Probabilidad

Ejercicios resueltos

5.1-1 Se lanzan al aire tres monedas iguales, describe todos los sucesos del espacio muestral. Sean los sucesos A = sacar al menos una cara, B = sacar al menos una cruz, describe los sucesos:

$\overline{A},\ A \cup B,\ A \cap B,\ \overline{A \cap B}, \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A} \cup \overline{B}$

Solución

Si denotamos por C salir cara y por X salir cruz, el espacio muestral sería
E = {CCC , CCX , CXX , XXX } y todos sus sucesos serían:
Ø, {CCC}, {CCX}, {CXX}, {XXX}, {CCC , CCX}, {CCC , CXX},
{CCC , XXX}, {CCX , CXX}, {CCX , XXX}, {CXX , XXX},
{CCC , CCX , CXX}, {CCC , CCX , XXX}, { CCC , CXX , XXX},
{CCX , CXX, XXX} , {CCC , CCX , CXX , XXX}

A = sacar al menos una cara = { CCC , CCX , CXX}
B = sacar al menos una cruz = { CCX , CXX , XXX }

- $\overline{A}$ = no sacar al menos una cara = { XXX }
- $A \cup B$ = sacar al menos una cara o al menos una cruz
  $A \cup B$ = { CCC , CCX , CXX , XXX } = E
  Es decir, seguro que sale al menos una cara o al menos una cruz.
- $A \cap B$ = sacar al menos una cara y al menos una cruz
  $A \cap B$ = { CCX , CXX }
- $\overline{A \cap B}$ = no sacar al menos una cara y al menos una cruz
  $\overline{A \cap B}$ = { CCC , XXX }
- $\overline{A} \cap \overline{B}$ = no sacar al menos una cara y no sacar al menos una cruz
  $\overline{A} \cap \overline{B}$ = { XXX } ∩ { CCC } = Ø
- $\overline{A} \cup \overline{B}$ = no sacar al menos una cara o no sacar al menos una cruz
  $\overline{A} \cup \overline{B}$ = { XXX } ∪ { CCC } = { CCC , XXX }

Se comprueba como $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

5.1-2 Una bolsa contiene 2 bolas negras, 3 bolas blancas, 4 bolas rojas y 5 bolas verdes. Se extrae una bola de la bolsa, describe el espacio muestral y calcula la probabilidad de:
a) La bola es de color rojo.
b) La bola no es negra.
c) La bola es blanca o verde.

Solución

El experimento aleatorio es extraer una bola de una bolsa y observar su color, su espacio muestral es:

E = {bola negra, bola blanca, bola roja, bola verde}

a) Sea el suceso R = la bola es roja.
Como los sucesos son equiprobables, podemos aplicar la regla de Laplace. Recordamos que hay 4 bolas rojas de un total de 14.

$$p(R) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

b) Sea el suceso N = la bola es negra. Entonces el suceso contrario es:

$\overline{N}$ = la bola no es negra

$$p(\overline{N}) = 1 - p(N) = 1 - \frac{\text{casos favorables a N}}{\text{casos posibles}} = 1 - \frac{2}{14} = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

c) Sean los sucesos B = la bola es blanca, V = la bola es verde, $B\text{o}V = B \cup V$ = la bola es blanca o verde.

$$p(B\text{o}V) = p(B \cup V) = p(B) + P(V) =$$
$$= \frac{\text{casos favorables a B}}{\text{casos posibles}} + \frac{\text{casos favorables a V}}{\text{casos posibles}} =$$
$$= \frac{3}{14} + \frac{5}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

5.1-3 De una baraja española de cuarenta cartas, se extrae una y se consideran los siguientes sucesos: O = La carta es de oros, F = la carta es una figura. Calcular la probabilidad de O, F, O∩F, O∪F.

Solución

Recordamos que en la baraja española de 40 cartas hay 10 cartas de cada palo (oros, copas, espadas y bastos) y 12 figuras (3 de cada palo).

$$p(\mathrm{O})=\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$$

$$p(\mathrm{F})=\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$$

$$p(\mathrm{O}\cap\mathrm{F})=p(\text{oros y figura})=\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}=\frac{3}{40}$$

$$p(\mathrm{O}\cup\mathrm{F})=p(\mathrm{O})+p(\mathrm{F})-p(\mathrm{O}\cap\mathrm{F})=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{10}-\frac{3}{40}=\frac{10}{40}+\frac{12}{40}-\frac{3}{40}=\frac{19}{40}$$

5.1-4 El 30% de los estudiantes de un Instituto practica el fútbol, el 40% practica el baloncesto y el 10% practica ambos deportes. Se elige un estudiante al azar. Calcula:

a) La probabilidad de que no juegue al fútbol ni al baloncesto.

b) Si juega al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al baloncesto?

c) ¿Son independientes jugar al fútbol y al baloncesto?

Solución

Para ayudar a resolver el problema completamos la siguiente tabla:

	Fútbol	No fútbol	
Baloncesto	10		40
No baloncesto			
	30		100

	Fútbol	No fútbol	
Baloncesto	10	30	40
No baloncesto	20	40	60
	30	70	100

a) $p\left(\mathrm{Nf} \cap \mathrm{Nb}\right)=\dfrac{40}{100}=0,4$

b) $p\left(\mathrm{B}|\mathrm{F}\right)=\dfrac{p\left(\mathrm{B}\cap\mathrm{F}\right)}{p\left(\mathrm{F}\right)}=\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$

c) Comprobamos si se cumple que $p\left(\mathrm{F}\cap\mathrm{B}\right)=p\left(\mathrm{F}\right)\cdot p\left(\mathrm{B}\right)$

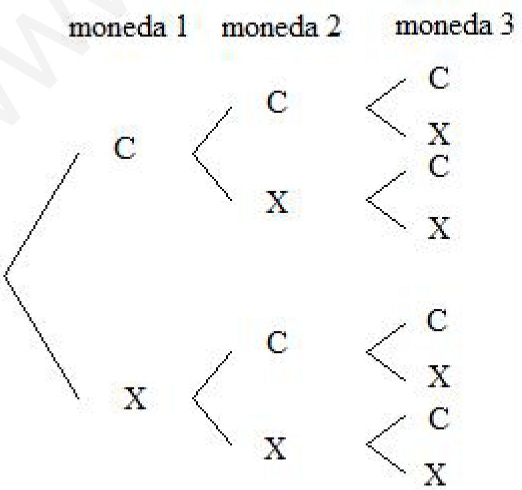
$p\left(\mathrm{F}\cap\mathrm{B}\right)=0,1\neq p\left(\mathrm{F}\right)\cdot p\left(\mathrm{B}\right)=0,3\cdot 0,4=0,12$

Luego no son independientes

5.1-5 Se lanzan al aire tres monedas iguales. Calcula la probabilidad de que salgan dos caras y una cruz.

Solución

Si el espacio muestral del experimento es $\mathrm{E}=\{\mathrm{CCC}\ ,\ \mathrm{CCX}\ ,\ \mathrm{CXX}\ ,\ \mathrm{XXX}\ \}$, los sucesos elementales no son equiprobables, ya que, por ejemplo, CCC sólo se puede obtener de una forma, mientras que CXX se puede obtener de varias (CXX , XCX , XXC). No podemos aplicar la regla de Laplace. Para calcular la probabilidad, nos ayudamos de un diagrama en árbol.



CCC
CCX
CXC
CXX

XCC
XCX
XXC
XXX

Por lo que $p\left(2 \text{ caras y } 1 \text{ cruz}\right)=\dfrac{3}{8}$

5.1-6 Un producto está compuesto de cuatro piezas. La probabilidad de que la primera sea defectuosa es de 2 de cada 1.000, que la segunda sea defectuosa de 4 ‰, que la tercera sea defectuosa 7 ‰ y que la cuarta sea defectuosa 1 ‰. Calcular la probabilidad de que el producto tenga alguna pieza defectuosa.

Solución

Si intentamos calcular directamente la probabilidad que se pide, tendríamos que calcular la probabilidad de que una pieza sea defectuosa, dos piezas sean defectuosas,... Por lo que resulta claramente mejor calcular la probabilidad del suceso contrario. Sea:

D1 = primera pieza defectuosa
D2 = segunda pieza defectuosa
D3 = tercera pieza defectuosa
D4 = cuarta pieza defectuosa

$$p\left(\overline{\mathrm{D1}}\right)=1-p\left(\mathrm{D1}\right)=1-0,002=0,998$$

$$p\left(\overline{\mathrm{D2}}\right)=1-p\left(\mathrm{D2}\right)=1-0,004=0,996$$

$$p\left(\overline{\mathrm{D3}}\right)=1-\mathrm{p}\left(\mathrm{D3}\right)=1-0,007=0,993$$

$$p\left(\overline{\mathrm{D4}}\right)=1-p\left(\mathrm{D4}\right)=1-0,001=0,999$$

Por lo que:

$$p\left(\overline{\mathrm{D}}\right)=p\left(\overline{\mathrm{D1}}\cap\overline{\mathrm{D2}}\cap\overline{\mathrm{D3}}\cap\overline{\mathrm{D4}}\right)=\mathrm{p}\left(\overline{\mathrm{D1}}\right)\cdot\mathrm{p}\left(\overline{\mathrm{D2}}\right)\cdot\mathrm{p}\left(\overline{\mathrm{D3}}\right)\cdot\mathrm{p}\left(\overline{\mathrm{D4}}\right)=$$
$$=0,998\cdot 0,996\cdot 0,993\cdot 0,999=0,986$$

Luego:

$$p\left(\mathrm{D}\right)=1-p\left(\overline{\mathrm{D}}\right)=1-0,986=0,014$$

5.1-7 Las probabilidades de aprobar Lengua son del 80%, las de aprobar Matemáticas del 75% y las de aprobar Inglés del 70%. Calcula:

a) La probabilidad de aprobar las tres asignaturas.

b) La probabilidad de suspender sólo una.

c) Si se ha suspendido sólo una, la probabilidad de que haya sido Matemáticas.

Solución

Sean los sucesos:
L = Aprobar Lengua
M= Aprobar Matemáticas
I = Aprobar Inglés
S1 = Suspender sólo una

a)

$$p\left(\mathrm{L}\cap\mathrm{M}\cap\mathrm{I}\right)=p\left(\mathrm{L}\right)\cdot p\left(\mathrm{M}\right)\cdot p\left(\mathrm{I}\right)=0,8\cdot 0,75\cdot 0,7=0,42$$

b)

$$p\left(S1\right)=p\left(\overline{\mathrm{L}}\cap\mathrm{M}\cap\mathrm{I}\right)+p\left(\mathrm{L}\cap\overline{\mathrm{M}}\cap\mathrm{I}\right)+p\left(\mathrm{L}\cap\mathrm{M}\cap\overline{\mathrm{I}}\right)=$$

$$=p\left(\overline{\mathrm{L}}\right)\cdot p\left(\mathrm{M}\right)\cdot p\left(\mathrm{I}\right)+p\left(\mathrm{L}\right)\cdot p\left(\overline{\mathrm{M}}\right)\cdot p\left(\mathrm{I}\right)+p\left(\mathrm{L}\right)\cdot p\left(\mathrm{M}\right)\cdot p\left(\overline{\mathrm{I}}\right)=$$

$$=0,2\cdot 0,75\cdot 0,7+0,8\cdot 0,25\cdot 0,7+0,8\cdot 0,75\cdot 0,3=$$

$$=0,105+0,14+0,18=0,425$$

c)

$$p\left(\overline{\mathrm{M}}/S1\right)=\frac{p\left(\overline{\mathrm{M}}\cap S1\right)}{p\left(S1\right)}=\frac{p\left(\mathrm{L}\cap\overline{\mathrm{M}}\cap\mathrm{I}\right)}{p\left(S1\right)}=\frac{0,8\cdot 0,25\cdot 0,7}{0,425}=0,329$$

5.1-8 Una bolsa contiene 2 bolas negras y 3 bolas blancas. Otra bolsa tiene 4 bolas negras y 2 bolas blancas. Se elige una de las bolsas al azar y se extrae una bola. Calcular la probabilidad de:

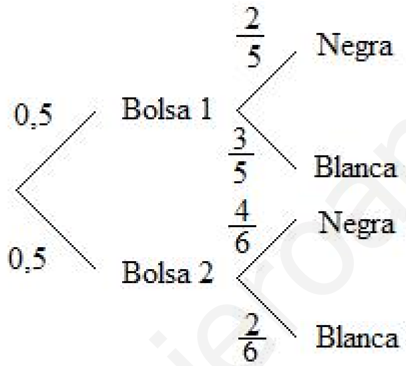
a) La bola es blanca y de la bolsa primera.

b) La bola es blanca.

c) Si la bola es negra, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la segunda bolsa?

Solución

Es un experimento compuesto, para analizarlo utilizamos un diagrama en árbol, etiquetando las ramas con las probabilidades condicionadas.



Denominamos los sucesos:

B1 = La bola es de la bolsa 1
B2 = La bola es de la bolsa 2
N = La bola es negra
B = La bola es blanca

a) $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{B1}) = p(\mathrm{B}|\mathrm{B1}) \cdot p(\mathrm{B1}) = \frac{3}{5} \cdot 0,5 = 0,3$

b)

$$p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B} \cap \mathrm{B1}) + p(\mathrm{B} \cap \mathrm{B2}) =$$
$$= p(\mathrm{B}|\mathrm{B1}) \cdot p(\mathrm{B1}) + p(\mathrm{B}|\mathrm{B2}) \cdot p(\mathrm{B2})) =$$
$$= \frac{3}{5} \cdot 0,5 + \frac{2}{6} \cdot 0,5 = \frac{3}{10} + \frac{2}{12} = \frac{18}{60} + \frac{10}{60} = \frac{28}{60} \simeq 0,46$$

c) Aplicando el Teorema de Bayes:

$$p(\mathrm{B2}|\mathrm{N}) = \frac{p(\mathrm{N}|\mathrm{B2})\cdot p(\mathrm{B2})}{p(\mathrm{N}|\mathrm{B1})\cdot p(\mathrm{B1}) + p(\mathrm{N}|\mathrm{B2})\cdot p(\mathrm{B2})} =$$

$$= \frac{\frac{4}{6}\cdot 0,5}{\frac{2}{5}\cdot 0,5 + \frac{4}{6}\cdot 0,5} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{5}+\frac{2}{6}} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{16}{30}} = \frac{2\cdot 30}{6\cdot 16} = \frac{5}{8} = 0,625$$

5.1-9 EL volumen de producción de dos plantas de una empresa es de 8.000 y 10.000 unidades de producto por día. El porcentaje de piezas defectuosas es del 0,5% en la primera fábrica y del 0,8% en la segunda. Calcular la probabilidad de que al elegir un producto al azar sea defectuoso.

Solución

Sean los sucesos:

P1 = producto de la planta 1
P2 = producto de la planta 2
D = pieza defectuosa

$$p(\mathrm{D}) = p(\mathrm{D}\cap \mathrm{P1}) + p(\mathrm{D}\cap \mathrm{P2}) =$$
$$= p(\mathrm{D}|\mathrm{P1})\cdot p(\mathrm{P1}) + p(\mathrm{D}|\mathrm{P2})\cdot p(\mathrm{P2}) =$$
$$= \frac{0,5}{100}\cdot\frac{8.000}{18.000} + \frac{0,8}{100}\cdot\frac{10.000}{18.000} = \frac{4.000}{1.800.000} + \frac{8.000}{1.800.000} =$$
$$= \frac{12.000}{1.800.000} = \frac{12}{1.800} = \frac{1}{150}$$

5.1-10 En una asignatura universitaria de primero asisten a clase 100 de los 150 alumnos matriculados. Se sabe que aprueban el 90% de los alumnos que asisten a clase y el 30% de los que no asisten. Se elige un alumno al azar. Calcular:

a) La probabilidad de que haya aprobado.

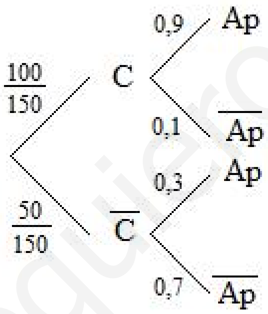
b) Si se sabe que el alumno ha suspendido, la probabilidad de que haya asistido a clase.

Solución

Sean los sucesos:

Ap = Aprobar
C = Asistir a clase

Es un experimento compuesto, para analizarlo utilizamos un diagrama en árbol, etiquetando las ramas con las probabilidades condicionadas.



a)

$$p(\text{Ap}) = p(\text{Ap}|\text{C})\cdot p(\text{C}) + p(\text{Ap}|\overline{\text{C}})\cdot p(\overline{\text{C}}) =$$

$$= 0,9\cdot\frac{100}{150} + 0,3\cdot\frac{50}{150} = 0,6 + 0,1 = 0,7$$

b)

$$p(\text{Ap}) = 0,7 \Rightarrow p(\overline{\text{Ap}}) = 1 - p(\text{Ap}) = 1 - 0,7 = 0,3$$

$$p(\text{C}|\overline{\text{Ap}}) = \frac{p(\text{C}\cap\overline{\text{Ap}})}{p(\overline{\text{Ap}})} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$