ -x + 15 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

- *Represéntese gráficamente la función f.*
- *Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.*

Solución:

- Basta representar la primera recta en $(-\infty, -3)$, la parábola en $(-3, 2)$ y la segunda recta en $(2, \infty)$. Se obtiene lo siguiente:



- ◇ Aunque las áreas bajo las rectas podríamos calcularlas por las fórmulas de la geometría elemental, podemos calcularlas también mediante integrales. La gráfica de la función corta al eje OX en los puntos de abscisas -12 y 15. Así pues:

$$S = \int_{-12}^{-3} (2x+24)\ dx + \int_{-3}^{2} \left(x^2+9\right)\ dx + \int_{2}^{15} (-x+15)\ dx$$

Haciendo las operaciones resulta:

$$S = \frac{1333}{6}$$

Ejercicio 5. *Dada la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, se pide determinar:*

- ◇ *Los puntos en los que la gráfica de f corta a los ejes de coordenadas.*
- ◇ *Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.*

Solución:

- ◇ Resolvemos el sistema formado por la ecuación de la curva y la ecuación del eje OX:

$$\begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 9x \\ y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x(x^2 - 6x + 9) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3$$

Los puntos de intersección son $(0,0)$ y $(3,0)$

Para calcular la intersección con el eje OY resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 9x \\ x = 0 \end{cases}$$

que nos da el punto $(0,0)$.

- ◇ Estudiamos la derivada:

$$y' = 3x^2 - 12x + 9$$

Los ceros de la derivada son los puntos $x = 1$ y $x = 3$.

x		1		3	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Por consiguiente hay un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 3$. Entonces, tenemos que:

$x \in (-\infty, 1)$	creciente
$x = 1$	máximo
$x \in (1, 3)$	decreciente
$x = 3$	mínimo
$x \in (3, \infty)$	creciente

Examen global

Ejercicio 1. *Estudiar la compatibilidad del sistema:*

$$\begin{aligned} x + \quad y + \quad &= 1 \\ my + \quad z &= 0 \\ x + (m+1)y + mz &= m+1 \end{aligned}$$

según los valores del parámetro m y resolverlo en el caso en que sea compatible indeterminado.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix} = m^2 + 1 - (m+1) = m^2 - m$$

El determinante se anula para $m = 0$ y para $m = 1$. Entonces tenemos:

- ⋄ Para $m \neq 0$ y $m \neq 1$ el rango de la matriz de coeficientes es 3 igual al rango de la matriz ampliada. El sistema es compatible determinado.
- ⋄ Para $m = 0$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

porque tiene tres columnas iguales. El sistema es compatible indeterminado. Como el rango es 2, nos quedamos con las dos primeras ecuaciones que son independientes. Tomamos la incógnita y como parámetro (z no es posible) y resulta la solución $x = 1 - \lambda,\ y = \lambda,\ z = 0$.

- ⋄ Para $m = 1$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

En este caso el sistema es incompatible.

Ejercicio 2. *Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de 480 metros cuadrados. Puede comprar la pintura a dos proveedores, A y B. El proveedor A le ofrece una pintura con un rendimiento de 6 metros cuadrados por kg y un precio de 1 euro por kg. La pintura del proveedor B tiene un precio de 1,2 euros por kg y un rendimiento de 8 metros cuadrados por kg. Ningún proveedor le puede proporcionar más de 75 kg de pintura y el presupuesto máximo del pintor es de 120 euros. Calcúlese la cantidad de pintura que el pintor tiene que comprar a cada proveedor para obtener el mínimo coste. Calcúlese dicho coste mínimo.*

Solución:

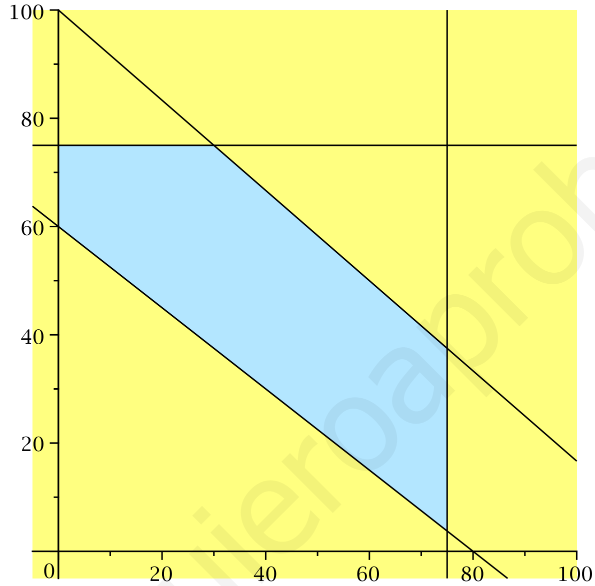
Llamamos x al número de kilos de pintura de tipo A e y al número de kilos de pintura de tipo B. La función objetivo es:

$$F(x, y) = x + 1{,}2y$$

Tenemos las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 6x + 8y \geq 480 \\ x + 1{,}2y \leq 120 \\ 0 < x \leq 75 \\ 0 < y \leq 75 \end{cases}$$

La representación gráfica de la región factible es la siguiente:



El mínimo de la función objetivo puede darse, bien en el vértice $A(0, 60)$ o bien en $B(75; 3{,}75)$. Los valores de la función en estos puntos son:

$$F(0, 60) = 1,2 \times 60 = 72 \text{ euros}$$
$$F(75; 3{,}75) = 75 + 1{,}2 \times 3{,}75 = 79{,}5 \text{ euros}$$

resulta que para que el coste sea mínimo, deben utilizarse 60 kg de pintura del proveedor B con un coste de 72 euros.

Ejercicio 3. *Se considera la función:*

$$y = \frac{x}{x^2+5x+4}$$

Calcular:

- ◇ *Asíntotas.*
- ◇ *Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*
- ◇ *Representación gráfica.*

Solución:

- ◇ La asíntota horizontal es $y = 0$ puesto que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+5x+4} = 0$$

Las asíntotas verticales son las rectas $x = -1$ y $x = -4$ porque en esos puntos el límite de la función es infinito.

- ◇ Calculamos la derivada de la función:

$$y' = \frac{x^2+5x+4-x(2x+5)}{(x^2+5x+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+5x+4)^2}$$

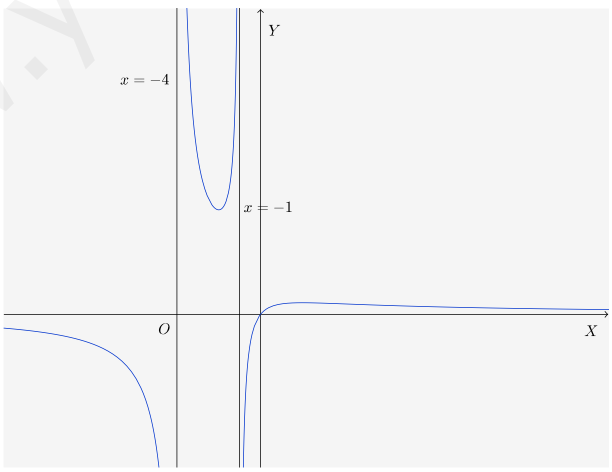
La derivada se anula en $x=-2$ y $x=2$. El signo de la derivada se expresa en el siguiente esquema:

x		-4		-2		-1		2	
y'	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$

Así que tenemos:

- La función es creciente en $(-2,-1)\cup(-1,2)$.
- Es decreciente en $(-\infty,-4)\cup(-4,-2)\cup(2,\infty)$.
- Tiene un mínimo en $(-2,-1)$ y un máximo en $(2,\frac{1}{9})$.
- No existe en $x=-4$ ni en $x=-1$.

- ◇ Con estos datos, la representación gráfica es la siguiente:



Ejercicio 4. *La probabilidad de que a un habitante de un cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a* 0,55*; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a* 0,40 *y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a* 0,25*. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste:*

- ◇ *Al menos uno de los dos tipos de música.*
- ◇ *Sólo la música clásica.*

Solución:

Si llamamos a los sucesos:

C = "Al habitante le gusta la música clásica"
M = "Al habitante le gusta la música moderna"

los datos son los siguientes:

$$p(M) = 0{,}55 \ ; \quad p(C) = 0{,}40 \ ; \qquad p(\bar{M} \cap \bar{c}) = 0{,}25$$

◇ Puesto que:

$$p(\bar{M} \cap \bar{C}) = p(\overline{M \cup C}) = 0{,}25 \quad \Longrightarrow \quad p(M \cup C) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

◇ Del resultado anterior se deduce que:

$$p(M \cap C) = p(M) + p(C) - p(M \cup C) = 0{,}55 + 0{,}40 - 0{,}75 = 0{,}20$$
$$p(C \cap \bar{M}) = p(C - M) = p(C) - p(C \cap M) = 0{,}40 - 0{,}20 = 0{,}20$$

Ejercicio 5. *Se supone que el precio de un kilo de patatas en una cierta región se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 10 céntimos de euro. Una muestra aleatoria simple de tamaño 256 proporciona un precio medio del kilo de patatas igual a 19 céntimos de euro.*

- ◇ *Determínese un intervalo de confianza del* 97 % *para el precio medio de un kilo de patatas en la región.*
- ◇ *Se desea aumentar el nivel de confianza al* 99 % *sin aumentar el error en la estimación. ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse?*

Solución:

◇ Si $c = 97\,\%$:

$$p\left(-z_c < z < z_c\right) = 0{,}97 \quad \Longrightarrow \quad p(z < z_c) = 0{,}985 \quad \Longrightarrow \quad z_c = 2{,}17$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - \frac{z_c \sigma}{\sqrt{N}} \ , \ \bar{x} + \frac{z_c \sigma}{\sqrt{N}}\right)$$

Con los datos del problema $\bar{x} = 19$, $\sigma = 10$, $N = 256$ y $z_c = 2{,}17$. Sustituyendo obtenemos el intervalo:

$$(17{,}644 \ ; \ 20,356)$$

◇ El error en la estimación anterior es

$$E = \frac{z_c \sigma}{\sqrt{N}} = \frac{2{,}17 \cdot 10}{\sqrt{2576}} = 1{,}356$$

Si queremos mantener el mismo error aumentando el nivel de confianza al 99 % (es decir $z_c = 2{,}575$) tenemos que:

$$1{,}356 = \frac{2{,}575 \cdot 10}{\sqrt{N}} \quad \Longrightarrow \quad N = \left(\frac{2{,}575 \cdot 10}{1{,}356}\right)^2 = 360{,}61$$

Por consiguiente el tamaño mínimo debe ser 362.

---

z	0.00	0.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998