# Matemáticas Aplicadas II. Curso 2010-2011.
# Exámenes

# 1. Matrices y determinantes

**Ejercicio 1A.** *De las siguientes afirmaciones señalar las que sean verdaderas:*

1. *Para multiplicar dos matrices el número de filas de la primera debe ser igual al número de columnas de la segunda.*
2. *Una fila de ceros es combinación lineal de cualquier otra fila.*
3. *El producto de los elementos de una fila por los adjuntos de otra es igual a cero.*
4. *La matriz unidad es una matriz triangular.*
5. *El determinante de una matriz es cero si sus columnas son independientes.*
6. *El número de columnas independientes es igual al número de filas independientes.*
7. *Si el determinante de una matriz $3 \times 3$ es cero, el rango de la matriz es 2.*
8. *Para calcular un determinante $4 \times 4$ se aplica la regla de Sarrus.*
9. *Si a una fila se le suman las restantes, el determinante no varía.*
10. *Si una matriz se multiplica por un número, su determinante queda multiplicado por ese número.*

**Solución:**

Son verdaderas las afirmaciones 2, 3, 4, 6 y 9.

---

**Ejercicio 2A.** *Dada la matriz*

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

*Calcular $A^2$.*

**Solución:**

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

---

**Ejercicio 3A.** *Calcular la matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ a partir de la definición.*

**Solución;**

Planteamos la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ = 0 & 1 \end{bmatrix}$$

equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 7x - 4z = 1 \\ 7y - 4t = 0 \\ -5x + 3z = 0 \\ -5y + 3t = 1 \end{cases}$$

que tiene como solución $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ y $t = 7$, de modo que la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

---

**Ejercicio 4A.** *Calcular el determinante:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 & 2 \\ -4 & 1 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -3 \\ 9 & -8 & 8 & -5 \end{vmatrix}$$

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 & 2 \\ -4 & 1 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -3 \\ 9 & -8 & 8 & -5 \end{vmatrix} \underset{F_1 \to F_1 + 3F_2}{=} \begin{vmatrix} -10 & 0 & 24 & 2 \\ -4 & 1 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -3 \\ 9 & -8 & 8 & -5 \end{vmatrix} \underset{F_4 \to F_4 + 8F_2}{=} \begin{vmatrix} -10 & 0 & 24 & 2 \\ -4 & 1 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -3 \\ -23 & 0 & 88 & -5 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la segunda columna, el determinante es igual a:

$$\begin{vmatrix} -10 & 24 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ -23 & 88 & -5 \end{vmatrix} = 400$$

---

**Ejercicio 5A.** *Resolver la ecuación*

$$\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ 3 & x & 1 \\ x+1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

**Solución:**

Calculamos el determinante;

$$\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ 3 & x & 1 \\ x+1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2x^2 + 3(x+1) + 3 + x(x+1) + x + 18 = -x^2 + 5x + 24$$

resolvemos la ecuación:

$$-x^2 + 5x + 24 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 5x - 24 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 8 \\ x = -3 \end{cases}$$

---

**Ejercicio 1B.** *Dada la matriz*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -4 \\ 4 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

*Calcular* $A^2$.

**Solución:**

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -4 \\ 4 & -3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -4 \\ 4 & -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & -4 \\ -41 & 33 & 28 \\ -31 & 25 & 21 \end{bmatrix}$$

---

**Ejercicio 2B.** *De las siguientes afirmaciones señalar las que sean verdaderas:*

1. *Una fila de ceros es combinación lineal de cualquier otra fila.*
2. *El número de columnas independientes es igual al número de filas independientes.*
3. *Para multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda.*
4. *El determinante de una matriz es cero si sus columnas son independientes.*
5. *El producto de los elementos de una fila por los adjuntos de otra es igual a cero.*
6. *Si el determinante de una matriz* $3 \times 3$ *es distinto de cero, el rango de la matriz es* 3.
7. *Para calcular un determinante* $4 \times 4$ *se aplica la regla de Sarrus.*
8. *Si una matriz se multiplica por un número, su determinante queda multiplicado por ese número.*
9. *Si a una fila se le restan las demás, el determinante no varía.*
10. *La matriz unidad es una matriz triangular.*

**Solución:**

Son verdaderas las afirmaciones 1, 2, 3, 5, 6, 9 y 10.

---

**Ejercicio 3B.** *Calcular la matriz inversa de* $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ *a partir de la definición.*

**Solución:**

Planteamos la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ = 0 & 1 \end{bmatrix}$$

equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -3x + 5z = 1 \\ -3y + 5t = 0 \\ 4x - 7z = 0 \\ 4y - 7t = 1 \end{cases}$$

que tiene como solución $x = -7$, $y = -5$, $z = -4$ y $t = -3$, de modo que la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

---

**Ejercicio 4B.** *Calcular el determinante:*

$$\begin{vmatrix} -6 & 10 & -1 & 8 \\ -3 & 1 & 0 & -8 \\ 2 & 0 & -3 & -5 \\ 2 & -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} -6 & 10 & -1 & 8 \\ -3 & 1 & 0 & -8 \\ 2 & 0 & -3 & -5 \\ 2 & -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \underset{C_1 \to C_1 + 3C_2}{=} \begin{vmatrix} 24 & 10 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 2 & 0 & -3 & -5 \\ -10 & -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \underset{C_4 \to C_4 + 8C_2}{=} \begin{vmatrix} 24 & 10 & -1 & 88 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & -5 \\ -10 & -4 & 5 & -23 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la segunda fila, el determinante es igual a:

$$\begin{vmatrix} 24 & -1 & 88 \\ 2 & -3 & -5 \\ -10 & 5 & -23 \end{vmatrix} = 400$$

---

**Ejercicio 5B.** *Resolver la ecuación*

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -1 \\ x & 3 & x+1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

**Solución:**

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -1 \\ x & 3 & x+1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 - x(x+1) - x - 3 - 3(x+1) + 2x^2 = x^2 - 5x - 24$$

resolvemos la ecuación:

$$x^2 - 5x - 24 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 8 \\ x = -3 \end{cases}$$

---

## 2. Segundo examen de matrices y determinantes

**Ejercicio 1A.** *Calcular el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{F_2 \to F_2 - F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{F_3 \to F_3 - 2F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera columna, el determinante es igual a

$$\begin{vmatrix} -5 & -5 & -5 \\ -3 & -4 & -12 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & -12 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{F_3 \to F_3 - F_1}{=} (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-5) \cdot (-1) = 5$$

---

**Ejercicio 2A.** *De las siguientes afirmaciones señalar las que sean verdaderas:*

1. *Si el determinante es cero, la matriz no tiene inversa.*
2. *Si una matriz* $3 \times 3$ *tiene rango 2, su determinante es cero.*
3. *La inversa de la matriz unidad es la matriz unidad.*
4. *Si* $A$ *es una matriz* $4 \times 2$ *y* $B$ *es* $3 \times 4$ *podemos hacer el producto* $BA$.
5. *Si se intercambian dos filas de un determinante, el valor del determinante no cambia.*
6. *Si se multiplica una fila de un determinante por* $3$*, el determinante queda multiplicado por* $3$.
7. *Si multiplicamos una matriz por su inversa, el resultado es la matriz cero.*
8. *Podemos calcular el valor de un determinante multiplicando los elementos de la diagonal por sus adjuntos.*
9. *En algunas matrices* $4 \times 3$*, las cuatro filas son independientes.*
10. *El determinante de la matriz unidad es igual al orden del determinante.*

**Solución:**

Son ciertas las afirmaciones 1, 2, 3, 4 y 6.

---

**Ejercicio 3A.** *Resuelve la ecuación matricial* $AX - B = C$ *siendo:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

**Solución:**

Despejamos la matriz $X$:

$$AX - B = C \quad \Longrightarrow \quad AX = B + C \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1}(B + C)$$

Calculamos la matriz inversa de $A$:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \qquad \text{adj}A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \qquad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Operando:

$$X = A^{-1}(B+C) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}\right)$$

Haciendo operaciones resulta:

$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 & -5 & -4 \\ -2 & -7 & -4 \\ -2 & 13 & 8 \end{bmatrix}$$

---

**Ejercicio 4A.** *Estudia según los valores de $a$ el rango de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2a & 2a \\ 3 & 3 & a+2 \end{bmatrix}$$

**Solución:**

Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2a & 2a \\ 3 & 3 & a+2 \end{vmatrix} = -4a^2 + 8a - 4$$

El determinante será cero cuando se cumpla que:

$$-4a^2 + 8a - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4a^2 - 8a + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a^2 - 2a + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 1$$

Entonces:

- Cuando $a \neq 1$ el determinante de la matriz será distinto de cero. El rango sera entonces 3 que es el orden del determinante.
- Si $a = 1$, tenemos la matriz

  $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

  cuyo rango es 1 pues claramente la segunda y tercera filas son combinación lineal de la primera y sólo hay una fila dependiente.

---

**Ejercicio 5A.** *Calcula los valores de $a$ para los que la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 3 & -1 & 3 \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

*no tiene inversa. Calcula la inversa de esta matriz para $a = 0$.*

**Solución:**

◇ La matriz no tiene inversa cuando su determinante es cero, es decir cuando se cumple que:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 3 & -1 & 3 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando el determinante, esta ecuación se reduce a:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 3 & -1 & 3 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = 4a^2 - 9a + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Por consiguiente, la matriz inversa no existe para $a = 1$ y $a = \frac{5}{4}$

◇ Para $a = 0$ la matriz es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculemos la inversa:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5; \qquad \mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 5 \end{bmatrix}; \qquad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -6 \\ -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

---

**Ejercicio 1B.** *Calcular el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{F_2 \to F_2 - F_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{F_1 \to F_1 - 2F_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & -2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera columna, el determinante es igual a:

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{F_3 \to F_3 - F_2}{=} \begin{vmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

---

**Ejercicio 2B.** *Resuelve la ecuación matricial $AX + B = C$ siendo:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

**Solución:**

Despejamos $X$:

$$AX + B = C \quad \Longrightarrow \quad AX = C - B \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

Calculamos $A^{-1}$:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; \qquad \mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Haciendo operaciones:

$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -44 & -36 & -56 \\ 38 & 29 & 48 \\ 24 & 20 & 32 \end{bmatrix}$$

---

**Ejercicio 3B.** *De las siguientes afirmaciones señalar las que sean verdaderas:*

1. *El determinante de la matriz unidad es igual al orden del determinante.*
2. *La inversa de la matriz unidad es la matriz unidad.*
3. *Si $A$ es una matriz $4 \times 2$ y $B$ es $3 \times 4$ podemos hacer el producto $BA$.*
4. *Si una matriz $3 \times 3$ tiene rango 2, su determinante es cero.*
5. *Si el determinante es cero, la matriz no tiene inversa.*
6. *Si multiplicamos una matriz por su inversa, el resultado es la matriz cero.*
7. *Si se multiplica una fila de un determinante por 3, el determinante queda multiplicado por 3.*
8. *En algunas matrices $4 \times 3$, las cuatro filas son independientes.*
9. *Si se intercambian dos filas de un determinante, el valor del determinante no cambia.*

**Solución:**

Son verdaderas las afirmaciones 2, 3, 4, 5 y 7.

---

**Ejercicio 4B.** *Estudia según los valores de $a$ el rango de la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2a & 3 \\ a & 2a & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

**Solución:**

Calculamos el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2a & 3 \\ a & 2a & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4a^2 + 8a - 4$$

El determinante es cero para:

$$-4a^2 + 8a - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4a^2 - 8a + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 1$$

Pueden darse los siguientes casos:

- Para $a \neq 1$ el determinante es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Para $a = 1$ la matriz es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Evidentemente las filas segunda y tercera son combinación lineal de la primera. Solamente hay una fila independiente de forma que el rango de la matriz es 1.

---

**Ejercicio 5B.** *Calcula los valores de a para los que la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & a \\ a & -1 & -2 \\ a & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

*no tiene inversa. Calcula la inversa de esta matriz para $a = 0$.*

**Solución:**

- La matriz no tiene inversa cuando el determinante es cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ a & -1 & -2 \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4a^2 - 9a + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{5}{4} \end{cases}$$

  No existe la matriz inversa para $a = 1$ ni para $a = \frac{5}{4}$.

- Para $a = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5; \qquad \text{adj}A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ -6 & 2 & -1 \end{bmatrix}; \qquad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

---

# 3. Sistemas de ecuaciones

**Ejercicio 1**.(2 puntos) *Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:*

1. *Los sistemas de Cramer son siempre compatibles,*
2. *Si el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas el sistema es indeterminado.*
3. *Todos los sistemas homogéneos determinados tienen la misma solución.*
4. *Si el rango de la matriz ampliada es menor que el de la matriz de coeficientes, el sistema es incompatible.*
5. *Los sistemas de Cramer tienen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.*
6. *Para que un sistema sea compatible las matrices de coeficientes y ampliada deben tener el mismo rango.*
7. *En un sistema incompatible el rango de la matriz ampliada es mayor que el número de incógnitas.*
8. *En un sistema compatible indeterminado el número de parámetros es igual al rango de la matriz de coeficientes menos el número de incógnitas.*
9. *Si se intenta resolver por la regla de Cramer un sistema indeterminado con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, todos los determinantes resultan ser cero.*
10. *En un sistema compatible indeterminado el rango de la matriz ampliada es mayor que el rango de la matriz de coeficientes.*

**Solución:**

Son ciertas las afirmaciones 1, 3, 5, 6 y 9.

---

**Ejercicio 2.** (4 puntos) *Se considera el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} (m+2)x + (m-1)y - z &= 3 \\ mx - \quad y + z &= 2 \\ x + \quad my - z &= 1 \end{aligned}$$

1. *Discutirlo para los distintos valores de $m$.*
2. *Resolverlo para $m = 1$.*

**Solución:**

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - m = m(-m-1)$$

El determinante se hace cero para $m = 0$ y $m = -1$. Pueden distinguirse los siguientes casos:

- ⋄ $m \neq 0$ y $m \neq -1$. En este caso el rango de las dos matrices, la matriz de coeficientes y la matriz ampliada, es igual a 3. El sistema es compatible determinado.

- Si $m = 0$ el rango de las matrices es:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{rango } A^* = \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se ha suprimido la tercera columna puesto que sabemos que entre las tres primeras sólo hay dos independientes y las dos primeras lo son. Calculamos el determinante de esta matriz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Por consiguiente, el rango de la matriz ampliada $A^*$ es 3, distinto del rango de la matriz $A$. El sistema es incompatible.

- Hacemos lo mismo para $m = -1$:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{rango } A^* = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde hemos suprimido la tercera columna por la misma razón que en el caso anterior. Calculamos este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3 mayor que el rango de la matriz de coeficientes. El sistema es incompatible.

Vamos a resolver ahora el sistema para $m = 1$. El sistema es compatible determinado y podemos aplicar la regla de Cramer. Para $m = 1$ el determinante de la matriz de coeficientes es $-2$ así que:

$$x = \frac{1}{-2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{-2} \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$z = \frac{1}{-2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

---

**Ejercicio 3.** (4 puntos) *Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real $k$:*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + \phantom{3}z &= 0 \\ x - ky - 3z &= 0 \\ 5x + 2y - \phantom{3}z &= 0 \end{aligned}$$

*Se pide:*

1. *Discutir el sistema para los distintos valores de $k$.*
2. *Resolver el sistema en los casos en los que sea posible.*

**Solución:**

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -k & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7k + 56$$

Por consiguiente, el determinante es cero cuando $7k + 56 = 0$, o sea, cuando $k = -8$.

Podemos distinguir los siguientes casos:

- $k \neq -8$. El rango de la matriz es 3 y el sistema es compatible determinado. Su única solución es la solución trivial $(0, 0, 0)$.
- $k = -8$. El rango de la matriz es 2. Solamente hay dos ecuaciones independientes, de forma que el sistema es equivalente a:

  $$\begin{aligned} 2x - 3y + \ \ z &= 0 \\ x + 8y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

  Llamando $z = t$ el sistema puede escribirse como:

  $$\begin{aligned} 2x - 3y &= -t \\ x + 8y &= 3t \end{aligned}$$

  cuya solución es

  $$\left( \frac{t}{19} \, , \, \frac{7t}{19} \, , \, t \right)$$

  que, por las propiedades de los sistemas homogéneos, puede escribirse también como $(t, 7t, 19t)$.

# 4. Segundo examen de sistemas de ecuaciones

**Ejercicio 1.** *Estudia la compatibilidad de este sistema y resuélvelo si es posible:*

$$\begin{aligned} -x + \phantom{3}y - \phantom{1}2z &= -5 \\ x + 3y + \phantom{11}z &= -4 \\ 7x + 5y + 11z &= 8 \end{aligned}$$

**Solución:**

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 11 \end{vmatrix} = -33 - 10 + 7 + 42 + 5 - 11 = 54 - 54 = 0$$

El rango de la matriz de coeficientes es menor que 3. Puesto que claramente hay 2 columnas independientes (por ejemplo las dos primeras), el rango será 2.

Calculemos el rango de la matriz ampliada:

$$\text{rango}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \\ 7 & 5 & 11 & 8 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

donde hemos suprimido la tercera columna puesto que sabemos que, de las tres primeras, sólo hay dos independientes y las dos primeras lo son. Para obtener el rango, calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 7 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -24 - 25 - 28 + 105 - 20 - 8 = 0$$

Por consiguiente, el rango de la matriz ampliada es menor que 3 y debe ser igual a 2.

Para resolver el sistema, puesto que el rango es 2 buscamos dos ecuaciones independientes:

$$\begin{aligned} -x + \phantom{3}y - 2z &= -5 \\ x + 3y + \phantom{2}z &= -4 \end{aligned}$$

Pasamos la incógnita $z = t$ como parámetro al segundo miembro y resulta:

$$\begin{aligned} -x + \phantom{3}y &= -5 + 2t \\ x + 3y &= -4 - \phantom{2}t \end{aligned}$$

Resolvemos (por ejemplo mediante la regla de Cramer) y obtenemos:

$$x = \frac{11 - 7t}{4}; \qquad y = \frac{-9 + t}{4}; \qquad z = t$$

---

**Ejercicio 2.** *Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real $m$:*

$$\begin{aligned} mx + \phantom{m}y - \phantom{m}3z &= 5 \\ -x + \phantom{m}y + \phantom{3m}z &= -4 \\ x + my - mz &= 1 \end{aligned}$$

1. *Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro $m$.*

2. *Resuélvase el sistema para $m = 2$.*

**Solución:**

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 1 + 3m + 3 - m^2 - m = -2m^2 + 2m + 4$$

El determinante se hace cero para:

$$-2m^2 + 2m + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad m^2 - m - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$

- $m \neq 2$ y $m \neq -1$: rango $A$ = rango $A^* = 3$, sistema compatible determinado.
- $m = 2$

  El rango de la matriz de coeficientes es 2. Calculemos el rango de la matriz ampliada:

  $$\text{rango} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

  Como antes, hemos suprimido la tercera columna porque es dependiente de las dos primeras ya que el rango de la matriz de coeficientes es 2 y las dos primeras son independientes. Para calcular el rango calculamos el determinante:

  $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 10 - 4 - 5 + 1 + 16 = 0$$

  El rango de la matriz ampliada es también 2 y el sistema es compatible indeterminado (matrices del mismo rango inferior al número de incógnitas).

- $m = -1$

  Como en el caso anterior el rango de la matriz de coeficientes es 2. Calculemos el rango de la matriz ampliada:

  $$\text{rango} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  Ahora hemos suprimido la primera columna que es claramente dependiente de la primera (es igual a la primera multiplicada por menos uno). Calculamos el determinante de esta matriz:

  $$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 12 - 5 - 5 - 4 - 3 \neq 0$$

  El rango de la matriz ampliada es 3 y el de la matriz de coeficientes es 2. El sistema es incompatible.

Resolvamos el sistema para $m = 2$. El sistema es compatible indeterminado. Tomamos como ecuaciones independientes las dos primeras y pasamos la incógnita $z = t$ al segundo miembro. Así resulta:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 + 3t \\ -x + y &= -4 - t \end{aligned}$$

Resolviendo por la regla de Cramer obtenemos la solución:

$$x = \frac{9+4t}{3}; \qquad y = \frac{-3+t}{3}; \qquad z = t$$

---

**Ejercicio 3.** *Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones que depende del parámetro real p*

$$\begin{aligned} x + \phantom{2}y + \phantom{p}z &= 0 \\ -x + 2y + pz &= -3 \\ x - 2y - \phantom{p}z &= 9 \end{aligned}$$

1. *Discutir el sistema según los distintos valores de $p$.*
2. *Resolver el sistema para $p = 2$.*

**Solución:**

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & p \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 + p - 2 + 2p - 1 = 3p - 3$$

El determinante es cero para $p = 1$. Tenemos los siguientes casos:

- ⋄ $p \neq 1$. Los rangos son iguales a 3 y el sistema es compatible determinado.
- ⋄ $p = 1$

  El rango de la matriz de coeficientes es 2. El rango de la matriz ampliada es:

  $$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 9 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

  Calculamos el determinante

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 0 - 3 - 0 - 6 + 9 \neq 0$$

  El rango de la matriz ampliada es 3 y el sistema es incompatible.

Para $p = 2$ el sistema es compatible determinado. Resolviendo por Cramer se obtiene la solución $(1, -7, 6)$.

---

**Ejercicio 4.** *Un agricultor tiene repartidas sus 10 hectáreas de terreno en barbecho, cultivo de trigo y cultivo de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que en barbecho tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo de trigo y cebada. ¿Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los cultivos y cuántas están en barbecho?*

**Solución:**

Llamando:

$x$ : tierra dedicada al barbecho
$y$ : tierra dedicada al trigo
$z$ : tierra dedicada a la cebada

tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ y=z+2 \\ x=y+z-6 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene $x=2$, $y=5$, $z=3$.

---

**Ejercicio 5.** *Un estudiante ha gastado un total de* 48 *euros en la compra de una mochila, un bolígrafo y un libro. Si el precio de la mochila se redujera a la sexta parte, el del bolígrafo a la tercera parte y el del libro a la séptima parte de sus respectivos precios iniciales, el estudiante pagaría un total de* 8 *euros por ellos. Calcular el precio de la mochila, del bolígrafo y del libro, sabiendo que la mochila cuesta lo mismo que el total del bolígrafo y el libro.*

**Solución:**

Sean:

$x$ : precio de la mochila
$y$ : precio del bolígrafo
$z$ : precio del libro

Resultan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=48 \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{7}=8 \\ x=y+z \end{cases}$$

La solución es $x=24$, $y=3$, $z=21$.

---

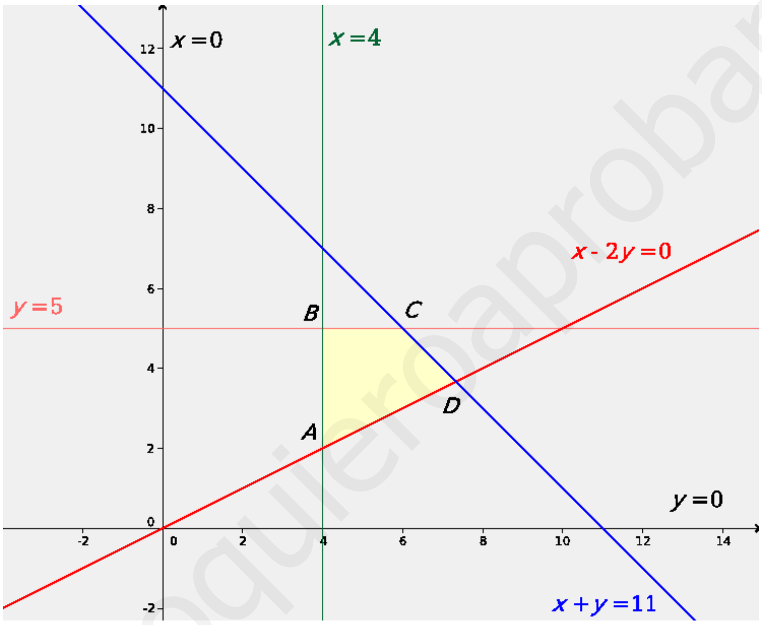
# 5. Examen de Programación Lineal

**Ejercicio 1A.** *Dibuja la región determinada por las siguientes condiciones. Señala también si existe alguna condición redundante:*

$$\begin{cases} y \leq 5 \\ x \geq 4 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + y \leq 11 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

**Solución:**

La solución del sistema de inecuaciones es la región marcada en la siguiente figura:




Los vértices de la región solución son $A(4,2)$, $B(4,5)$, $C(6,5)$ y $D\left(\frac{22}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

Son redundantes las condiciones que no son frontera de la región solución. En este caso $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

---

**Ejercicio 2A.** *Una empresa de instalaciones dispone de* 195 *kg de cobre,* 20 *kg de titanio y* 14 *kg de aluminio. Para fabricar* 100 *metros de cable de tipo* A *se necesitan* 10 *kg de cobre,* 2 *kg de titanio y* 1 *kg de aluminio. Para fabricar* 100 *metros de cable de tipo* B *se necesitan* 15 *kg de cobre,* 1 *kg de titanio y* 1 *kg de aluminio. El beneficio que obtiene la empresa por cada* 100 *metros de cable de tipo* A *fabricados es igual a 1500 euros, y por cada 100 metros de cable de tipo B es igual a 1000 euros. Calcúlense los metros de cable de cada tipo que han de fabricarse para maximizar el beneficio y determínese dicho beneficio máximo.*

**Solución:**

- ⋄ Sean:

  $x:$ cantidad de cable de tipo $A$ (en cientos de metros)

  $y:$ cantidad de cable de tipo $B$ (en cientos de metros)

La función objetivo es $F(x, y) = 1500x + 1000y$.

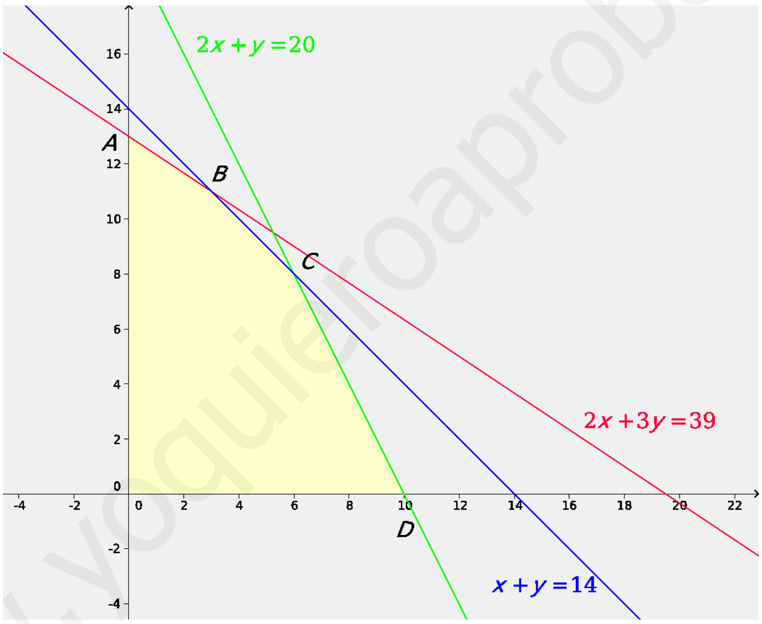
- Las restricciones son las siguientes:

$$\begin{cases} 10x + 15y \leq 195 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Que, simplificando, pueden escribirse como:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 195 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- La región factible es:




- Los vértices de la región factible son $A(0, 13$, $B(3, 11)$, $C(6, 8)$, $D(10, 0)$ y el origen de coordenadas.
- El máximo de la función objetivo se da en el vértice $C$ y vale:

$$F(6, 8) = 1500 \cdot 6 + 1000 \cdot 8 = 17000$$

---

**Ejercicio 3A.** *Una papelería quiere liquidar hasta* 78 *kg de papel reciclado y hasta* 138 *kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A y B. Los lotes A están formados por* 1 *kg del papel reciclado y* 3 *kg de papel normal y los lotes B por* 2 *kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote A es de* 0,9 *euros y el de cada lote B es de* 1 *euro. ¿Cuántos lotes A y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos?*

**Solución:**

- Sean:

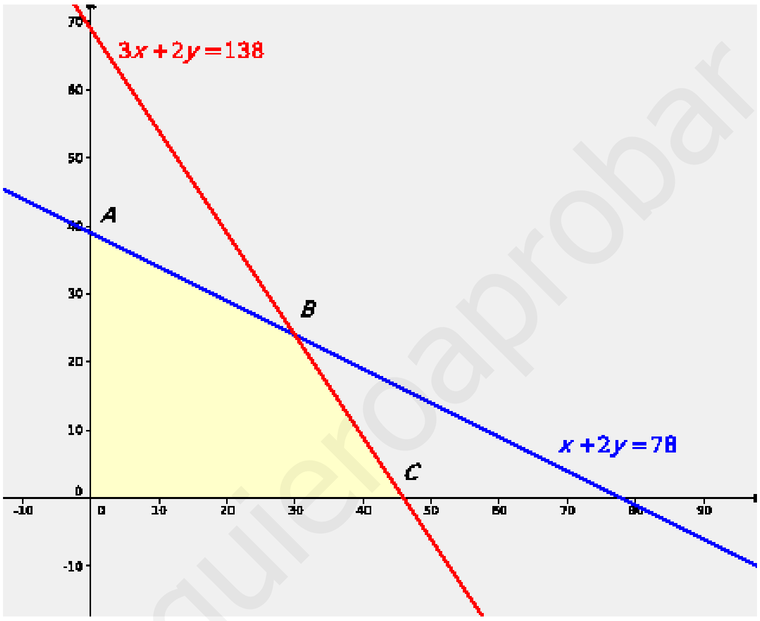
  $x:$ cantidad de lotes de tipo $A$
  $y:$ cantidad de lotes de tipo $B$

  La función objetivo es $F(x,y) = 0{,}9x + y$.

- Las restricciones son las siguientes:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 78 \\ 3x + 2y \leq 138 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- La región factible es:




- Los vértices de la región factible son $A(0,39)$, $B(30,24)$ y $C(46,0)$ aparte del origen de coordenadas.
- El máximo de la función objetivo se da en el punto $B(30,24)$ y vale:

$$F(30,24) = 0{,}9 \cdot 30 + 24 = 51$$

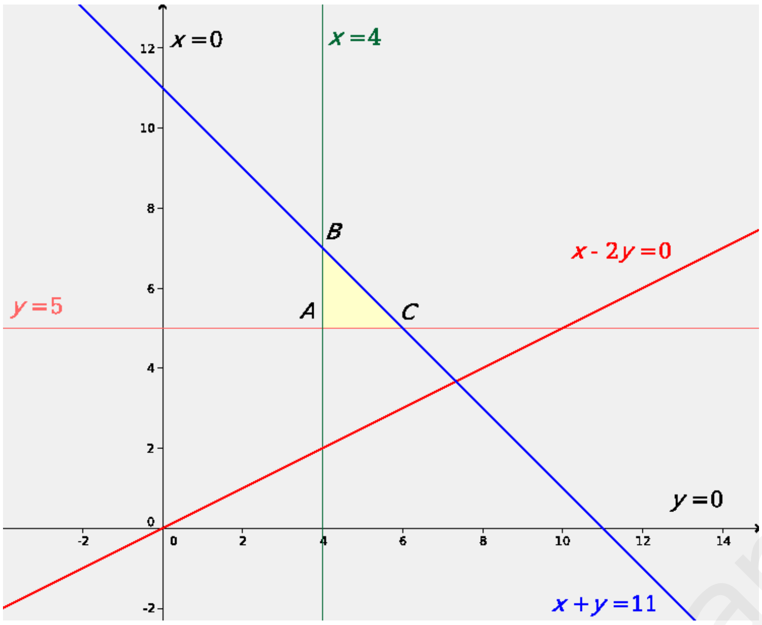
---

**Ejercicio 1B.** *Dibuja la región determinada por las siguientes condiciones. Señala también si existe alguna condición redundante:*

$$\begin{cases} y \geq 5 \\ x \geq 4 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + y \leq 11 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

**Solución:**

La solución del sistema de inecuaciones es la región marcada en la siguiente figura:




Los vértices de la región solución son $A(4,5)$, $B(4,7)$ y $C(5,6)$.

Son redundantes las condiciones que no son frontera de la región solución. En este caso $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $x - 2y \leq 0$.

---

**Ejercicio 2B.** *Una aerolínea quiere optimizar el número de filas de clase preferente y de clase turista en un avión. La longitud útil del avión para instalar las filas de asientos es de* 104 *m, necesitándose* 2 *m para instalar una fila de clase preferente y* 1,5 *m para las de clase turista. La aerolínea precisa instalar al menos* 3 *filas de clase preferente y que las filas de clase turista sean como mínimo el triple que las de clase preferente. Los beneficios por fila de clase turista son de* 152 *euros y* 206 *euros para la clase preferente.*

*¿Cuántas filas de clase preferente y cuántas de clase turista se deben instalar para obtener el beneficio máximo? Indicar dicho beneficio.*

**Solución:**

- Sean:

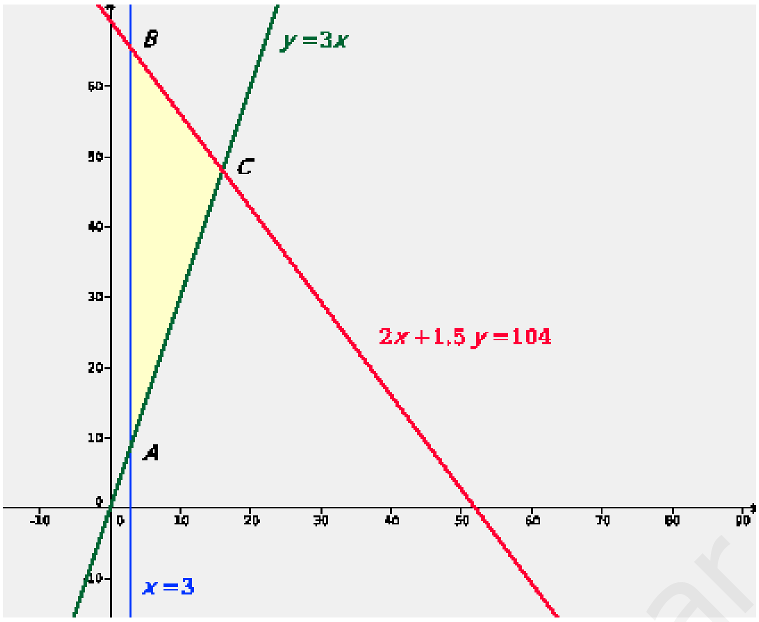
  $x$ : número de filas de asientos de clase preferente
  $y$ : número de filas de asientos de clase turista

  La función objetivo es $F(x,y) = 206x + 152y$.

- Las restricciones son las siguientes:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq 3x \\ 2x + 1{,}5y \leq 104 \end{cases}$$

- La región factible es




- ⋄ Los vértices de la región factible son $A(3,9)$, $B\left(3, \frac{196}{3}\right)$ y $C(16,48)$.
- ⋄ Los valores de la función objetivo en los vértices son:

$$F(3,9) = 206 \cdot 3 + 152 \cdot 9 = 1986$$
$$F\left(3, \frac{196}{3}\right) = 206 \cdot 3 + 152 \cdot \frac{196}{3} \simeq 10548,667$$
$$F(16,48) = 206 \cdot 16 + 152 \cdot 48 = 10592$$

La solución es 16 filas de clase preferente y 48 filas de clase turista. El beneficio en este caso es de 10592 euros.

Hay que resaltar que si el valor máximo se hubiese obtenido en el punto $B$, esta solución no sería válida pues no es posible instalar un número fraccionario de asientos. En este caso, la slución habría que buscarla, no en el vértice de la región sino en los puntos de coordenadas enteras interiores a la región.

---

**Ejercicio 3B.** *Una empresa fabrica láminas de aluminio de dos grosores finas y gruesas y dispone cada mes de* 400 *kg de alumnio y* 450 *horas de trabajo para fabricarlas. Cada metro cuadrado de lámina fina necesita* 5 *kg de aluminio y* 10 *horas de trabajo y deja una ganancia de* 45 *euros. Cada metro cuadrado de lámina gruesa necesita* 20 *kg y* 15 *horas de trabajo y deja una ganancia de 80 euros. ¿Cuántos metros cuadrados de cada tipo de lámina debe fabricar la empresa al mes para que la ganancia sea máxima, y a cuánto asciende ésta?*

**Solución:**

- ⋄ Sean:

$x$ : número de metros cuadrados de lámina fina

$y$ : número de metros cuadrados de lámina gruesa

La función objetivo es $F(x,y) = 45x + 80y$.

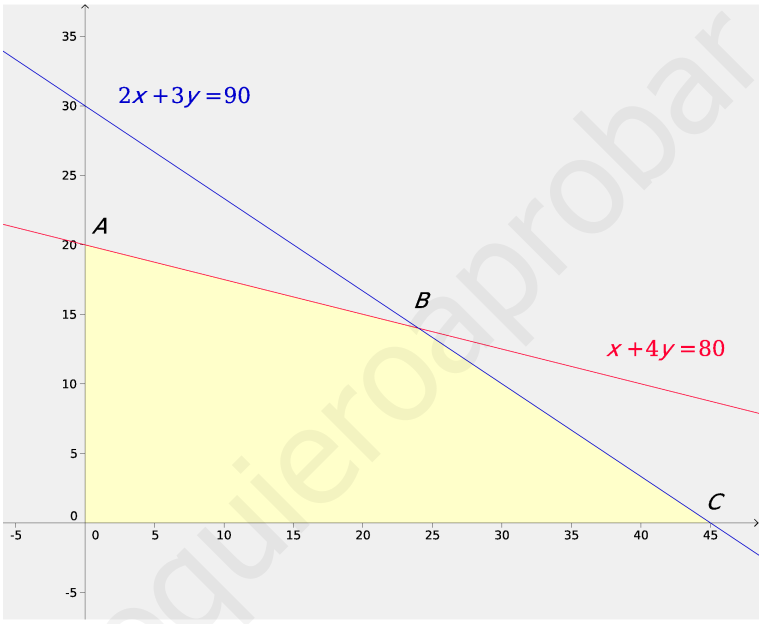
- Las restricciones son las siguientes:

$$\begin{cases} 5x + 20y \geq 400 \\ 10x + 15y \leq 450 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

o simplificando:

$$\begin{cases} x + 4y \geq 80 \\ 2x + 3y \leq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- La región factible es:




- Los vértices de la región factible son, aparte del origen de coordenadas, $A(0, 20)$, $B(24, 14)$ y $C(45, 0)$.

- El valor máximo de la función objetivo se da en el vértice $B$ y vale:

$$F(24, 14) = 45 \cdot 24 + 80 \cdot 14 = 2200$$

## 6. Segundo examen de Programación Lineal

**Ejercicio 1A.** *Disponemos de* 210000 *euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo $A$ que rinden el* 10 % *y las del tipo $B$ que rinden el* 8 %*. Decidimos invertir un máximo de* 130000 *euros en las de tipo $A$ y, como mínimo,* 60000 *euros en las de tipo $B$. Además, queremos que la inversión en las de tipo $A$ sea menor o igual que el doble de la inversión en $B$.*

*¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo beneficio anual?*

**Solución:**

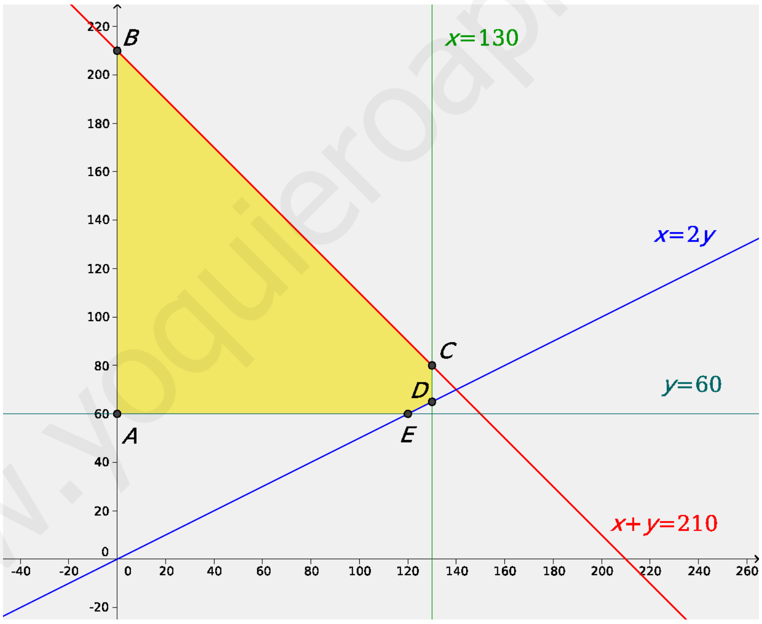
◇ Llamamos $x$ a la cantidad invertida en acciones del tipo $A$ e $y$ a la cantidad invertida en acciones de tipo $B$. La función objetivo es el beneficio que se obtiene de la inversión que será:

$$F(x, y) = 0{,}10x + 0{,}08y$$

◇ Tenemos las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 210000 \\ x \leq 130000 \\ y \geq 60000 \\ x \leq 2y \end{cases}$$

◇ Con las restricciones anteriores resulta la siguiente región factible (las cantidades se han expresado en millares):




Los vértices de la región factible son $A(0, 60000)$, $B(0, 210000)$, $C(130000, 80000)$, $D(130000, 65000)$ y $E(120000, 60000$:

◇ Los valores de la función objetivo en los vértices son los siguientes:

$$\begin{aligned} F(120000, 60000) &= 16800 \\ F(130000, 65000) &= 18200 \\ F(130000, 80000) &= 19400 \\ F(0, 210000) &= 16800 \\ F(0, 60000) &= 4800 \end{aligned}$$

de forma que el máximo beneficio se obtiene invirtiendo 130000 euros en acciones de tipo $A$ y 80000 euros en acciones de tipo $B$.

**Ejercicio 2A.** *Unos grandes almacenes desean liquidar* 200 *camisas y* 100 *pantalones de la temporada anterior. Para ello, lanzan dos ofertas $A$ y $B$. La oferta $A$ consiste en un lote de una camisa y un pantalón que se venden a* 30 *euros; la oferta $B$ consiste en un lote de tres camisas y un pantalón, que se vende a* 50 *euros. No se desea ofrecer menos de* 20 *lotes de la oferta $A$ ni menos de* 10 *de la oferta $B$.*

*¿Cuántos lotes han de vender de cada tipo para maximizar los ingresos?*

**Solución:**

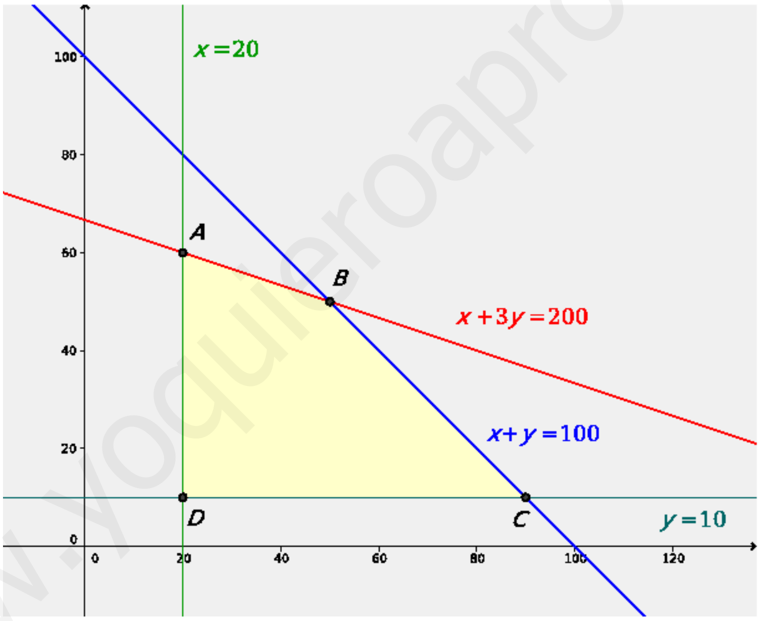
- Sea $x$ el número de lotes de tipo $A$ e $y$ el número de lotes de tipo $B$ que se venden. Los ingresos que se obtienen por la venta de estos lotes (la función objetivo) son:

$$F(x, y) = 30x + 50y$$

- Se tienen las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 200 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 20 \\ y \geq 10 \end{cases}$$

- Con estas restricciones resulta la siguiente región factible:




Los vértices de la región factible son los puntos $A(20, 60)$, $B(50, 50)$, $C(90, 10)$ y $D(20, 10)$.

- Los valores de la función objetivo en los vértices de la región:

$$F(20, 60) = 3600$$
$$F(50, 50) = 4000$$
$$F(90, 10) = 3200$$
$$F(20, 10) = 1100$$

Los máximos ingresos se producen con la venta de 50 lotes de tipo $A$ y otros 50 de tipo $B$.

**Ejercicio 1B.** *Una empresaria desea invertir los beneficios de 7500 euros obtenidos en su negocio en dos tipos de acciones $A$ y $B$.*

*El tipo $A$ produce un tipo de interés esperado del 6 % y el tipo $B$ del 4 %. Como máximo desea invertir 5000 euros en $A$ y, como mínimo, 1500 en $B$. Además, desea que la inversión en $A$ sea superior a dos veces y media la inversión en $B$.*

*¿Cómo deberá realizar la inversión para que las ganancias sean máximas?*

**Solución:**

◇ Sean:

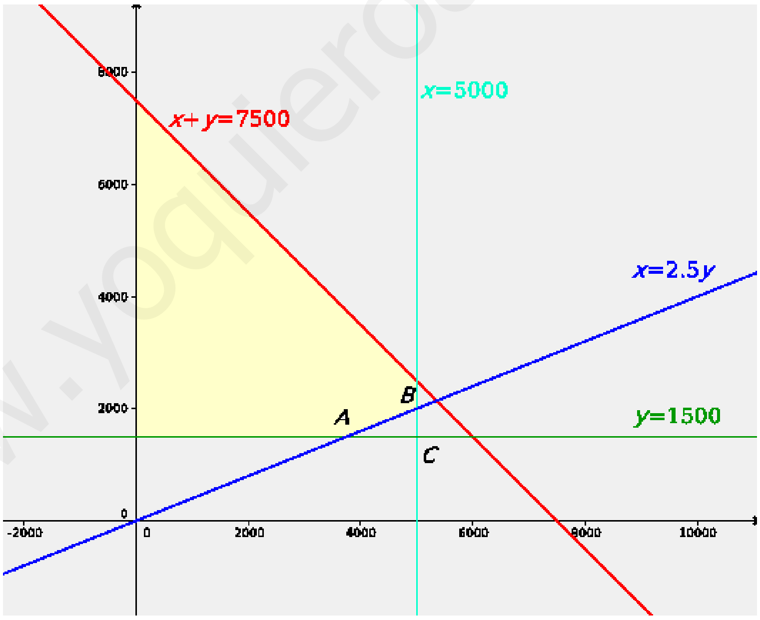
$x$ : cantidad invertida en acciones de tipo $A$
$y$ : cantidad invertida en acciones de tipo $B$

La función objetivo es $F(x, y) = 0{,}06x + 0{,}04y$.

◇ Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \leq 7500 \\ x \leq 5000 \\ y \geq 1500 \\ x \geq 2{,}5y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

◇ Con estas restricciones, la región factible es:




◇ Los vértices de la región factible son $A(3750, 1500)$, $B(5000, 2000)$ y $C(5000, 1500)$.

◇ El máximo de la función objetivo se encuentra en el punto $B(5000, 2000)$.

**Ejercicio 2B.** *Una refinería de petróleo tiene dos fuentes de crudo: ligero y pesado.*

*Cada barril de crudo ligero cuesta 70 dólares y con él la refinería produce* 0,3 *barriles de gasolina (G),* 0,2 *barriles de combustible de calefacción (C) y* 0,3 *barriles de combustible para turbinas (T). Cada barril de crudo pesado cuesta* 60 *dólares y produce* 0,3 *barriles de G,* 0,4 *barriles de C y* 0,2 *barriles de T.*

*La refinería ha contratado el suministro de* 900000 *barriles de G,* 800000 *barriles de C y* 500000 *barriles de T. Hallar las cantidades de crudo ligero y pesado que debe comprar para poder cubrir sus necesidades con un coste mínimo.*

**Solución:**

◇ Sean:

$x$ : número de barriles de crudo ligero
$y$ : número de barriles de crudo pesado

La función objetivo es $F(x,y) = 70x + 60y$.

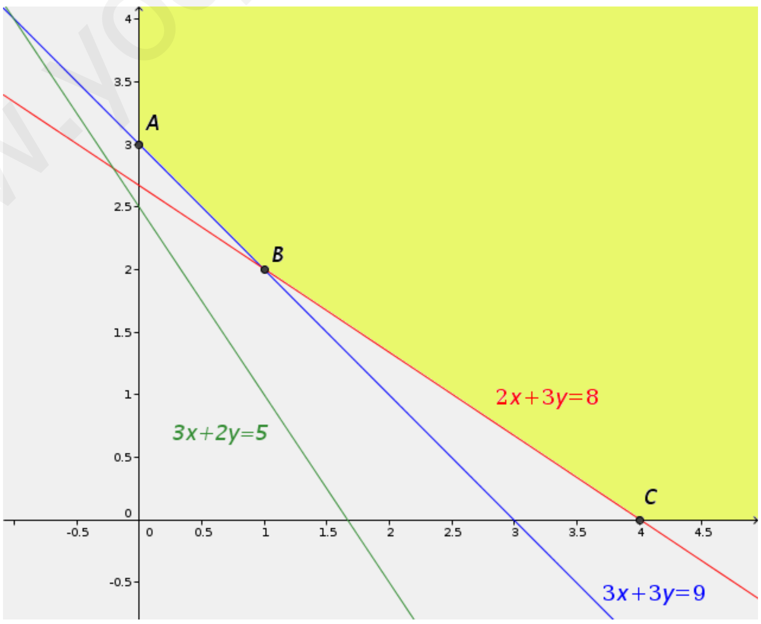
◇ Las restricciones son:

$$\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}3y \geq 900000 \\ 0{,}2x + 0{,}3y \geq 800000 \\ 0{,}3x + 0{,}2y \geq 500000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Tomando como unidad los millones de barriles, estas restricciones se pueden escribir como:

$$\begin{cases} 3x + 3y \geq 9 \\ 2x + 3y \geq 8 \\ 3x + 2y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

◇ Con estas restricciones, la región factible es:




◇ Los vértices de la región factible son $A(0,3)$, $B(1,2)$ y $C(4,0)$ (en millones de barriles).

- Los valores de la función objetivo en estos puntos son:

$$\begin{aligned} F(0,3000000) &= 60 \cdot 3000000 = 180000000 \\ F(1000000,2000000) &= 70 \cdot 1000000 + 60 \cdot 2000000 = 190000000 \\ F(4000000,0) &= 70 \cdot 4000000 = 280000000 \end{aligned}$$

El mínimo de la función se obtiene en el punto $A$. Deben comprarse 3000000 de crudo pesado y ninguno de crudo ligero.

# 7. Examen de probabilidad

**Ejercicio 1.** *Una bolsa contiene diez monedas equilibradas. Cinco de dichas monedas tienen cara y cruz, otras tres son monedas con dos caras y las dos restantes son monedas con dos cruces. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza.*

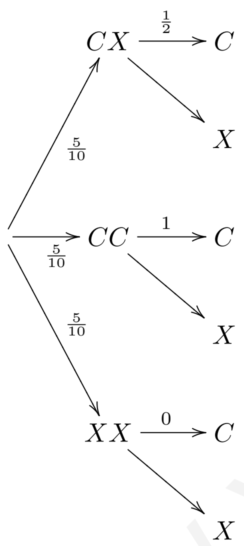
1. *Calcúlese la probabilidad de que salga cara en dicho lanzamiento.*
2. *Si el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida tenga cara y cruz?*

**Solución:**

Llamamos a los sucesos

$$\begin{aligned} C &= \text{obtener cara en el lanzamiento} \\ CX &= \text{elegir una moneda con cara y cruz} \\ CC &= \text{elegir una moneda con dos caras} \\ XX &= \text{elegir una moneda con dos cruces} \end{aligned}$$

El problema responde al siguiente esquema:




- ⋄ La probabilidad de sacar cara es:

$$p(C) = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{2}{10} \cdot 0 = \frac{11}{20}$$

- ⋄ Supuesto que se ha obtenido cara, la probabilidad de que la moneda elegida tuviese cara y cruz es:

$$p(CX|C) = \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{20}} = \frac{5}{11}$$

**Ejercicio 2.** *Sean $A$ y $B$ dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $p(A) = 0{,}5$, $p(B) = 0{,}4$ y $p(A \cap B) = 0{,}1$. Calcúlense cada una de las siguientes probabilidades:*

1. $p(A \cup B)$
2. $p(\bar{A} \cup \bar{B})$
3. $p(A|B)$
4. $p(\bar{A}|B)$

**Solución:**

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}8$
- $p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$
- $p(A|B) = \dfrac{p(A \cap B}{p(B)} = \dfrac{0,1}{0{,}4} = \dfrac{1}{4}$
- $p(\bar{A}|B) = \dfrac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(B - A)}{p(B)} = \dfrac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0{,}4 - 0{,}1}{0{,}4} = \dfrac{3}{4}$

---

**Ejercicio 3.** *Sean $A$ y $B$ dos sucesos de un experimento aleatorio tales que la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente es igual a $\frac{1}{6}$ y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es igual a $\frac{7}{12}$. Se sabe además que $p(A|B) = \frac{1}{2}$.*

1. *Calcúlese la probabilidad de que ocurra $A$ o $B$.*
2. *Calcúlese la probabilidad de que ocurra $A$.*

**Solución:**

- Conocemos $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$ y $p(\bar{A} \cap \bar{B} = \frac{7}{12}$: De esta última probabilidad de deducimos que:

$$p(\bar{A} \cap \bar{B} = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = \frac{7}{12} \quad \Longrightarrow \quad p(A \cup B) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

- Calculemos primero la probabilidad de $B$:

$$p(A|B) = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad p(B) = \frac{p(A \cap B)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

---

**Ejercicio 4.** *En una cierta población, la probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a $0{,}2$. Entre los habitantes que siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a $0{,}6$.*

*Entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a $0{,}3$.*

*Se elige al azar un habitante de la población.*

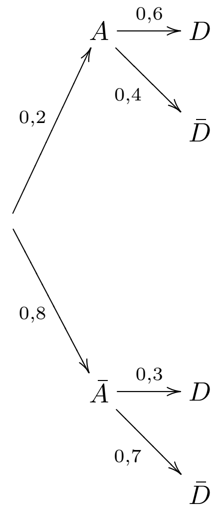
1. *Calcúlese la probabilidad de que practique deporte regularmente.*
2. *Si se sabe que dicho habitante practica deporte regularmente, ¿cual es la probabilidad de que esté siguiendo una dieta de adelgazamiento?*

**Solución:**

Llamemos:

$A$: el habitante elegido sigue una dieta de adelgazamiento.
$D$: el habitante elegido paractica deporte.

Los datos del problema aparecen reflejados en el siguiente esquema:




Entonces:

- ⋄ $p(D) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}36$
- ⋄ $p(A|D) = \dfrac{p(A \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}6}{0{,}36} = \dfrac{1}{3}$

# 8. Segundo examen de probabilidad

**Ejercicio 1.** *Se lanzan tres dados. Calcular la probabilidad de:*

1. *Obtener tres cincos.*
2. *Obtener algún cinco.*
3. *Obtener exactamente dos cincos.*

**Solución:**

- La probabilidad de obtener tres cincos se obtiene por la regla del producto:

$$p(555) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

- El suceso 'obtener algún cinco' es el contrario de 'no obtener ningún cinco'. Por tanto:

$$p(\bar{5}\bar{5}\bar{5}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

  Entonces:

$$p(\text{obtener algún cinco}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

- Dos cincos pueden obtenerse de tres maneras distintas $55\bar{5}$, $5\bar{5}5$ o $\bar{5}55$, donde el primer número corresponde al primer dado, el segundo al segundo dado y el tercero a tercer dado. La probabilidad de obtener cinco en los dos primeros dados y otro resultado en el tercero es:

$$p(55\bar{5}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$$

  y de aquí:

$$p(\text{exactamente dos cincos}) = p(55\bar{5} \cup 5\bar{5}5 \cup \bar{5}55) = 3 \cdot \frac{5}{216} = \frac{15}{216}$$

---

**Ejercicio 2.** *Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento tres cartas de una baraja de 40 cartas. Calcular la probabilidad de que:*

1. *Las tres sean espadas.*
2. *Salga alguna carta de espadas.*
3. *Salgan exactamente dos cartas de espadas.*

**Solución:**

Como en el problema anterior:

- $p(EEE) = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{9}{39} \cdot \dfrac{8}{38}$
- $p(\text{alguna espada}) = 1 - p(\bar{E}\bar{E}\bar{E}) = 1 - \dfrac{30}{40} \cdot \dfrac{29}{39} \cdot \dfrac{28}{38} = 1 - \dfrac{203}{494} = \dfrac{291}{494}$
- $p(\text{exactamente dos espadas}) = 3 \cdot \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{9}{39} \cdot \dfrac{30}{38} = \dfrac{135}{988}$

**Ejercicio 3.** *La probabilidad de que a un habitante de un cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a* 0,60*; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a* 0,35 *y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a* 0,25*. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste:*

1. *Al menos uno de los dos tipos de música.*
2. *La música clásica y también la música moderna.*
3. *Sólo la música clásica.*
4. *Sólo la música moderna.*

**Solución:**

Llamemos:

$C$: al habitante elegido le gusta la música clásica
$M$: al habitante elegido le gusta la música moderna

Tenemos los siguientes datos: $p(M) = 0{,}60$, $p(C) = 0{,}35$ y $p(\bar{C} \cap \bar{M}) = 0{,}25$.

- ⋄ $p(\bar{C} \cap \bar{M}) = 0{,}25 \implies p(\overline{C \cup M}) = 0{,}25 \implies p(C \cup M) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$
- ⋄ $p(C \cap M) = p(C) + p(M) - p(C \cup M) = 0{,}35 + 0{,}60 - 0{,}75 = 0{,}20$
- ⋄ $p(C \cap \bar{M}) = p(C - M) = p(C) - p(C \cap M) = 0{,}35 - 0{,}20 = 0{,}15$
- ⋄ $p(M \cap \bar{C}) = p(M - C) = p(M) - p(C \cap M) = 0{,}60 - 0{,}20 = 0{,}40$

---

**Ejercicio 4.** *Sean $A$ y $B$ dos sucesos tales que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(\bar{B}) = \frac{2}{5}$ y $p(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$. Calcular:*

1. $p(B|A)$
2. $p(\bar{A}|B)$

**Solución:**

$$p(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4} \implies p(\overline{A \cap B}) = \frac{3}{4} \implies p(A \cap B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

- ⋄ $p(B|A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$
- ⋄ $p(\bar{A}|B) = \dfrac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(B - A)}{p(B)} = \dfrac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{\frac{2}{5} - \frac{1}{4}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{3}{8}$

---

**Ejercicio 5.** *Se dispone de la siguiente información referente a dos sucesos $A$ y $B$:*

$$p(A) = 0{,}6, \quad p(B) = 0{,}2, \quad p(A \cap B) = 0{,}12$$

1. *Calcular las probabilidades de los sucesos $A \cup B$ y $A|A \cup B$.*
2. *¿Son $A$ y $B$ incompatibles? ¿Son independientes?*

**Solución:**

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}2 - 0{,}12 = 0{,}68$$

$$p(A|A \cup B) = \frac{p(A \cap (A \cup B))}{p(A \cup B)} = \frac{p(A)}{p(A \cup B)} = \frac{0{,}6}{0{,}68} = \frac{3}{34}$$

Los sucesos $A$ y $B$ no son incompatibles puesto que $p(A \cap B)$ es distinto de cero. Son independientes puesto que:

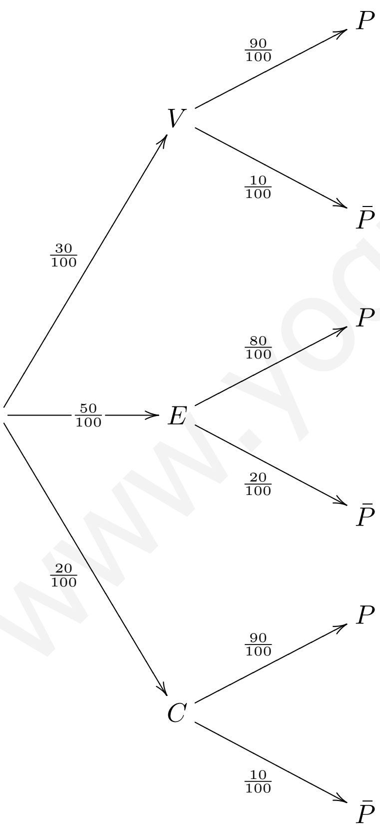
$$p(A) \cdot p(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12 = p(A \cap B)$$

---

**Ejercicio 6.** *En un cierto banco el 30 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a empresas y el 20 % son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10 % resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20 % y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el 10 %.*

1. *Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado.*
2. *¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?*

**Solución:**




$$p(P) = \frac{30}{100} \cdot \frac{90}{100} + \frac{50}{100} \cdot \frac{80}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{90}{100} = \frac{85}{100}$$

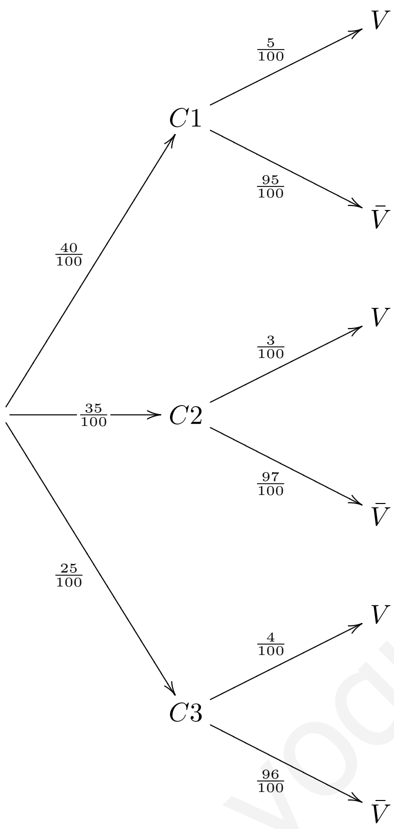
$$p(C|P) = \frac{p(C \cap P)}{p(P)} = \frac{\frac{20}{100} \cdot \frac{90}{100}}{\frac{85}{100}} = \frac{18}{85}$$

---

**Ejercicio 7.** *Los pianistas de la isla Sordina se forman en tres conservatorios $C1$, $C2$ y $C3$ que forman al 40 %, 35 % y 25 % de los pianistas respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5 %, 3 % y 4 % respectivamente. Se selecciona un pianista al azar:*

1. *Calcular la probabilidad de que sea virtuoso.*
2. *El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio $C1$.*

**Solución:**



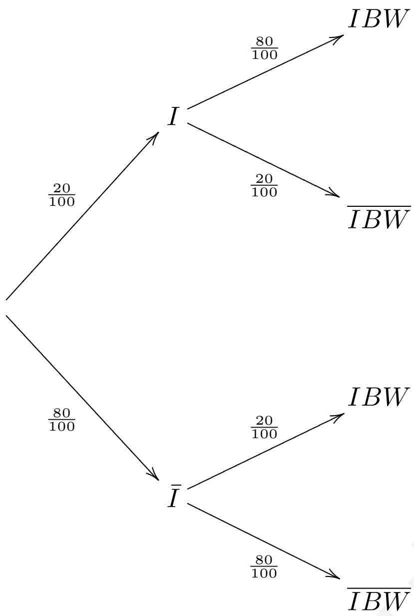

$$p(V) = \frac{40}{100} \cdot \frac{5}{100} + \frac{35}{100} \cdot \frac{3}{100} + \frac{25}{100} \cdot \frac{4}{100}$$
$$= \frac{405}{10000}$$

$$p(C1|V) = \frac{p(C1 \cap V)}{p(V)} = \frac{\frac{40}{100} \cdot \frac{5}{100}}{\frac{405}{10000}} = \frac{200}{405}$$

**Ejercicio 8.** *En un colectivo de inversores bursátiles, el 20 % realiza operaciones por internet. De los inversores que realizan operaciones por internet, un 80 % consulta infoBolsaWeb. de los inversores bursátiles que no realizan operaciones por internet sólo un 20 % consulta infoBolsaWeb. se pide:*

1. *Obtener la probabilidad de que un inversor bursátil elegido al azar en este colectivo consulte infoBolsaWeb.*
2. *Si se elige al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta infoBolsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por internet?*

**Solución:**




$$p(IBW) = \frac{20}{100} \cdot \frac{80}{100} + \frac{80}{100} \cdot \frac{20}{100} = \frac{32}{100}$$

$$p(I|IBW) = \frac{p(I \cap IBW)}{p(IBW)} = \frac{\frac{20}{100} \cdot \frac{80}{100}}{\frac{32}{100}} = \frac{50}{100}$$

# 9. Estadística

**Ejercicio 1.**

1. *La edad de un determinado grupo de personas sigue una distribución $N(37, 9)$. Calcula la probabilidad de que una persona de ese grupo, elegido al azar, tenga más de 40 años.*
2. *La edad de los alumnos de segundo de bachillerato de cierto instituto sigue una distribución $N(17{,}8; 0{,}6)$. Los agrupamos al azar de 10 en 10 para una competición. Halla el intervalo característico del 95 % correspondiente a las edades medias de los grupos.*

**Solución:**

- $\diamond$ $p(x \geq 40) = p(z \geq \dfrac{40-35}{10}) = p(z \geq 0{,}50) = 0{,}3085$
- $\diamond$ Las medias muestrales se distribuyen de acuerdo con $N\left(17{,}6\ ;\ \frac{0{,}5}{\sqrt{10}}\right) = N(17{,}6\ ;\ 0{,}158)$: El intervalo característico es:

$$(17{,}6 - 1{,}96 \cdot 0{,}158\ ;\ 17{,}6 + 1{,}96 \cdot 0{,}158) = (17{,}2903\ ;\ 17{,}9097)$$

---

**Ejercicio 2.** *En una determinada empresa, se seleccionó al azar una muestra de 100 empleados cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 705 euros, con una desviación típica de 120 euros. Halla un intervalo de confianza al 99 % para la media de los ingresos mensuales de todos los empleados de la empresa.?*

**Solución:**

Los datos son $\bar{x} = 705$, $c = 0{,}99$, $\sigma = 120$, $N = 100$. Con estos datos, el intervalo de confianza es:

$$\left(705 - 2{,}575\frac{120}{\sqrt{100}}\ ;\ 705 + 2{,}575\frac{120}{\sqrt{100}}\right) = (674{,}10\ ;\ 735{,}90)$$

---

**Ejercicio 3.** *La duración de un lavavajillas sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,5 años. ¿Cuántos lavavajillas tenemos que seleccionar en la muestra si queremos que la media muestral no difiera en más de 0,25 años de la media de la población. con un nivel de confianza del 90 %?*

**Solución:**

El error en la estimación debe ser menor que 0,25. Esto significa queda

$$E = \frac{z_c\sigma}{\sqrt{N}} \leq 0{,}25 \quad \Longrightarrow \quad N \geq \left(\frac{z_c\sigma}{0{,}25}\right)^2 = \left(\frac{1{,}645 \cdot 0{,}5}{0{,}25}\right)^2 = 10{,}82$$

Por consiguiente, puesto que el tamaño de la muestra debe ser entero, $N \geq 11$.

---

**Ejercicio 4.** *Un fabricante de lámparas de bajo consumo sabe que el tiempo de duración, en horas, de las lámparas que fabrica sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica* 180 *horas. Con una muestra de dichas lámparas elegida a azar y con un nivel de confianza del* 97 %*, obtuvo para la media el intervalo de confianza* $(10072,1; 10127,9)$*. Si se quiere que el error de su estimación sea como máximo de 24 horas y se utiliza una muestra de tamaño* 225*, ¿cuál será entonces el nivel de confianza?*

**Solución:**

Puesto que el error en la estimación debe ser menor que 24, debe cumplirse que:

$$E = \frac{z_c \sigma}{\sqrt{N}} = \frac{z_c \cdot 180}{15} \leq 24 \qquad \Longrightarrow \qquad z_c \leq \frac{24 \cdot 15}{180} = 2$$

Por consiguiente:

$$c \leq p(-2 \leq z \leq 2) = 0{,}9772 - 0{,}0228 = 0{,}9544$$

---

**Ejercicio 5.** *La proporción de vecinos de cierta localidad que está a favor de la gestión económica del ayuntamiento es de* 29/50*. Halla el intervalo característico para la proporción de vecinos a favor de dicha gestión económica, en muestras de* 81 *vecinos correspondiente a una probabilidad del* 92 %*.*

**Solución:**

La proporción en la población es $p = \frac{29}{50} = 0{,}58$. Si la probabilidad es del 92 %:

$$p(z \leq z_c) = 0{,}96 \qquad \Longrightarrow \qquad z_c = 1{,}75$$

El intervalo característico es:

$$\left(p - z_c\sqrt{\frac{pq}{N}}\ ;\ p + z_c\sqrt{\frac{pq}{N}}\right)$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\left(0{,}58 - 1{,}75\sqrt{\frac{0{,}58 \cdot 0{,}42}{81}}\ ;\ 0{,}58 + 1{,}75\sqrt{\frac{0{,}58 \cdot 0{,}42}{81}}\right) = (0{,}484\ ;\ 0{,}676)$$

---

# 10. Segundo examen de Estadística

**Ejercicio 1.** *El número de días de ausencia en el trabajo de los empleados de cierta empresa para un período de seis meses, se puede aproximar mediante una distribución normal de desviación típica* 1,5 *días. Una muestra aleatoria de* 10 *empleados ha proporcionado los siguientes datos:*

5 4 6 8 7 4 2 7 6 1

- *Determinar el intervalo de confianza del* 90 % *para el número medio de días que los empleados de esa empresa han faltado durante los últimos seis meses.*
- *¿Qué tamaño debe tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea de* 0,5 *días con el mismo nivel de confianza?*

**Solución:**

- La media de los datos es 5. Así pues, $\bar{x} = 5$, $c = 0{,}90$, $z_c = 1{,}645$ y $N = 10$. El intervalo de confianza es:

$$\left(5 - 1{,}645\frac{1{,}5}{\sqrt{10}}, 5 + 1{,}645\frac{1{,}5}{\sqrt{10}}\right) = (4{,}22; 5{,}78)$$

- El error en la estimación debe ser menor que 0,5. Entonces:

$$\frac{z_c\sigma}{\sqrt{N}} \leq 0{,}5 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1{,}645 \cdot 1{,}5}{\sqrt{N}} \leq= ,5 \quad\Longrightarrow\quad N \geq \left(\frac{1{,}645 \cdot 1{,}5}{0{,}5}\right)^2 = 24{,}35$$

Por consiguiente, puesto que $N$ es entero, debe verificarse que $N \geq 25$.

---

**Ejercicio 2.** *La temperatura corporal de una cierta especie animal es una variable aleatoria que tiene una distribución normal de media* $36{,}7^o C$ *y desviación típica* $3{,}8^o C$*. se elige aleatoriamente una muestra de* 100 *ejemplares de esa especie. Hallar la probabilidad de que la temperatura corporal media de la muestra:*

- *Sea menor o igual que* $36{,}9^o C$*.*
- *Esté comprendida entre* $36{,}5^o C$ *y* $37{,}3^o C$*.*

**Solución:**

Las medias muestrales siguen la distribución normal:

$$N\left(36{,}7, \frac{3{,}8}{\sqrt{100}}\right) = N(36{,}7; 0{,}38)$$

Entonces

$$p(x \leq 36{,}9) = p\left(z \leq \frac{36{,}9 - 36{,}7}{0{,}38}\right) = p(z \leq 0{,}52) = 0{,}6985$$

$$p(36{,}5 \leq x \leq 37{,}3) = p\left(\frac{36{,}5 - 36{,}7}{0{,}38} \leq z \leq \frac{37{,}3 - 36{,}7}{0{,}38}\right) = p(-0{,}53 \leq z \leq 1{,}58) = 0{,}6448$$

---

**Ejercicio 3.** *En una encuesta se pregunta a* 10000 *personas cuántos libros lee al año, obteniéndose una media de* 5 *libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica* 2*.*

- *Hallar un intervalo de confianza al* 80 % *para la media poblacional.*
- *Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a* 0,25 *con un nivel de confianza del* 95 %*, ¿a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar?*

**Solución:**

Calculemos en primer lugar el valor de $z_c$ para $c = 0{,}80$:

$$p(-z_c \leq z \leq z_c) = 0{,}80 \quad \Longrightarrow \quad p(z \leq z_c) = 0{,}90 \quad \Longrightarrow \quad z_c = 1{,}28$$

- Puesto que $\bar{x} = 5$, $\sigma = 2$, $z_c = 1{,}28$ y $N = 10000$, el intervalo es:

$$\left(5 - 1{,}28\frac{2}{\sqrt{1000}}; 5 + 1{,}28\frac{2}{\sqrt{1000}}\right) = (4{,}97; 5{,}03)$$

- Debe ocurrir queda

$$N \geq \left(\frac{1{,}96 \cdot 2}{0,25}\right)^2 = 245{,}86 \quad \Longrightarrow \quad N \geq 246$$

---

**Ejercicio 4.** *En unas elecciones generales, el presidente del gobierno elegido por los ciudadanos ha recibido el* 45 % *de los votos. Se escoge una muestra al azar de 50 votantes.*

- *¿Cuál es la distribución que sigue la proporción de votantes que han votado al presidente del gobierno?*
- *Halla la probabilidad de que más de la mitad de los votantes de la muestra votasen al presidente.*

**Solución:**

- La proporción muestral se distribuye de acuerdo con:

$$N\left(0{,}45\,;\,\sqrt{\frac{0{,}45\cdot 0{,}55}{\sqrt{50}}}\right) = N(0{,}45\,;\,0{,}0704)$$

- La probabilidad es:

$$p(x \geq 0{,}50) = p\left(z \geq \frac{0{,}50 - 0{,}45}{0{,}0704}\right) = p(z \geq 0{,}71) = 0{,}2389$$

---

**Ejercicio 5.** *Para estimar el número de peces que hay en un pantano se procede del siguiente modo: se pescan con red una cierta cantidad de ellos, 349, se marcan y se devuelven al pantano. Al cabo de varios días, se vuelve a pescar otra cantidad y se averigua qué proporción están marcados. En esta segunda pesca se han obtenido 514 peces, de los cuales hay 37 marcados.*

- *Halla un intervalo de confianza, al* 90 %*, para la proporción de peces marcados en el pantano.*
- *Halla un intervalo de confianza, al* 90 % *para el total de peces en el pantano.*

**Solución:**

- La proporción de peces marcados en la muestra es:

$$\bar{p} = \frac{37}{514} = 0,072$$

El intervalo de confianza para la proporción es

$$\left(0{,}072 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}072 \cdot 0{,}928}{514}}\,;\, 0{,}072 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}072 \cdot 0{,}928}{514}}\right) = (0{,}053\,;\, 0{,}091)$$

◇ El intervalo que acabamos de obtener es para la proporción de peces marcados. Es decir que, para el primer extremo:

$$0{,}053 = \frac{\text{no. de peces marcados}}{\text{no. total de peces}}$$

$$\text{no. total de peces} = \frac{\text{no. de peces marcados}}{0{,}053} = \frac{349}{0{,}053} = 6585$$

De la misma forma, encontraríamos que para el otro extremo del intervalo

$$\text{no. total de peces} = \frac{349}{0{,}091} = 3835$$

Así, el intervalo de confianza para el número total de peces es $(3835\,;\, 6585)$.

# 11. Derivadas

**Ejercicio 1.** *Derivar las siguientes funciones:*

1. $y = 4x^2 - 3x + 2$
2. $y = (3x+1)^2$
3. $y = (3x^2 - 2x + 5)^2$
4. $y = \sqrt{3x+1}$
5. $y = (3x+1)\cdot(x^2 - 6x + 3)$
6. $y = \dfrac{3x^2}{4}$
7. $y = \dfrac{3x^4 + 2x - 1}{3x^2 - 1}$
8. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
9. $y = \dfrac{1}{x}$
10. $y = \sqrt[3]{x^2}$

**Solución:**

$$y = 4x^2 - 3x + 2 \qquad y' = 8x - 3$$

$$y = (3x+1)^2 \qquad y' = 2\cdot(3x+1)\cdot 3$$

$$y = (3x^2 - 2x + 5)^2 \qquad y' = 2\cdot(3x^2 - 2x + 5)\cdot(6x - 2)$$

$$y = \sqrt{3x+1} \qquad y' = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

$$y = (3x+1)\cdot(x^2 - 6x + 3) \qquad y' = 3\cdot(x^2 - 6x + 3) + (2x - 6)\cdot(3x+1)$$

$$y = \frac{3x^2}{4} \qquad y' = \frac{6x}{4}$$

$$y = \frac{3x^4 + 2x - 1}{3x^2 - 1} \qquad y' = \frac{(12x^3 + 2)(3x^2 - 1) - 6x\cdot(3x^4 + 2x - 1)}{(3x^2 - 1)^2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad y' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$y = \frac{1}{x} \qquad y' = \frac{-1}{x^2}$$

$$y = \sqrt[3]{x^2} \qquad y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

---

**Ejercicio 2.** *Calcular los puntos de intersección de la parábola $y = 2x^2 - 5x + 1$ y la recta $y = -x - 1$. Representar gráficamente la parábola.*

Las coordenadas de los puntos de intersección son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = -x - 1 \end{cases} \implies 2x^2 - 5x + 1 = -x - 1 \implies 2x^2 - 4x + 2 = 0 \implies x^2 - 2x + 1 = 0$$

Esta ecuación tiene una única solución $x = 1$ a la que corresponde el valor $y = -2$. Así pues el punto de intersección de la parábola y la recta es $(1, -2)$.

Para representar la parábola calculamos su vértice:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{4}$$

$$y_0 = 2\cdot\frac{25}{16} - 5\cdot\frac{5}{4} + 1 = -\frac{17}{8}$$

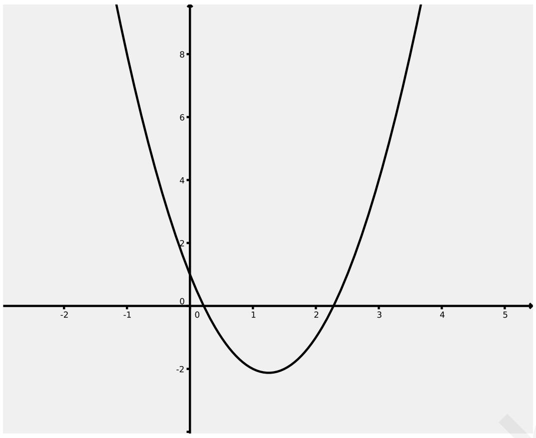
Así pues, el vértice es el punto $V\left(\frac{5}{4}, -\frac{17}{8}\right)$. Las intersecciones con el eje $OX$ son:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = 0 \end{cases} \implies x_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$$

y la intersección con el eje $OY$:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad y = 1$$

Con estos datos, la gráfica de la parábola es:




---

**Ejercicio 3.** *Hallar los puntos de tangente horizontal de la curva* $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.

**Solución:**

En los puntos de tangente horizontal la derivada es cero. Igualando a cero la derivada resulta:

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

Calculamos la ordenada sustituyendo estos valores en la ecuación de la curva y obtenemos los puntos $(-1, 4)$ y $(3, -28)$.

---

**Ejercicio 4.** *Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva* $y = x^2 - 5x + 6$ *en el punto de abscisa* $x = 2$.

**Solución:**

Calculamos en primer lugar la ordenada del punto de tangencia:

$$y_0 = y(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$$

Así pues la tangente pasa por el punto $(2, 0)$.

La pendiente de la tangente es la derivada en el punto de abscisa 2, es decir:

$$y' = 2x - 5 \quad \Longrightarrow \quad m = y'(2) = -1$$

La ecuación de la tangente es:

$$y = -1 \cdot (x - 2)$$

---

**Ejercicio 5.** *Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva* $y = 4 - x^2$ *en los puntos de corte con el eje de abscisas.*

**Solución:**

Los puntos de corte con el eje de abscisas son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

que son los puntos $A(-2,0)$ y $B(2,0)$.

Teniendo en cuenta que $y' = -2x$, la pendiente de las tangentes en estos puntos es:

$$\begin{cases} m_1 = y'(-2) = 4 \\ m_2 = y'(2) = -4 \end{cases}$$

Las ecuaciones de las tangentes son:

$$y = 4 \cdot (x+2); \qquad y = -4 \cdot (x-2)$$

---

**Ejercicio 6.** *¿En qué puntos la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene la pendiente igual a 8?*

**Solución:** Calcular los puntos de intersección de la parábola $y = 2x^2 - 5x + 1$ y la recta $y = -x - 1$. Representar gráficamente la parábola. Igualamos la derivada a 8 y resulta:

$$y' = 3x^2 - 4 = 8 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 = 12 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -2,\ x_2 = 2$$

Las ordenadas de la curva para estos valores son:

$$\begin{cases} y(-2) = -8 + 8 = 0 \\ y(2) = 8 - 8 = 0 \end{cases}$$

Los puntos son $A(-2,0)$ y $B(2,0)$.

---

**Ejercicio 7.** *Representar gráficamente la curva $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$ calculando sus máximos mínimos y puntos de inflexión.*

**Solución:**

Calculamos en primer lugar las derivadas de la función:

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 18x + 24 \\ y'' &= 6x - 18 \\ y''' &= 6 \end{aligned}$$

Los máximos y mínimos los obtenemos igualando a cero la primera derivada:

$$3x^2 - 18x + 24 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2: \quad x_2 = 4$$

En estos puntos, la segunda derivada es

$$\begin{aligned} y''(2) &= 12 - 18 = -6 < 0 \\ y''(4) &= 24 - 18 = 6 > 0 \end{aligned}$$

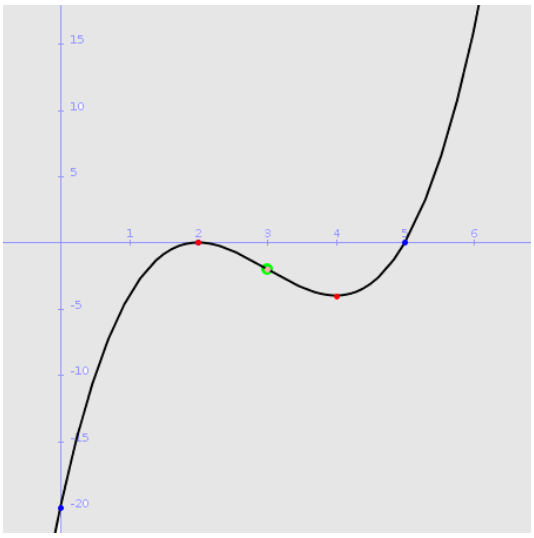
Por consiguiente, la función tiene un máximo en $x = 2$ y un mínimo en $x = 4$. Sustituyendo estos valores en $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$ obtenemos que el máximo está en el punto $(2,0)$ y el mínimo en $(4,-4)$.

Calculamos los puntos de inflexión haciendo cero la derivada segunda:

$$6x - 18 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 3$$

En este punto la derivada tercera es distinta de cero. Así pues, tenemos un punto de inflexión en $(3,-2)$.

La representación gráfica de la función es la siguiente:




---

**Ejercicio 8.** *Se considera la función:*

$$y = \frac{x}{x^2 + 5x + 4}$$

Calcular:

- ⋄ *Intersecciones con los ejes y asíntotas.*
- ⋄ *Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*
- ⋄ *Representación gráfica.*

**Solución:**

- ⋄ Las intersecciones con los ejes son la solución de los sistemas:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 4} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 4} \\ y = 0 \end{cases}$$

En este caso hay un solo punto de intersección $(0, 0)$.

El denominador de la fracción se anula para $x = -1$ y $x = -4$. Éstas son las asíntotas verticales de la función. La asíntota horizontal es $y = 0$ puesto que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 + 5x + 4} = 0$$

- ⋄ Calculemos la derivada de la función:

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2 + 5x + 4) - x \cdot (2x + 5)}{(x^2 + 5x + 4)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 5x + 4)^2}$$

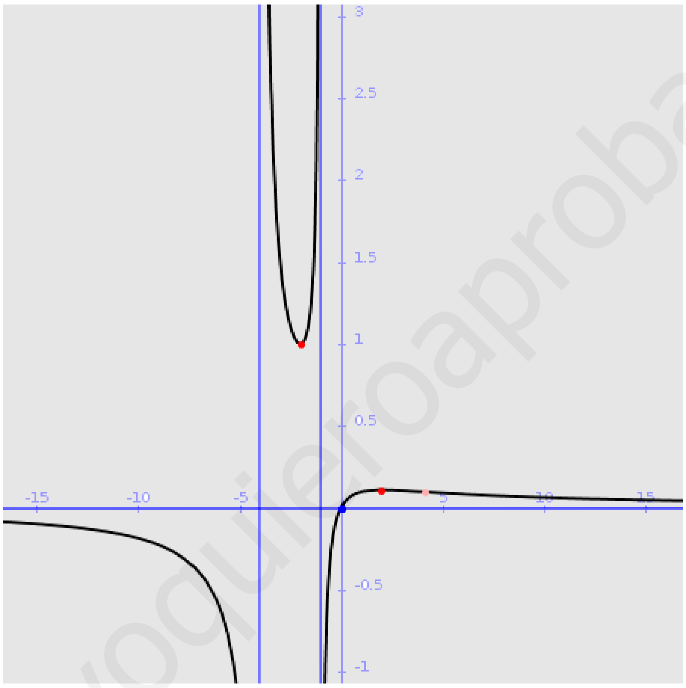
La derivada se anula para $x = -2$ y $x = 2$. Tenemos el siguiente esquema de signos:

| $y'$ | $-$ | $\nexists$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\nexists$ | $+$ | $0$ | $-$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-4$ | | $-2$ | | $-1$ | | $2$ | |

Es decir:

| | | |
|---|---|---|
| $x \in (-\infty, -4)$ | $y' < 0$ | $f$ decreciente |
| $x = -4$ | no existe la función | asíntota |
| $x \in (-4, -2)$ | $y' < 0$ | $f$ decreciente |
| $x = -2$ | $y' = 0$ | mínimo |
| $x \in (-2, -1)$ | $y' > 0$ | $f$ creciente |
| $x = -1$ | no existe la función | asíntota |
| $x \in (-1, 2)$ | $y' > 0$ | $f$ creciente |
| $x = 2$ | $y' = 0$ | máximo |
| $x \in (2, \infty)$ | $y' < 0$ | $f$ decreciente |

◇ La gráfica de esta función aparece en la siguiente figura:



# 12. Integrales

**Ejercicio 1.** *Calcular las siguientes integrales indefinidas:*

- $\diamond \int (2x^3 - 5x^2 + 5x - 2)\, dx$
- $\diamond \int (5x-1)^3\ dx$
- $\diamond \int \left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)\ dx$
- $\diamond \int \dfrac{x-1}{x^2-2x+7}\, dx$

**Solución:**

$$\diamond \int (2x^3 - 5x^2 + 5x - 2)\, dx = \frac{2x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 2x + C$$

$$\diamond \int \left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)\ dx = \frac{2x^3}{3} - 3\ln x + C$$

$$\diamond \int (5x-1)^3\ dx = \frac{1}{5}\,\frac{(5x-1)^4}{4} + C$$

$$\diamond \int \frac{x-1}{x^2-2x+7}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+7}\, dx = \frac{1}{2}\ \ln(x^2-2x+7) + C$$

---

**Ejercicio 2.** *Calcular las siguientes integrales definidas:*

- $\diamond \int_{-2}^{2} (x^3 - 3x)\, dx$
- $\diamond \int_{1}^{4} \sqrt{3x}\, dx$

**Solución:**

$$\diamond \int_{-2}^{2} (x^3 - 3x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{16}{4} - \frac{12}{2}\right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{12}{2}\right) = 0$$

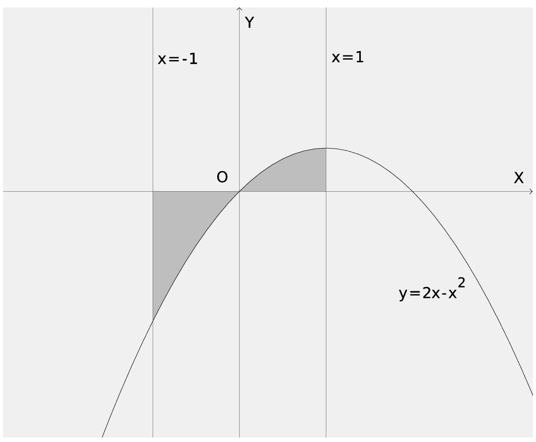
$$\diamond \int_{1}^{4} \sqrt{3x}\, dx = \sqrt{3}\int_{1}^{4} \sqrt{3x}\, dx = \left[\sqrt{3}\ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{4} = \left[\frac{2\sqrt{3x^3}}{3}\right]_{1}^{4} = \frac{16\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

---

**Ejercicio 3.** *Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 2x - x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Representar gráficamente el recinto.*

**Solución:**

La representación gráfica del recinto es la siguiente:



Puesto que la curva corta al eje de abscisas en el interior del intervalo $[-1, 1]$, será preciso calcular por separado las dos áreas:

$$\int_{-1}^{0} (2x - x^2)\, dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(1 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$\int_{0}^{1} (2x - x^2)\, dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3}$$

Entonces, la superficie total es:

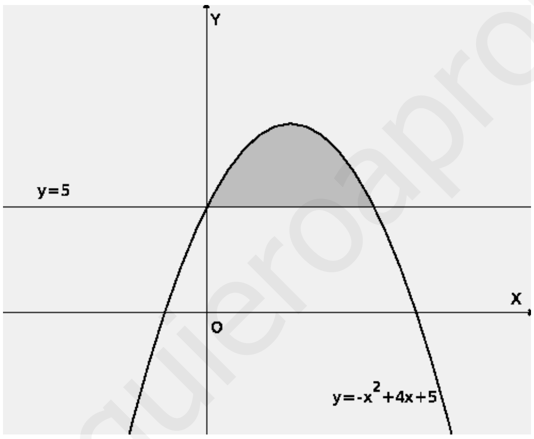
$$S = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

---

**Ejercicio 4.** *Dibujar el recinto limitado entre la curva $y = -x^2 + 4x + 5$ y la recta $y = 5$. Calcular el área de este recinto.*

**Solución:**

La representación gráfica es:




La recta y la curva se cortan en los puntos:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ y = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Calculamos la integral de la diferencia:

$$\int_{0}^{4} \left(-x^2 + 4x\right)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_{0}^{4} = -\frac{64}{3} + \frac{64}{2} = \frac{32}{3}$$

El área es, por consiguiente, igual a $\frac{32}{3}$.

---

**Ejercicio 5.** *Calcular el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ y $y = 3x^2$.*

**Solución:**

Resolvemos para la incógnita $x$ el sistema

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Estos números son los límites de la integral de la diferencia de las dos funciones, que nos servirá para calcular el área:

$$\int_{-1}^{1} \left(3x^2 - 4 + x^2\right)\ dx = \int_{-1}^{1} \left(4x^2 - 4\right)\ dx = \left[\frac{4x^3}{3} - 4x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{4}{3} - 4\right) - \left(-\frac{4}{3} + 4\right) = -\frac{16}{3}$$

El área es $\frac{16}{3}$.

# 13. Examen final

## Primera evaluación

**Ejercicio 1.** *Se consideran las matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- *Calcúlense los valores de $a$ para los cuales la matriz $A$ no tiene inversa.*
- *Para $a = 2$, calcúlese la matriz inversa $A^{-1}$.*
- *Para $a = 2$ calcúlese, si existe, la matriz $X$ que satisface $AX = B$.*

**Solución:**

- La matriz no tiene inversa cuando su determinante es cero:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + 6 - 1 = -a^2 + 5$$

  La matriz no tiene inversa para $a = -\sqrt{5}$ y para $a = \sqrt{5}$.

- Para $a = 2$ el determinante de la matriz $A$ vale 1. Calculamos la matriz adjunta:

$$\operatorname{adj} A = \operatorname{adj} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 6 \\ -5 & -2 & 12 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

  La matriz inversa se obtiene trasponiendo esta matriz y dividiendo por el determinante (que es 1). Por consiguiente:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{bmatrix}$$

- Multiplicando por la izquierda por la inversa de la matriz $A$:

$$AX = B \quad\Longrightarrow\quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad\Longrightarrow\quad X = A^{-1}B$$

  Puesto que ya hemos calculado la matriz inversa, la matriz $X$ es:

$$X = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

---

**Ejercicio 2.** *Se considera el siguiente sistema dependiente del parámetro real $k$:*

$$\begin{aligned} x - \phantom{k}y + kz &= 1 \\ 2x - ky - \phantom{k}z &= 2 \\ x - \phantom{k}y - \phantom{k}z &= k - 1 \end{aligned}$$

Se pide:

- *Discutir el sistema para los distintos valores de $k$.*

◇ *Resolver el sistema para el valor de $k$ en que tenga infinitas soluciones.*

◇ *Resuélvase el sistema para $k = 3$.*

**Solución:**

◇ Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = k + 1 - 2k + k^2 - 1 - 2 = k^2 - k - 2$$

Este determinante es cero para $k = -1$ y para $k = 2$. Tenemos los siguientes casos:

- $k \neq -1$ y $k \neq 2$. El rango de la matriz de coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada. El sistema es compatible determinado.
- $k = -1$. En este caso, el rango de la matriz de coeficientes es 2. Puede verse que el rango de la matriz ampliada es 3. El sistema es incompatible.
- $k = 2$. El rango de la matriz de coeficientes es 2. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

  Se ve claramente que el rango es igual a 2 porque la cuarta columna es igual a la primera, y la segunda es igual a la primera cambiada de signo. En este caso las dos matrices tienen el mismo rango, por tanto, el sistema es compatible. Como el rango es menor que el número de incógnitas, el sistema es indeterminado.

◇ Resolvamos el sistema en el caso $k = 2$:

$$\begin{aligned} x - \ y + 2z &= 1 \\ 2x - 2y - \ z &= 2 \\ x - \ y - \ z &= 1 \end{aligned}$$

Puesto que el rango es 2, sólo hay dos ecuaciones independientes. El sistema es equivalente a:

$$\begin{aligned} x - \ y + 2z &= 1 \\ 2x - 2y - \ z &= 2 \end{aligned}$$

No podemos tomar la incógnita $z$ como parámetro puesto que en ese caso resultaría el sistema:

$$\begin{aligned} x - \ y &= 1 - 2z \\ 2x - 2y &= 2 + \ z \end{aligned}$$

en el que el determinante de la matriz de coeficientes sería cero. Tomamos entonces, como parámetro, la incógnita $y$ y resulta el sistema:

$$\begin{aligned} x + 2z &= 1 + \ y \\ 2x - \ z &= 2 + 2y \end{aligned}$$

Llamando $y = t$, resolvemos el sistema y obtenemos la solución $(1 + t, t, 0)$.

◇ Para $k = 3$ tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} x - \ y + 3z &= 1 \\ 2x - 3y - \ z &= 2 \\ x - \ y - \ z &= 2 \end{aligned}$$

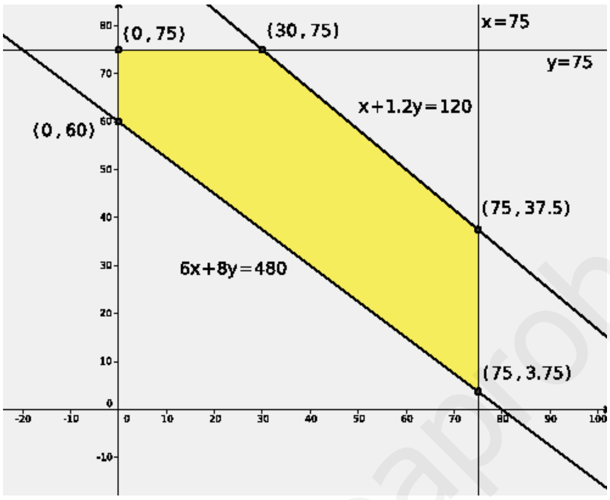
Hemos visto que en este caso, el sistema es compatible determinado. Puede resolverse por la regla de Cramer y se obtiene:

$$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

**Ejercicio 3.** *Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de* 480 *metros cuadrados. Puede comprar la pintura a dos proveedores, A y B. El proveedor A le ofrece una pintura con un rendimiento de* 6 *metros cuadrados por kg y un precio de 1 euro por kg. La pintura del proveedor B tiene un precio de* 1,2 *euros por kg y un rendimiento de* 8 *metros cuadrados por kg. Ningún proveedor le puede proporcionar más de* 75 *kg de pintura y el presupuesto máximo del pintor es de* 120 *euros. Calcúlese la cantidad de pintura que el pintor tiene que comprar a cada proveedor para obtener el mínimo coste. Calcúlese dicho coste mínimo.*

**Solución:**

Sea $x$ el número de kilos de pintura de tipo $A$ e $y$ el número de kilos de pintura de tipo $B$.




Las restricciones son las siguientes:

$$\begin{cases} 6x + 8y \geq 480 \\ x \leq 75 \\ y \leq 75 \\ x + 1{,}2y \leq 120 \end{cases}$$

La función objetivo es el coste de la pintura

$$F(x, y) = x + 1{,}2y$$

De acuerdo con estas restricciones obtenemos la región factible que aparece representada en la figura. El mínimo de la función objetivo se da en algún vértice de esa región. Haciendo los cálculos, el mínimo resulta estar en el punto $(0, 60)$ y el coste resultante es de 72 euros.

---

**Ejercicio 4.** *Una refinería utiliza dos tipos de petróleo A y B que compra a un precio de* 350 *euros y* 400 *euros por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de petróleo del tipo A que refina, obtiene* 0,10 *toneladas de gasolina y* 0,35 *toneladas de fueloil. por cada tonelada de petróleo de tipo B que refina, obtiene* 0,05 *toneladas de gasolina y* 0,55 *toneladas de fueloil. Para cubrir sus necesidades necesita al menos* 10 *toneladas de gasolina y al menos* 50 *toneladas de fueloil. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de* 100 *toneladas de cada tipo de petróleo. ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? determinar dicho coste mínimo.*

**Solución:**

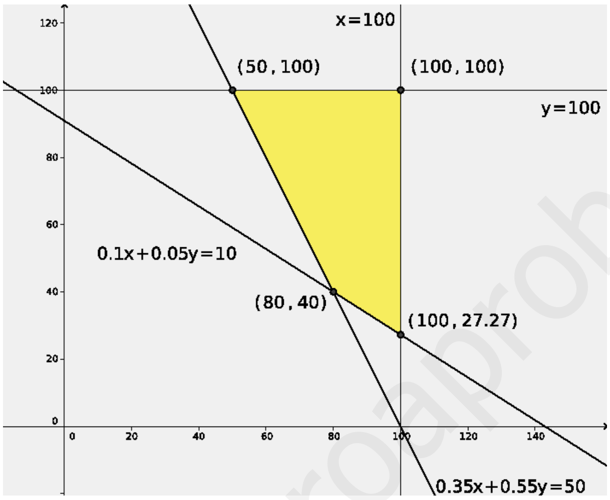
Llamemos $x$ al número de toneladas de petróleo de tipo $A$ e $y$ al número de toneladas de petróleo de tipo $B$. Las restricciones son las siguientes:

$$\begin{cases} 0{,}10x + 0{,}05y \geq 10 \\ 0{,}35x + 0{,}55y \geq 50 \\ x \leq 100 \\ y \leq 100 \end{cases}$$

y la función objetivo:

$$F(x, y) = 350x + 400y$$

La región factible y sus vértices aparecen representados en la figura.




El mínimo de la función objetivo se da en el vértice $(80, 40)$. En ese punto, la función objetivo vale:

$$F(80, 40) = 350 \cdot 80 + 400 \cdot 40 = 44000$$

---

## Segunda evaluación

**Ejercicio 1.** *Sean $A$ y $B$ dos sucesos de un experimento aleatorio tales que la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente es igual a $\frac{1}{6}$ y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es igual a $\frac{7}{12}$. Se sabe además que $P(A|B) = \frac{1}{2}$.*

- ⋄ *Calcúlese la probabilidad de que ocurra $A$ o $B$.*
- ⋄ *Calcúlese la probabilidad de que ocurra $A$.*

**Solución:**

- ⋄ Sabemos que $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$ y que $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{7}{12}$. De esta última probabilidad, aplicando las leyes de de Morgan deducimos que:

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = \frac{7}{12} \quad \Longrightarrow \quad p(A \cup B) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

- ⋄ De $P(A|B) = \frac{1}{2}$ deducimos que:

$$P(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{p(B)} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad p(B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Finalmente de $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(\cap B)$ se obtiene:

$$p(A) = p(A \cup B) + p(\cap B) - p(B) = \frac{5}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

---

**Ejercicio 2.** *Se supone que el nivel de glucosa en sangre de los individuos de una población (medido en miligramos por decilitro) se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu$ desconocida y desviación típica igual a 35 mg/dl. ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que permite garantizar que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y $\mu$ es menor que 20 mg/dl con una probabilidad mayor o igual que 0,98?*

**Solución:**

Si el nivel de confianza es de 0,98 la tabla de la distribución normal nos da $z_c = 2{,}33$. El error en la estimación está dado por:

$$E = \frac{z_c \sigma}{\sqrt{N}}$$

donde $N$ es el tamaño de la muestra. Puesto que el erro debe ser menor que 20, tenemos que:

$$\frac{z_c \sigma}{\sqrt{N}} < 20 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2{,}33 \cdot 35}{\sqrt{N}} < 20 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{N} > \frac{2{,}33 \cdot 35}{20}$$

De aquí obtenemos:

$$N > \left( \frac{2{,}33 \cdot 35}{20} \right)^2 = 16{,}626$$

Como el tamaño de la muestra debe ser un número entero tiene que ocurrir que $N \geq 17$.

---

**Ejercicio 3.** *Según cierto estudio, el 40 % de los hogares europeos tiene contratado el acceso a Internet, el 33 % tiene contratada la televisión por cable, y el 20 % dispone de ambos servicios. Se selecciona al azar un hogar europeo.*

- *¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?*
- *¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?*

**Solución:**

Llamemos a los sucesos

$T$: el hogar europeo elegido tiene televisión por cable
$I$: el hogar europeo elegido tiene internet

Podemos escribir los datos de la siguiente forma: $p(I) = 0{,}40$, $p(T) = 0{,}33$ y $p(T \cap I) = 0{,}20$.

- La probabilidad de que tenga contratada la televisión por cable y no tenga internet es

  $$p(T \cap \bar{I}) = p(T - I) = p(T) - p(T \cap I) = 0{,}33 - 0{,}20 = 0{,}13$$

- La probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios es:

  $$p(\bar{T} \cap \bar{I}) = p(\overline{T \cup I}) = 1 - p(T \cup I)$$

  y puesto que

  $$p(T \cup I) = p(T) + p(I) - p(T \cap I) = 0{,}33 + 0{,}40 - 0{,}20 = 0{,}53$$

  resulta que

  $$p(\bar{T} \cap \bar{I}) = 1 - 0{,}53 = 0{,}47$$

**Ejercicio 4.** *Se supone que el precio de un kilo de patatas en una cierta región se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 10 céntimos de euro. una muestra aleatoria simple de tamaño 256 proporciona un precio medio del kilo de patatas igual a 19 céntimos de euro.*

- ⋄ Detérminese un intervalo de confianza del 95 % para el precio medio de un kilo de patatas en la región.
- ⋄ Se desea aumentar el nivel de confianza al 99 % sin aumentar el error en la estimación. ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse?

**Solución:**

- ⋄ El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - \frac{z_c\sigma}{\sqrt{N}}\ ,\ \bar{x} + \frac{z_c\sigma}{\sqrt{N}}\right)$$

Con los datos del problema $\bar{x} = 19$, $\sigma = 10$, $N = 256$ y $z_c = 1{,}96$. Sustituyendo obtenemos el intervalo:

$$(17{,}775\ ;\ 20,225)$$

- ⋄ El error en la estimación anterior es

$$E = \frac{z_c\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{1{,}96\cdot 10}{\sqrt{2576}} = 1{,}225$$

Si queremos mantener el mismo error aumentando el nivel de confianza al 99 % (es decir $z_c = 2{,}575$) tenemos que:

$$1{,}225 = \frac{2{,}575\cdot 10}{\sqrt{N}} \qquad \Longrightarrow \qquad N = \left(\frac{2{,}575\cdot 10}{1{,}225}\right)^2 = 441,858$$

Por consiguiente el tamaño mínimo debe ser como mínimo de 442.

---

## Tercera evaluación

**Ejercicio 1.** *Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$.*

- ⋄ *Calcúlense a, b para que la función $f$ tenga un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 2$.*
- ⋄ *Para $a = b = 0$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f$ y la recta de ecuación $y = 8x - 6$.*

**Solución:**

- ⋄ Si existen extremos relativos en $x = 1$ y $x = 2$, en esos puntos la derivada debe ser cero. La derivada de la función es:

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

Esta derivada es cero en $x = 1$ y $x = 2$. Por consiguiente

$$\begin{cases} 6 + 2a + b = 0 \\ 24 + 4a + b = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a = -9; \quad b = 12$$

- Sea la función $y = 2x^3 - 6$. Los puntos de intersección de esta curva con la recta $y = 8x - 6$ son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = 2x^3 - 6 \\ y = 8x - 6 \end{cases} \implies 2x^3 - 6 = 8x - 6 \implies 2x^3 - 8x = 0; \quad 2x(x^2 - 4) = 0$$

Así obtenemos tres puntos de intersección de abscisas $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 2$.

Calculamos las integrales:

$$\int_{-2}^{0} \left(2x^3 - 8x\right)\, dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{8x^2}{2}\right]_{-2}^{0} = 0 - (8 - 16) = 8$$
$$\int_{0}^{2} \left(2x^3 - 8x\right)\, dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{8x^2}{2}\right]_{0}^{2} = (8 - 16) - 0 = -8$$

El área es la suma de las dos integrales tomadas en valor absoluto. Así pues $S = 16$.

---

**Ejercicio 2.** *Se considera la función real de variable real definida por* $f(x) = (x^2 - 1)^2$.

- *Determínense los extremos relativos de* $f$.
- *Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $f$ *en el punto de abscisa* $x = 3$.
- *Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de* $f$ *y el eje* $OX$.

**Solución:**

- Calculamos las derivadas de la función:

$$f'(x) = 2(x^2 - 1) \cdot 2x = 4x^3 - 4x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

La primera derivada se anula en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$, En esos puntos $f''(-1) > 0$, $f''(0) < 0$ y $f''(1) > 0$. Calculando las ordenadas de estos puntos en la expresión de la función tenemos que hay mínimos en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ y un máximo relativo en $(0, 1)$.

- La ordenada del punto de tangencia es:

$$y_0 = \left(3^2 - 1\right)^2 = 64$$

La pendiente de la tangente es la derivada en el punto:

$$m = 4 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3 = 96$$

y la ecuación de la tangente es:

$$y - 64 = 96 \cdot (x - 3)$$

- La curva corta al eje $OX$ en los puntos:

$$\begin{cases} y = \left(x^2 - 1\right)^2 \\ y = 0 \end{cases} \implies x_1 = -1; \quad x_2 = 1$$

Puesto que solamente hay dos puntos de corte basta calcular una integral:

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^2\, dx = \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}$$

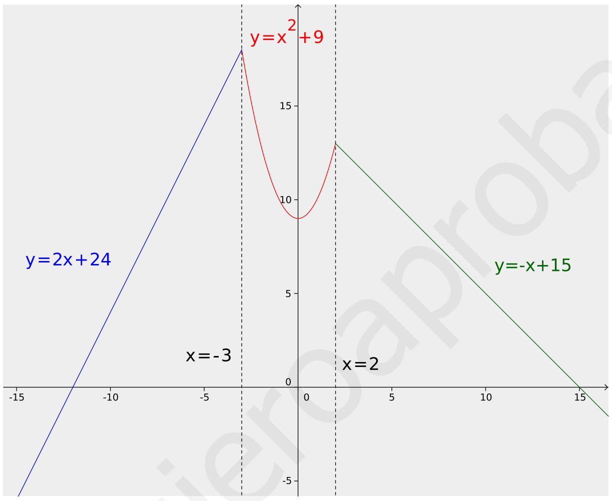
**Ejercicio 3.** *Se considera la función real de variable real definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 24 \text{ si } x \leq -3 \\ x^2 + 9 \text{ si } -3 < x \leq 2 \\ -x + 15 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

1. *Represéntese gráficamente la función $f$.*
2. *Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 1$.*
3. *Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f$ y el eje $OX$.*

**Solución:**

- Basta representar la primera recta en $(-\infty, -3)$, la parábola en $(-3, 2)$ y la segunda recta en $2, \infty$. Se obtiene lo siguiente:




- Como el punto $x_0 = 1$ está en el intervalo $(-3, 2)$, calcularemos la ecuación de la tangente a $y = x^2 + 9$ que es como se define la función en ese intervalo. La ordenada del punto es:

$$y_0 = 1^2 + 9 = 10$$

La pendiente es la derivada de la función para $x = 1$:

$$f'(x) = 2x \implies m = f'(1) = 2$$

y la ecuación de la tangente es:

$$y - 10 = 2 \cdot (x - 1)$$

- Aunque las áreas bajo las rectas podríamos calcularlas por las fórmulas de la geometría elemental, podemos calcularlas también mediante integrales. La gráfica de la función corta al eje $OX$ en los puntos de abscisas $-12$ y $15$. Así pues:

$$S = \int_{-12}^{-3} (2x + 24)\ dx + \int_{-3}^{2} \left(x^2 + 9\right)\ dx + \int_{2}^{15} (-x + 15)\ dx$$

Haciendo las operaciones resulta:

$$S = \frac{1333}{6}$$

**Ejercicio 4.** *Dada la función real de variable real definida por* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$*, se pide determinar:*

- ⋄ *Los puntos en los que la gráfica de* $f$ *corta a los ejes de coordenadas.*
- ⋄ *Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de* $f$*.*
- ⋄ *El área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función y el eje* $OX$*.*

**Solución:**

- ⋄ Resolvemos el sistema formado por la ecuación de la curva y la ecuación del eje $OX$:

$$\begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 9x \\ y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x(x^2 - 6x + 9) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3$$

Los puntos de intersección son $(0, 0)$ y $(3, 0)$

Para calcular la intersección con el eje $OY$ resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 9x \\ x = 0 \end{cases}$$

que nos da el punto $(0, 0)$.

- ⋄ Estudiamos la derivada:

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 12x + 9 \\ y'' &= 6x - 12 \end{aligned}$$

Los ceros de la derivada son los puntos $x = 1$ y $x = 3$. En estos puntos $y''(1) < 0$ y $y''(3) > 0$. Por consiguiente hay un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 3$. Entonces, tenemos que:

| | |
|---|---|
| $x \in (-\infty, 1)$ | creciente |
| $x = 1$ | máximo |
| $x \in (1, 3)$ | decreciente |
| $x = 3$ | mínimo |
| $x \in (3, \infty)$ | creciente |

- ⋄ Puesto que la curva corta al eje $OX$ en dos puntos podemos calcular el área comprendida entre la curva y el eje mediante la integral:

$$\int_0^3 \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{27}{4}$$

El área es entonces igual a $\frac{27}{4}$.