1 Matrices

1. a) Determina si son iguales o no las matrices: $\begin{pmatrix} 0 & |4-5| & 0 \\ \frac{7}{2} & -4 & 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2-(+\sqrt{4}) & 1 & 0 \\ 3{,}5 & -\sqrt{16} & \frac{30}{5} \end{pmatrix}$

b) Calcula los valores de las incógnitas para que se verifique: $\begin{pmatrix} x^2-9x & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & x \\ 1 & y^2-1 \end{pmatrix}$

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula: $A+B$; $A-B$; AB; BA;

$A^2 - 3B + 2I$, siendo I la matriz unidad de orden 3.

3. Una empresa textil posee cuatro almacenes. El inventario del almacén $A1$ está dado por:

	Marca X	Marca Y	Marca Z
Pantalones	100	50	40
Cazadoras	80	20	50
Camisas	200	60	20

El almacén $A2$ tiene tres veces el número de prendas que $A1$; $A3$, la mitad que $A2$; $A4$ tiene el doble que $A1$ y $A3$ juntos. Encuentra la matriz que nos da el inventario total de prendas de la empresa.

Si el precio de los pantalones de cada marca viene dado por la matriz columna: $(45\ 36\ 50)^t$, calcula los ingresos si se venden todos los pantalones del almacén $A4$.

4. Halla la matriz X que verifique la ecuación: $4X - \frac{1}{2}A = B$, siendo

$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

5. Averigua si son regulares las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

6. Una fábrica de electrodomésticos produce lavadoras, congeladores y hornos. Cada uno de ellos necesita las cantidades de material, personal, impuestos y transporte que se reflejan en la matriz A, expresadas en unidades adecuadas. La matriz P indica la producción semanal, y la matriz V, el valor de una unidad de cada concepto.

Obtén las matrices que representan:

a) Las unidades semanales necesarias de cada concepto.

b) Los costes unitarios de cada electrodoméstico.

c) El coste total de la producción semanal.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{M} & \text{P} & \text{I} & \text{T} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 10 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{lavadora} \\ \text{congelador;} \\ \text{horno} \end{array} \quad P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{l} & \text{c} & \text{h} \end{array} \\ (60\ \ 40\ \ 90) \end{array}; \quad V = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{M} & \text{P} & \text{I} & \text{T} \end{array} \\ (5\ \ 15\ \ 7\ \ 2)^t \end{array}$$

SOLUCIONES

1. a) Las dos matrices son iguales, ya que:

$$|4-5| = 1;\ 2-(+\sqrt{4}) = 0;\ \frac{7}{2} = 3{,}5;$$

$$-\sqrt{16} = -4;\ \frac{30}{5} = 6$$

b) $\begin{cases} x^2 - 9x = 10 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 10 \\ -1 \end{cases};\ y = \pm 1$

2. $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix};$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix};\ BA = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3\,B + 2\,I = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -22 \\ 2 & 11 & -6 \\ -1 & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

3. La matriz que proporciona el inventario total es:

	Marca X	Marca Y	Marca Z
Pantalones	1 050	525	420
Cazadoras	840	210	525
Camisas	2 100	630	210

Los ingresos obtenidos al vender los pantalones del almacén $A4$ son:

$$(500\ \ 250\ \ 200)\begin{pmatrix} 45 \\ 36 \\ 50 \end{pmatrix} = 41\,500 \text{ euros.}$$

4. $4X - \frac{1}{2}A = B \Rightarrow$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}A + B\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5. Se calcula A^{-1} por el método directo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -2 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se calcula B^{-1} por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{24} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{5}{24} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

6. a) $PA = (60\ \ 40\ \ 90)\begin{pmatrix} 7 & 10 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$= (1\,190\ \ 1\,590\ \ 600\ \ 330)$

b) $AV = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 224 \\ 202 \\ 146 \end{pmatrix}$

c) $PAV = (60\ \ 40\ \ 90)\begin{pmatrix} 7 & 10 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 34\,660$

2 Determinantes

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & b \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{a} \end{vmatrix}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ d) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 6 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

2. Calcula los siguientes determinantes de orden 4:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

3. En los siguientes casos, establece, sin hacer cálculos, por qué la igualdad es cierta:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 8 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

4. Justifica, sin realizar cálculos:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = xyz\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

5. Resuelve las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} x-1 & 2x-3 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 2$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 2 \\ 4 & x & 0 \end{vmatrix} = 1$

6. Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & a \\ 2 & a & a & 3 \\ 3 & a & a & 2 \\ a & 3 & 2 & a \end{vmatrix} = 25 - 4a^2$$

7. Halla el rango de las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

8. Calcula el valor de la constante a para que el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ sea dos.

SOLUCIONES

1.

a) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7$

c) $\begin{vmatrix} a & b \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{a} \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 6 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 140$

e) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -118$

2.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 \,\to\, c_2 + 3 \cdot c_4}$

$= \begin{vmatrix} 2 & 21 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 24 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 21 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 4 & 24 & 6 \end{vmatrix} = 358$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_4 \,\to\, c_4 + 2 \cdot c_2}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 18$

3. a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$, la fila (4 6) se obtiene al multiplicar por (-2) la fila $(-2\ \ -3)$.

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 8 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$, las filas segunda y tercera se intercambian.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$; la tercera columna son todo ceros.

d) $\begin{vmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $f_2 = 2f_3$. Luego hay dos filas proporcionales.

4.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ x & y & z^2 \\ x^2 & y^2 & z^3 \end{vmatrix} = xyz \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

5. a) $(x - 1)x - 2(2x - 3) = 2 \iff$

$\iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff x = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

b) $x - 4x - 4x = 1 \iff x = -\frac{1}{7}$

6.

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & a \\ 2 & a & a & 3 \\ 3 & a & a & 2 \\ a & 3 & 2 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \,\to\, c_1 - c_4} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & a \\ -1 & a & a & 3 \\ 1 & a & a & 2 \\ 0 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 \,\to\, f_3 + f_2} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & a \\ -1 & a & a & 3 \\ 0 & 2a & 2a & 5 \\ 0 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ 2a & 2a & 5 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix} = 25 - 4a^2$$

7. Rango $A \leqslant 2$, ya que la primera columna es no nula, se verifica: $1 \leqslant$ Rango $A \leqslant 2$. Se añade a esta primera columna, de forma sucesiva, las restantes, excepto la cuarta, que es nula, con objeto de lograr matrices de orden dos, y se calcula sus determinantes obteniendo que todos valen cero; por tanto, Rango $A = 1$.

Rango $B = 2$, ya que $f_3 = -(f_1 + f_2)$, siendo las dos primeras filas linealmente independientes.

8. $2 \leqslant$ Rango $A \leqslant 3$; las dos primeras filas son linealmente independientes y en ellas no se encuentra el parámetro a. Además, $|A| = 3 - 2a$; por consiguiente: $|A| = 0 \iff a = \frac{3}{2}$.

Por tanto, si $a = \frac{3}{2}$ entonces el rango de A es igual a 2.

3 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

1. Indica, justificando la respuesta, si los siguientes pares de sistemas de ecuaciones son o no equivalentes:

a) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x + 5y - 3z = 13 \\ x + y - z = 5 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$

2. Resuelve, si es posible, por el método de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 5y + 9z = -3 \\ -5x + 7y - 8z = 4 \end{cases}$$

3. Discute y resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + y - 5z = 2 \end{cases}$

4. Encuentra los valores de m que hacen que el siguiente sistema sea de Cramer:

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ my + 3z = 0 \end{cases}$$

5. Resuelve el sistema: $\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ x + y - z = -2 \\ 3x - y = -1 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases}$

6. Un centro comercial tiene una oferta de detergente, café y gel de ducha. Un consumidor compra dos ecobolsas de detergente, cuatro paquetes de café y un bote de gel, y gasta 12 euros; otro compra cuatro ecobolsas de detergente, un paquete de café y dos botes de gel, gastando 18 euros; y un tercero compra una ecobolsa de detergente, dos paquetes de café y cuatro botes de gel, gastando 10 euros. Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar el precio de los tres productos y resuélvelo.

SOLUCIONES

1. a) Se elimina la tercera ecuación del primer sistema ya que es igual a la suma de las dos primeras, y ambos sistemas son equivalentes.

b) Las posibles transformaciones no son evidentes; por tanto, para ver si son o no equivalentes se resuelven ambos sistemas.

Primer sistema: $x = 4$; $y = 3$; $z = 2$.

Segundo sistema: $x = 3$; $y = 2$; $z = 0$.

Los sistemas no son equivalentes porque no tienen las mismas soluciones.

2. El número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas.

Determinante de la matriz: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 9 \\ -5 & 7 & -8 \end{vmatrix} = -54 \neq 0,$

el sistema es de Cramer; por tanto, el sistema es compatible determinado.

Solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & -8 \end{vmatrix}}{-54} = \frac{173}{54};\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 9 \\ -5 & 4 & -8 \end{vmatrix}}{-54} = \frac{55}{54};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -5 & 7 & 4 \end{vmatrix}}{-54} = \frac{-87}{54}$$

3. a) Sistema homogéneo; por tanto, compatible.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[e_3 \to e_3 - e_1]{e_2 \to e_2 - 2 \cdot e_1} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3y - z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{e_3 \to e_3 - e_2} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

El sistema es determinado; al ser homogéneo, tiene como única solución la trivial: $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

b) $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + y - 5z = 2 \end{cases}$

$$\xrightarrow{e_1 \to e_1 - 3 \cdot e_2} \begin{cases} -4y + 16z = -5 \\ x + y - 5z = 2 \end{cases}$$

La ecuación más reducida depende de dos incógnitas; por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

La solución es:

$$x = \frac{3 + 4\lambda}{4};\ y = \frac{5 + 16\lambda}{4};\ z = \lambda \in \mathbb{R}$$

4. $$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ my + 3z = 0 \end{cases} \longrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow |M| = -m^2 - m$$

$$|M| = 0 \iff \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

El sistema es de Cramer para $m \neq 0$ y $m \neq -1$.

5. $$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ x + y - z = -2 \\ 3x - y = -1 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ x + 2y - z = -1 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \xrightarrow[e_4 \to e_4 - 3 \cdot e_1]{e_2 \to e_2 - e_1,\ e_3 \to e_3 - 2 \cdot e_1}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ y = 1 \\ -4y + 3z = 5 \\ -4y + 3z = 5 \end{cases};\ \begin{cases} x + y - z = 2 \\ -4y + 3z = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado, y su solución es: $x = 0$; $y = 1$; $z = 3$.

6. Si x, y, z representan el precio en euros de la ecobolsa de detergente, del paquete de café y del bote de gel, respectivamente:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 12 \\ 4x + y + 2z = 18 \\ x + 2y + 4z = 10 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$; el sistema es de Cramer, y su solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 18 & 1 & 2 \\ 10 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{-35} = 3{,}71$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 & 1 \\ 4 & 18 & 2 \\ 1 & 10 & 4 \end{vmatrix}}{-35} = 1{,}20 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 4 & 1 & 18 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix}}{-35} = 0{,}97$$

4 Programación lineal

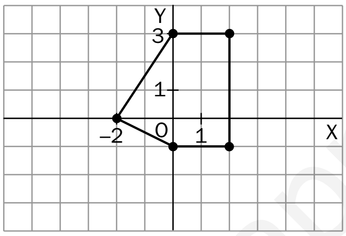
1. Representa el conjunto de puntos del plano que dan solución a la inecuación siguiente:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \geqslant 1$$

2. Representa gráficamente el conjunto de puntos del plano que verifican cada uno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y \geqslant 2 \\ -x + y \leqslant 1 \\ 2x - y \leqslant 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + y \geqslant 4 \\ 6x + 10y \geqslant 30 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

3. Se considera el recinto de la figura, incluyendo lados y vértices:



a) Escribe el sistema de inecuaciones que lo definen.

b) Calcula el valor máximo de la función $z = x + 2y$ en dicho recinto.

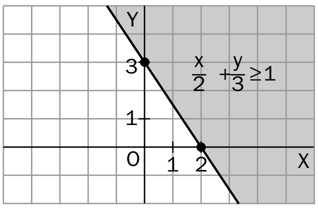
4. Calcula el valor máximo de la función $z = 22x + 40y$ sujeta a las restricciones siguientes:

$$\begin{cases} 9x + 16y \leqslant 612 \\ x \geqslant 2y \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

5. Un hipermercado necesita como mínimo 6 cajas de nísperos, 8 cajas de peras y 10 de naranjas. Dos mayoristas, *A* y *B*, se ofrecen al hipermercado para satisfacer sus necesidades, pero solo venden dicha fruta en contenedores completos. El mayorista *A* envía en cada contenedor una caja de nísperos, dos de peras y una de naranjas. Por su parte, *B* envía en cada contenedor una caja de nísperos, una de peras y cinco de naranjas. Cada contenedor suministrado por *A* cuesta 60 euros, mientras que los de *B* cuestan 75 euros. ¿Cuántos contenedores debe pedir el hipermercado a cada mayorista para satisfacer sus necesidades mínimas, con el menor coste posible?

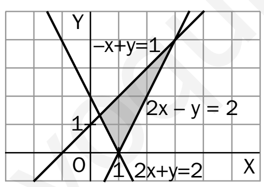
SOLUCIONES

1. a) Se representa la recta $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

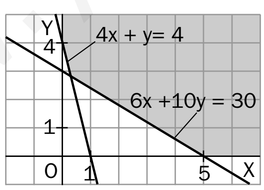


La recta divide al plano en dos semiplanos caracterizados por las inecuaciones: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \geqslant 1$; $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leqslant 1$. Para saber qué semiplano corresponde a cada inecuación, se toma un punto, por ejemplo (0, 0), y se sustituye en una de las inecuaciones $\left(\frac{0}{2} + \frac{0}{3} = 0 \leqslant 1\right)$. Si se verifica la inecuación, todo el semiplano al que pertenece dicho punto corresponde a la inecuación utilizada; en caso contrario, será el otro semiplano. La inecuación dada tiene por solución el semiplano rayado.

2. a) $\begin{cases} 2x + y \geqslant 2 \\ -x + y \leqslant 1 \\ 2x - y \leqslant 2 \end{cases}$

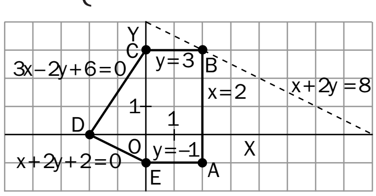


b) $\begin{cases} 4x + y \geqslant 4 \\ 6x + 10y \geqslant 30 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$



3. a) Las restricciones son: $\begin{cases} 3x - 2y + 6 \geqslant 0 \\ x + 2y + 2 \geqslant 0 \\ -1 \leqslant y \leqslant 3 \\ x \leqslant 2 \end{cases}$

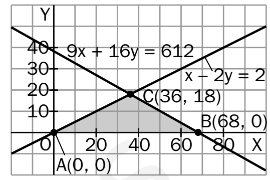
b) $\begin{cases} z_A = 0 \\ z_B = 8 \\ z_C = 6 \\ z_D = -2 \\ z_E = -2 \end{cases}$



$z = x + 2y$ alcanza su máximo en el vértice $B(2, 3)$.

4. Se representa la región factible:

La región es acotada:



Se calcula el valor de $z = 22x + 40y$ en A, B y C:

$z_A = 0 \qquad z_B = 1\,496 \qquad z_C = 1\,512$

El valor máximo lo alcanza en el punto $C(36, 18)$.

5.

	Mayorista *A*	Mayorista *B*	Necesidades
C. nísperos	1	1	6
C. peras	2	1	8
C. naranjas	1	5	10

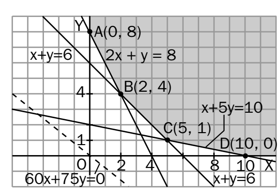
$x \equiv$ número de cajas del mayorista A.
$y \equiv$ número de cajas del mayorista B.

Minimizar la función de coste: $C(x, y) = 60x + 75y$,

sujeta a las restricciones: $\begin{cases} x + y \geqslant 6 \\ 2x + y \geqslant 8 \\ x + 5y \geqslant 10 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$

Se representa la región factible:

La región es no acotada:



La función C toma en los vértices los valores:

$C(0, 8) = 600$ euros; $\qquad C(2, 4) = 420$ euros;

$C(5, 1) = 375$ euros; $\qquad C(10, 0) = 600$ euros

El coste mínimo es de 375 euros y se logra encargando cinco contenedores al mayorista *A* y uno al *B*.

5 Límites y continuidad

1. Estudia la continuidad de $f(x) = |x - 3|$.

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{(x-1)^2 - 1}{x - 2}$:

a) Halla sus puntos de discontinuidad.

b) Clasifica estas discontinuidades y completa, si es posible, el dominio de f para que sea continua en toda la recta real.

3. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x-1)^2}$:

a) Halla los puntos donde f es discontinua.

b) Halla los límites laterales en dichos puntos.

c) Indica si se puede completar el dominio de f para que sea continua en toda la recta real.

4. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ x + 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$. Estudia su continuidad y clasifica sus discontinuidades.

5. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ a & \text{si } x = 3 \end{cases}$. Halla el valor de a para que sea continua en todo su dominio de definición. ¿Cuál es este dominio?

6. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Halla los límites laterales en los puntos de discontinuidad, si existen, y clasifica dichas discontinuidades.

7. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \mathrm{L}x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ ax^2 + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$, sabiendo que $f(2) = 3$ y que es continua en todo su dominio, halla los valores de a y b.

8. Se sabe que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + m & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ nx + 4 & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$ cumple las siguientes condiciones:

a) $f(1) = f(3)$

b) Es continua en el intervalo $(0, 4)$

Con esta información, halla los valores de m y n.

SOLUCIONES

1. $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x \leqslant 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

f es continua en todo $\mathbb{R}$, puesto que es polinómica en cada uno de los intervalos abiertos de su definición:

$\lim\limits_{x\to 3^-} (3 - x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x - 3) = f(3) = 0$

2. a) No es continua en $x = 2$ porque no está definida en ese punto.

b) La discontinuidad es evitable definiendo $f(2) = 2$, ya que:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x\to 2} x = 2$$

3. a) No es continua en $x = 1$, porque no está definida en ese punto.

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

c) No se puede, puesto que la función tiene en $x = 1$ una discontinuidad no evitable con salto infinito.

4. f es continua en cada intervalo de definición, pues está formada por funciones polinómicas.

Los problemas están en $x = 1$, donde f tiene una discontinuidad evitable si se define $f(1) = 2$, ya que:

$\lim\limits_{x\to 1^-} (2x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x + 1) = 2$

Y en $x = 2$, donde la discontinuidad es no evitable con un salto finito de 4 unidades, ya que:

$\lim\limits_{x\to 2^-} (x + 1) = 3 \neq \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 + 3) = 7$

5. Es continua para el valor $a = \dfrac{1}{4}$, ya que:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{1}{4}$$

$Df = [-1, \infty)$

6. En cada intervalo del dominio f es continua, pues en $(-\infty, 0)$ es polinómica y en $(0, \infty)$ es exponencial. El posible problema está en $x = 0$, donde la discontinuidad es no evitable con un salto finito de 1 unidad, ya que:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2^x = 1$

7. $f(2) = 3 \Rightarrow 4a + b = 3$

f continua en $\mathbb{R} \Rightarrow f$ continua en 1:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \text{L}1 = 0 = a + b$

Entonces $a = 1$, $b = -1$.

8. $f(1) = f(3) \Rightarrow 1 + m = 3n + 4$

f continua en $(0, 4) \Rightarrow f$ continua en 2:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 4 + m = 2n + 4$

Entonces $m = -6$, $n = -3$.

6 Derivadas

1. Calcula la tasa de variación de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo [2, 5].

2. Calcula la tasa de variación de la función $f(x) = 3x - x^2$ en el intervalo $[x, x + h]$.

3. Considera la función $f(x) = 6 - 2x^2$.

a ¿Cuál es su tasa de variación media en el intervalo [1, 3]?

b) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta que une los puntos $A(0, f(0))$ y $B(2, f(2))$?

4. Sea $f(x) = \frac{1}{x - 2}$.

a) Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(3)$.

b) ¿Se puede hallar $f'(2)$? Razónalo.

5. Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(1)$.

6. Halla la función derivada de $f(x) = x^2 + 2x - 5$ aplicando la definición.

7. Halla la función derivada de $f(x) = \frac{2}{x}$ aplicando la definición.

8. Halla la función derivada de $f(x) = 5x - x^2$ aplicando la definición.

9. Deriva las siguientes funciones aplicando las reglas de derivación:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x - 2}{x + 2}}$ b) $f(x) = \mathrm{L}(\sqrt{x})$ c) $f(x) = \mathrm{sen}^2 (x^2)$

10. Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = \mathrm{sen}\,(x + 1)^2$ c) $f(x) = \mathrm{sen}\,(\mathrm{L}x)$ e) $f(x) = \mathrm{tg}\, e^x$

b) $f(x) = (x - 1)\,\mathrm{tg}\, x$ d) $f(x) = \mathrm{sen}\,(\mathrm{sen}\, x)$ f) $f(x) = \mathrm{sen}\,(x^2 + 1) + \mathrm{tg}\, x^2$

11. Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = (\mathrm{sen}\, x) \cdot x$ b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \mathrm{L}x$

12. ¿En qué puntos la función $f(x) = x^3(2x - 4)^2$ tiene derivada nula?

SOLUCIONES

1. $TV[2, 5] = f(5) - f(2) = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{10}$

2. $TV(x, x + h) = f(x + h) - f(x) =$
$= 3(x + h) - (x + h)^2 - (3x - x^2) =$
$= -h^2 + 3h - 2xh$

3. a) $TVM[1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-12 - 4}{2} = -8$

b) $m = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-2 - 6}{2} = -4$

4. a) $f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{3 + h - 2} - \frac{1}{3 - 2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(1 + h)} = -1$

$f'(3) = -1$

b) No, porque f no está definida en $x = 2$.

5. $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{1 + h} - 1)(\sqrt{1 + h} + 1)}{h(\sqrt{1 + h} + 1)} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{1 + h} + 1)} = \frac{1}{2}$

6. $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - 5 - (x^2 + 2x - 5)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h} = 2x + 2$

7. $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{x+h} - \frac{2}{x}}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{xh(x+h)} = -\frac{2}{x^2}$

8. $g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h) - (x+h)^2 - (5x - x^2)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{5h - 2xh - h^2}{h} = 5 - 2x$

9.

a) $f'(x) = \frac{2\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}}{x^2 - 4}$

b) $f'(x) = \frac{1}{2x}$

c) $f'(x) = 4x \operatorname{sen} x^2 \cos x^2$

10. a) $f'(x) = 2\,(x + 1) \cdot \cos\,(x + 1)$

b) $f'(x) = \operatorname{tg} x + (x - 1) \cdot \sec^2 x$

c) $f'(x) = \frac{1}{x} \cos\,(\mathrm{L}x)$

d) $f'(x) = \cos x \cdot \cos\,(\operatorname{sen} x)$

e) $f'(x) = e^x \cdot \sec^2 e^x$

f) $f'(x) = 2x\,[\cos\,(x^2 + 1) + \sec^2 x^2]$

11. a) $f'(x) = (\cos x) \cdot x + \operatorname{sen} x$

b) $f'(x) = \frac{\mathrm{L}(x) + 2}{2\sqrt{x}}$

12. $f'(x) = 4x^2(x - 2)(5x - 6)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0,\ x = 2,\ x = \frac{6}{5}$

7 Funciones derivables

1. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 1 - x^2$ en el punto (1, 0).

2. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 4$.

3. Halla los puntos en los que la recta tangente a la curva $y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$ en el punto de abscisa $x = 2$ corta a los ejes coordenados.

4. Dada la función $f(x) = ax^2 + bx$, halla el valor de a y b para que la recta tangente a esta curva en el punto (1, 1) sea paralela a la recta $4x - y + 7 = 0$.

5. ¿Existe algún punto en el que la curva $f(x) = e^{x-1}$ tenga una recta tangente paralela al eje OX? Razónalo.

6. Razona por qué la curva $f(x) = |x - 3|$ no tiene recta tangente en $x = 3$.

7. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y escribe su función derivada.

8. Determina m y n para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + n & \text{si } x < 1 \\ mx + 2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

9. Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ y escribe su función derivada.

10. Estudia el dominio de definición, la continuidad y la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -3x & \text{si } -1 < x \leqslant 0 \\ 3x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ x^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1. $f'(x) = -2x$; la recta tangente en (1, 0) tiene de ecuación:

$y - 0 = f'(1)\,(x - 1) \Rightarrow 2x + y - 2 = 0$

2. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; la recta tangente cuando $x = 4$ es:

$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Rightarrow x - 4y + 4 = 0$

3. $y' = \dfrac{2}{(1 - x)^2}$; la recta tangente, cuando $x = 2$, es

$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow 2x - y - 7 = 0$; por tanto, el punto de corte de esta recta con el eje OX es $\left(\dfrac{7}{2}, 0\right)$ y con el eje OY es $(0, -7)$.

4. Si (1, 1) pertenece a la curva: $1 = a + b$;

además, la pendiente de la recta es 4.

Como $f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 2a + b = 4$; por tanto, $a = 3$, $b = -2$.

5. No, puesto que $f'(x) = e^{x-1}$ no se anula para ningún número real ($e^{x-1} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

6. No puede tener recta tangente en $x = 3$, porque la función no es derivable en este punto.

7. f no tiene problemas de continuidad, pues en cada trozo f es continua y, además:
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -1$.

En relación con la derivabilidad, f es derivable en cada trozo, pero no es derivable en $x = 0$, puesto que $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 0$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x<0 \\ 2x & \text{si } x>0 \end{cases}$

8. Los problemas de continuidad y derivabilidad de la función están, si existen, en $x = 1$, puesto que el enunciado dice que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$; se tiene que:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 + n = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = m + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow m - n = -1$.

$f'(1^-) = 2 = f'(1^+) = m$; por tanto, $m = 2$, $n = 3$.

9. f es siempre continua, puesto que en cada trozo es continua por ser polinómica y exponencial, y además el posible problema en $x = 0$ no existe, ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

Respecto a la derivabilidad, también es derivable en cada trozo pero no es derivable en 0, puesto que $f'(0^-) = 0 \neq f'(0^+) = 1$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x<0 \\ e^x & \text{si } x>0 \end{cases}$

10. $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

f es continua en cada intervalo de definición, pues está formada por funciones polinómicas, ahora, en $x = -1$, f tiene una discontinuidad inevitable con un salto finito de 2 unidades, ya que:

$\lim\limits_{x\to -1^-} (-x^3) = 1 \neq 3 = \lim\limits_{x\to -1^+} (-3x)$

En $x = 0$, f es continua, ya que:

$\lim\limits_{x\to 0^-} (-3x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} 3x$

En $x = 1$, f tiene una discontinuidad inevitable con un salto finito de 2 unidades, ya que:

$\lim\limits_{x\to 1^-} (3x) = 3 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 1^+} x^3$

En cuanto a la derivabilidad, f es derivable en cada trozo, pero no es derivable en $x = -1$ ni en $x = 1$ por no ser continua en estos puntos, ni tampoco en $x = 0$, ya que:

$f'(0^-) = -3 \neq 3 = f'(0^+)$.

8 Monotonía y curvatura

1. Calcula los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ c) $f(x) = xe^x$ e) $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ d) $f(x) = \mathrm{L}(x^2 + 2x)$ f) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

2. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$ c) $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$ e) $f(x) = (x + 1)e^x$

b) $f(x) = x^4 - x^3$ d) $f(x) = \mathrm{L}(x + 2)$ f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

3. Calcula los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2$ b) $f(x) = \mathrm{L}(x^2 - 1)$ c) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2}$ d) $f(x) = x^2e^x$

4. Estudia la curvatura de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x - 1)^2$ b) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 2$ c) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ d) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

5. Considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$. Calcula:

a) Su dominio.

b) Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Sus máximos y sus mínimos.

d) Sus puntos de inflexión.

e) La ecuación de la recta tangente en su punto de inflexión.

6. Halla el valor de a para que la función $f(x) = x^3 + ax + 1$ tenga un extremo en $x = 1$. Halla dicho extremo y determina si es máximo o mínimo.

7. Considera la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$. Se sabe que tiene dos extremos en $x = 1$ y en $x = \dfrac{1}{3}$, respectivamente.

a) Halla el valor de a y b.

b) Clasifica el tipo de extremos que tiene en $x = 1$ y en $x = \dfrac{1}{3}$.

c) Halla los puntos de la curva donde la pendiente de la recta tangente es 5.

8. Considera la función $f(x) = ax^3 + bx$. Sabiendo que tiene un extremo en $(1, -4)$, halla el valor de a y b.

9. Encuentra dos números sabiendo que su producto es máximo y que la suma del primero con el cuadrado del segundo es 48.

SOLUCIONES

1. a) $f'(x) = \dfrac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow$ Máximo en $x = 2$, mínimo en $x = -2$.

b) $f'(x) = \dfrac{x(x - 2)}{(x - 1)^2} \Rightarrow$ Máximo en $x = 0$, mínimo en $x = 2$.

c) $f'(x) = (x + 1)e^x \Rightarrow$ Mínimo en $x = -1$.

d) $f'(x) = \dfrac{2(x + 1)}{x^2 + 2x} \Rightarrow$ No tiene extremos, pues el punto que anula la primera derivada ($x = -1$) no pertenece al dominio de f.

e) $f'(x) = -\dfrac{2}{(1 + x)^2} \Rightarrow$ No tiene extremos, pues nunca se anula la primera derivada.

f) $f'(x) = \dfrac{e^x(x - 2)}{x^3} \Rightarrow$ Mínimo en $x = 2$.

2. a) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x + 1)(x - 1) \Rightarrow f$ decrece en $(-\infty, -1)$ y en $(0, 1)$; crece en $(-1, 0)$ y en $(1, \infty)$.

b) $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3) \Rightarrow f$ decrece en $\left(-\infty, \dfrac{3}{4}\right)$ y crece en $\left(\dfrac{3}{4}, \infty\right)$.

c) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x - 1)^2} < 0 \Rightarrow f$ decrece en todo su dominio, $Df = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x + 2} \Rightarrow f$ crece en todo su dominio $Df = (-2, \infty)$.

e) $f'(x) = e^x(x + 2) \Rightarrow f$ decrece en $(-\infty, -2)$ y crece en $(-2, \infty)$.

f) $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow f$ crece en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, 0)$; decrece en $(0, 2)$ y en $(2, \infty)$.

3. a) $f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow x = 2$ es un punto de inflexión, pues $f'''(2) \neq 0$.

b) $f''(x) = -\dfrac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow f$ no tiene puntos de inflexión, pues nunca se anula $f''(x)$.

c) $f''(x) = \dfrac{2(x - 6)}{x^4} \Rightarrow x = 6$ es un punto de inflexión, pues $f'''(6) \neq 0$.

d) $f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2) \Rightarrow x = \sqrt{2} - 2$, $x = -\sqrt{2} - 2$ son puntos de inflexión, pues en ellos $f'''(x) \neq 0$.

4. a) $f''(x) = 2 \Rightarrow f$ es convexa en todo $\mathbb{R}$.

b) $f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f$ es cóncava en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right)$ y convexa en $\left(-\dfrac{1}{3}, \infty\right)$.

c) $f''(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{(x - 1)^3}} < 0 \Rightarrow f$ es cóncava en todo su dominio $(1, \infty)$.

d) $f''(x) = \dfrac{4}{(x - 1)^3} \Rightarrow f$ es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, \infty)$.

5. a) $Df = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2} < 0 \Rightarrow f$ decrece en todo su dominio.

c) No tiene, pues $f'(x) \neq 0$ siempre.

d) $f''(x) = \dfrac{2x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3} \Rightarrow x = 0$ es un punto de inflexión, pues $f'''(0) \neq 0$.

e) $y = -\dfrac{x}{4}$

6. $f'(x) = 3x^2 + a$, puesto que $x = 1$ es extremo $\Rightarrow$ $\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow a = -3$

Al ser $f''(x) = 6x \Rightarrow f$ tiene un mínimo en $(1, -1)$.

7. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

a) $f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0$; $f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{1}{3} + \dfrac{2a}{3} + b = 0 \Rightarrow a = -2, b = 1$

b) $f''(1) > 0$ y $f''\left(\dfrac{1}{3}\right) < 0 \Rightarrow$ en $x = 1$ tiene un mínimo y en $x = \dfrac{1}{3}$ tiene un máximo.

c) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 5 \Rightarrow x = 2, x = -\dfrac{2}{3}$

8. $f'(x) = 3ax^2 + b$, si $x = 1$ es un extremo $\Rightarrow$ $\Rightarrow 3a + b = 0$

Puesto que $(1, -4)$ pertenece a la curva $\Rightarrow$ $\Rightarrow a + b = -4 \Rightarrow a = 2, b = -6$

9. Si los números son x e y, se verifica que $y + x^2 = 48$; entonces, la función producto es:

$P(x) = x(48 - x^2) \Rightarrow P'(x) = 48 - 3x^2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \pm 4$. Puesto que $y = 48 - x^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 32$ y $x = 4$

9 Representación de funciones

1. Considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$. Determina:

a) Su dominio.

b) Sus puntos de corte con los ejes coordenados.

c) El signo de la función en cada región.

d) Sus extremos.

e) Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

f) Sus puntos de inflexión.

g) Su curvatura.

h) Dibuja su gráfica.

2. Halla los puntos de corte con los ejes coordenados y las regiones de signo de la función $f(x) = e^x(x^2 - 4)$.

3. Halla, cuando existan, las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

4. Considera la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad y su derivabilidad.

b) Represéntala gráficamente.

5. Considera la función $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$:

a) Represéntala gráficamente.

b) Razona en qué puntos no es derivable.

c) Estudia sus extremos.

d) Estudia sus intervalos de monotonía.

6. Representa la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

7. A partir de la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, dibuja las gráficas de:

a) $g(x) = \dfrac{4}{x}$ b) $h(x) = \dfrac{1}{x} + 3$ c) $i(x) = \dfrac{1}{x-2}$

SOLUCIONES

1. $f(x) = x(x^2 - 3x - 9)$

a) $Df = (-\infty, \infty)$

b) Eje OX: $(0, 0)$, $\left(\dfrac{3 + 3\sqrt{5}}{2}, 0\right)$, $\left(\dfrac{3 - 3\sqrt{5}}{2}, 0\right)$; eje OY: $(0, 0)$

c) Negativa en $\left(-\infty, \dfrac{3-3\sqrt{5}}{2}\right)$ y en $\left(0, \dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}\right)$; Positiva en $\left(\dfrac{3-3\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ y en $\left(\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$.

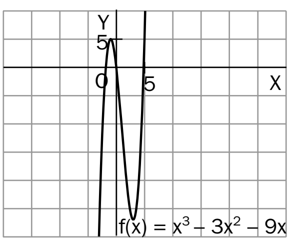
d) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ f tiene un máximo en $(-1, 5)$ y un mínimo en $(3, -27)$.

e) Crece en $(-\infty, -1)$ y en $(3, \infty)$; decrece en $(-1, 3)$.

f) $f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow$ f tiene un punto de inflexión en $(1, -11)$.

g) Es cóncava en $(-\infty, 1)$ y es convexa en $(1, \infty)$.

h)



2. Puesto que $f(0) = -4$, corta al eje OY en $(0, -4)$.

$f(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$, corta al eje OX en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

Puesto que $e^x > 0$, $x \in \mathbb{R}$, f tendrá el signo que tenga el polinomio; es decir, es positiva en $(-\infty, -2)$ y en $(2, \infty)$, y es negativa en $(-2, 2)$.

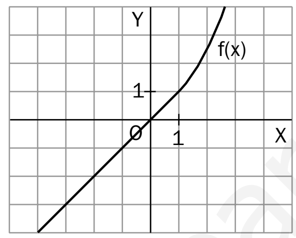
3. a) Si $x \longrightarrow 1$, $f(x) \longrightarrow \pm\infty \Rightarrow x = 1$ es una asíntota vertical por abajo y por arriba. Si $x \longrightarrow \pm\infty$, $f(x) \longrightarrow 0 \Rightarrow y = 0$ (eje OX) es asíntota horizontal por la izquierda y por la derecha.

b) Es siempre continua, por lo que no tiene asíntotas verticales. Si $x \longrightarrow \pm\infty$, $f(x) \longrightarrow 0 \Rightarrow f$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ (eje OX) por la izquierda y por la derecha.

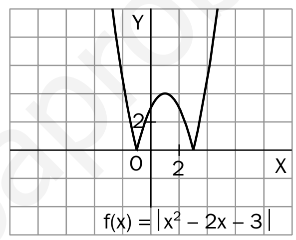
c) Si $x \longrightarrow 0$, $f(x) \longrightarrow \pm\infty \Rightarrow f$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$ (eje OY) por abajo y por arriba. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = 0 \Rightarrow f$ tiene una asíntota oblicua en $y = x$.

4. a) Es continua y derivable en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$ por ser polinómica en ambos. En $x = 1$ es continua, pues $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1$; y es derivable, pues $f'(1^-) = f'(1^+) = 1$.

b)



5. a)

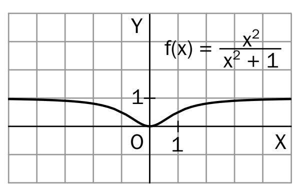


b) En $x = -1$, $x = 3$, porque, en ambos: $f'(x^-) \neq f'(x^+)$.

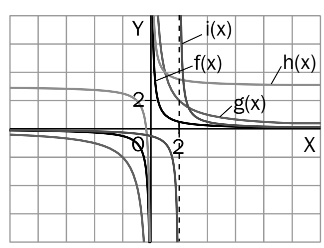
c) Tiene un máximo relativo en $(1, 4)$ y dos mínimos absolutos en $(-1, 0)$ y en $(3, 0)$.

d) Decrece en $(-\infty, -1)$ y en $(1, 3)$; crece en $(-1, 1)$ y en $(3, \infty)$.

6.



7.



10 Integral indefinida

1. Calcula las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int (6x^2 + 2e^x - \cos x)\, dx$ b) $\int 2x \cos x^2\, dx$ c) $\int \frac{e^x}{e^x + 4}\, dx$

2. Calcula las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int (\text{sen } 2x + 2 \text{ sen } x \cos x)\, dx$ b) $\int \sqrt[4]{x^3}\, dx$ c) $\int e^{5x+3}\, dx$

3. Calcula las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{5}{\sqrt{x}} - 2\right) dx$ b) $\int \frac{1}{5x}\, dx$ c) $\int \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}\, dx$

4. Realizando las operaciones, las siguientes integrales se convierten en inmediatas; calcúlalas:

a) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$ b) $\int x\sqrt{x}\, dx$ c) $\int 4x^2(x^3 - 2x^2)\, dx$

5. Realizando las operaciones, las siguientes integrales se convierten en inmediatas; calcúlalas:

a) $\int \frac{5x^4 - 3x^2 + 1}{x}\, dx$ b) $\int ((2x^2 + 1)^2 + 1)\, dx$ c) $\int 2x^{-2}(x - 2)^2\, dx$

6. Con una pequeña manipulación, las siguientes integrales se convierten en inmediatas; calcúlalas:

a) $\int \frac{3x}{1 + 4x^2}\, dx$ b) $\int \frac{4x + 8}{x^2 + 4x + 1}\, dx$ c) $\int \frac{5x^2}{\sqrt{x^3 + 5}}\, dx$

7. Las siguientes integrales se pueden resolver por el cambio de variable que se indica; calcúlalas:

a) $\int \text{sen } x \cos^3 x\, dx$ $(\text{sen } x = t)$ b) $\int \frac{2^x}{1 + 2^x}\, dx$ $(2^x = t)$ c) $\int \frac{\text{sen } (\text{L}x)}{x}\, dx$ $(\text{L}x = t)$

8. Las siguientes integrales se resuelven por el método de integración por partes; calcúlalas:

a) $\int (3 - x) \cos x\, dx$ b) $\int x \text{ sen } 3x\, dx$ c) $\int (x^2 - 1)e^x\, dx$

9. Las siguientes integrales se resuelven por el método de integración por partes; calcúlalas:

a) $\int \frac{\text{L}x}{x^2}\, dx$ b) $\int x^2 \text{ L}x\, dx$ c) $\int \frac{x}{e^x}\, dx$

10. Halla una función F tal que $F(2) = 0$ y tal que $F'(x) = 3x^2 - 5$.

11. Halla una función F cuya gráfica pasa por el punto $(0, 4)$ y tal que $F'(x) = xe^x$.

SOLUCIONES

1. a) $2x^3 - \text{sen } x + 2e^x + C$

b) $\text{sen } x^2 + C$

c) $\text{L}(e^x + 4) + C$

2. a) $-\cos 2x + C$

b) $\dfrac{4x\sqrt[4]{x^3}}{7} + C$

c) $\dfrac{e^{5x} + 3}{5} + C$

3. a) $-2x + 10\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + C$

b) $\dfrac{\text{L}x}{5} + C$

c) $\text{L}(x^2 - 5x + 6) + C$

4. a) $\dfrac{x^3}{3} + 2x - \dfrac{1}{x} + C$

b) $\dfrac{2x^2\sqrt{x}}{5} + C$

c) $\dfrac{2x^6}{3} - \dfrac{8x^5}{5} + C$

5. a) $\dfrac{5x^4}{4} - \dfrac{3x^2}{2} + \text{L}x + C$

b) $\dfrac{4x^5}{5} - \dfrac{4x^3}{3} + 2x + C$

c) $2x - \dfrac{8}{x} - 8\,\text{L}x + C$

6. a) $\dfrac{3}{8}\,\text{L}(1 + 4x^2) + C$

b) $2\text{L}(x^2 + 4x + 1) + C$

c) $\dfrac{10}{3}\sqrt{x^3 + 5} + C$

7. a) $-\dfrac{\cos^4 x}{4} + C$

b) $\dfrac{1}{\text{L}2}\,\text{L}(1 + 2^x) + C$

c) $-\cos(\text{L}x) + C$

8. a) $(3 - x)\,\text{sen } x - \cos x + C$

b) $-\dfrac{x\cos 3x}{3} + \dfrac{\text{sen } 3x}{9} + C$

c) $e^x(x^2 - 2x + 1) + C$

9. a) $-\dfrac{\text{L}x}{x} - \dfrac{1}{x} + C$

b) $\dfrac{x^3\text{L}x}{3} - \dfrac{x^3}{9} + C$

c) $-\dfrac{(x + 1)}{e^x} + C$

10. $F(x) = \displaystyle\int (3x^2 - 5)\,dx = x^3 - 5x + C$, puesto que $F(2) = 0 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = x^3 - 5x + 2$

11. $F(x) = \displaystyle\int xe^x\,dx = (x - 1)e^x + C$, puesto que $F(0) = 4 \Rightarrow C = 5 \Rightarrow F(x) = (x - 1)e^x + 5$

11 Integral definida

1. Calcula el área de los trapecios curvilíneos limitados por las siguientes funciones entre las abscisas que se indican:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ entre $a = 4$ y $b = 5$.

b) $f(x) = x^2e^x$ entre $a = 1$ y $b = 2$.

c) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 2}$ entre $a = 2$ y $b = 5$.

2. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_1^3 (x^2 + 3x + 2)\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x+1}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 2x\cos x^2\,dx$

3. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_2^5 \frac{4}{x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_4^6 \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

4. Calcula:

a) $\displaystyle\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 2x^3(x^2 + 3x)\,dx$

5. Calcula:

a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \operatorname{sen}^2 x\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$

6. Calcula:

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{x^2 + 9}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x\,dx$

7. Calcula:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^e \mathrm{L}x\,dx$

8. Calcula:

a) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^e x\mathrm{L}x\,dx$

9. Calcula:

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{6x}{x^2 + 1}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx$

10. Halla a para que la integral de la función $f(x) = 3x^2 + 2x + a$ en el intervalo [1, 4] sea igual a 6.

11. $f(x) = ax - ax^2$ encierra con el eje OX y las abscisas $x = 0$ y $x = 1$ un área de 2 unidades cuadradas. Halla el valor de a.

12. Se sabe que $4\displaystyle\int_0^b x\,dx = \int_0^b x^2\,dx$. Halla el valor de b.

SOLUCIONES

1. a) $S = \frac{f(5) + f(4)}{2}(5 - 4) = \frac{7 + 2}{2} =$

$= 4{,}5$ unidades cuadradas.

b) $S = \frac{f(2) + f(1)}{2}(2 - 1) = \frac{4e^2 + e}{2} \cong$

$\cong 16{,}14$ unidades cuadradas.

c) $S = \frac{f(5) + f(2)}{2}(5 - 2) = \frac{\frac{11}{32} + \frac{5}{8}}{2} 3 \cong$

$\cong 1{,}45$ unidades cuadradas.

2. a) $\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x \Big|_1^3 = \frac{57}{2} - \frac{23}{6} = \frac{74}{3}$

b) $\frac{e^{2x+1}}{2} \Big|_0^1 = \frac{e(e^2 - 1)}{2}$

c) $\operatorname{sen} x^2 \Big|_0^1 = \operatorname{sen} 1$

3. a) $-\frac{4}{x} \Big|_2^5 = -\frac{4}{5} + 2 = \frac{6}{5}$

b) $\mathrm{L}(x^2 - 5x + 6) \Big|_4^6 = \mathrm{L}12 - \mathrm{L}2 = \mathrm{L}6$

c) $2\sqrt{x} \Big|_1^4 = 4 - 2 = 2$

4. a) $\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{37}{6} - \frac{4}{3} = \frac{29}{6}$

b) $\frac{x^6}{3} + \frac{6x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{23}{15}$

5. a) $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

b) $\frac{e^{x^2}}{2} \Big|_0^1 = \frac{e - 1}{2}$

6. a) $\frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2 + 9) \Big|_0^3 = \frac{1}{2}(\mathrm{L}18 - \mathrm{L}9) = \frac{1}{2}\mathrm{L}2$

b) $\operatorname{sen} x - x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$

7. a) $\operatorname{tg} x - x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$

b) $x(\mathrm{L}x - 1) \big|_1^e = 0 + 1 = 1$

8. a) $e^x(x - 1) \big|_0^1 = 0 + 1 = 1$

b) $\frac{x^2(2\mathrm{L}x - 1)}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$

9. a) $3\mathrm{L}(x^2 + 1) \big|_1^3 = 3\mathrm{L}10 - 3\mathrm{L}2 = 3\mathrm{L}5$

b) $-\mathrm{L}(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\mathrm{L}2}{2} + \mathrm{L}1 = \frac{\mathrm{L}2}{2}$

10. $\int_1^4 (3x^2 + 2x + a)\, dx = x^3 + x^2 + ax \Big|_1^4 =$

$= (80 + 4a) - (2 + a) = 78 + 3a = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -24$

11. $\int_0^1 (ax - ax^2)\, dx = \frac{ax^2}{2} - \frac{ax^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 12$

12. $\left.\begin{array}{l} 4\int_0^b x\, dx = 2b^2 \\ \int_0^b x^2\, dx = \frac{b^3}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 2b^2 = \frac{b^3}{3} \Rightarrow b = 0,\ b = 6$

12 Aplicaciones de la integral definida

1. Calcula el área comprendida entre la curva $f(x) = x^2 + 2x + 5$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

2. Calcula el área del recinto encerrado por la gráfica de la función $f(x) = 4 - x^2$ y el eje OX.

3. Calcula el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

4. Halla el área de la región encerrada entre la parábola $f(x) = x^2 + 1$ y la recta $y = x + 7$.

5. Halla el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = 6 + 5x - x^2$ y la recta $y = 6$.

6. Halla el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = xe^x$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

7. Halla el área determinada por la curva $f(x) = x^3$ y la recta $y = 4x$.

8. Calcula el área encerrada por la curva $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

9. Calcula el área encerrada por las parábolas $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 4x - x^2$.

10. Halla el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ y su recta tangente en el origen.

11. Halla el área de la región encerrada por la función $f(x) = 3x - x^3$ y el eje OX.

SOLUCIONES

1. La parábola no corta al eje OX; por tanto:

$$\text{Área } (R) = \int_0^3 (x^2 + 2x + 5)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 5x \Big|_0^3 =$$
$= 33$ unidades cuadradas.

2. La parábola corta al eje OX en $x = -2$ y $x = 2$. Entre ambos valores es positiva y simétrica respecto al eje OY; por tanto, el área es:

$$\text{Área } (R) = 2\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = 2\left(4x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) =$$
$$= 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

3. Las regiones delimitadas por la curva y las rectas son simétricas respecto al eje OY; por tanto:

$$\text{Área } (R) = 2\int_0^1 x^3\,dx = 2\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \text{ unidades cuadradas.}$$

4. Para saber los puntos de corte de la recta y la parábola hay que resolver la ecuación $x^2 + 1 = x + 7$, cuyas soluciones son $x = -2$ y $x = 3$.

El área de la región pedida es:

$$\text{Área } (R) = \int_{-2}^3 (x + 7)\,dx - \int_{-2}^3 (x^2 + 1)\,dx =$$
$$= \int_{-2}^3 (6 + x - x^2)\,dx = 6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^3 =$$
$$= \frac{125}{6} \text{ unidades cuadradas.}$$

5. La recta y la parábola se cortan en los puntos $x = 0$ y $x = 5$. El área pedida es:

$$\text{Área } (R) = \int_0^5 ((6 + 5x - x^2) - 6)\,dx =$$
$$= \int_0^5 (5x - x^2)\,dx = \frac{125}{6} \text{ unidades cuadradas.}$$

6. Entre $x = 0$ y $x = 1$ $f(x)$ es positiva; por tanto:

$$\text{Área } (R) = \int_0^1 xe^x\,dx = e^x(x - 1)\Big|_0^1 = 0 + 1 =$$
$= 1$ unidad cuadrada.

7. La recta y la curva se cortan en $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$. Las regiones que delimitan encierran la misma área; por tanto:

$$\text{Área } (R) = 2\int_0^2 (4x - x^3)\,dx = 2\left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^2\right) =$$
$= 2(8 - 4) = 8$ unidades cuadradas.

8. Entre $x = 1$ y $x = 3$, la curva es positiva; por tanto:

$$\text{Área } (R) = \int_1^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{\mathrm{L}(x^2+1)}{2}\Big|_1^3 =$$
$$= \frac{\mathrm{L}10}{2} - \frac{\mathrm{L}2}{2} = \frac{\mathrm{L}5}{2} \text{ unidades cuadradas.}$$

9. Ambas parábolas se cortan en $x = 0$ y $x = 3$; por tanto:

$$\text{Área } (R) = \int_0^3 (4x - x^2)\,dx - \int_0^3 (x^2 - 2x)\,dx =$$
$$= \int_0^3 (6x - 2x^2)\,dx = 3x^2 - \frac{2x^3}{3}\Big|_0^3 =$$
$= 9$ unidades cuadradas.

10. La recta tangente en el origen es $y = 2x$, que corta a la curva en $x = 0$ y $x = 1$. Por tanto, el área pedida es:

$$\text{Área } (R) = \int_0^1 2x\,dx - \int_0^1 (x^3 - x^2 + 2x)\,dx =$$
$$= \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{1}{12} \text{ unidades cuadradas.}$$

11. La curva es simétrica respecto al origen y corta al eje OX en $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$. El área pedida es:

$$\text{Área } (R) = 2\int_0^{\sqrt{3}} (3x - x^3)\,dx =$$
$$= 2\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4}\right) =$$
$$= \frac{9}{2} \text{ unidades cuadradas.}$$

13 Combinatoria

1. Calcula n sabiendo que:

a) $V_{n,3} = V_{n,4}$ b) $V_{n,4} = 4V_{n-1,3}$ c) $V_{n,4} = 20V_{n,2}$ d) $V_{11,n} = 7\,920$

2. Escribe los tres primeros y los tres últimos factores del desarrollo de las siguientes expresiones:

a) $V_{m+1,n}$ b) $V_{m+1,n+1}$ c) $V_{x+3,y-1}$ d) $V_{2x+1,x-2}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $P_x = 72P_{x-2}$ b) $P_{x+1} = 132P_{x-1}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5C_{x,3} = 8C_{x-1,4}$ b) $2C_{x,4} = 2C_{x,3} - C_{x,2}$

5. ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden escribir con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 sin que se repita ninguno? ¿Cuántos empiezan por 3? ¿Cuántos empiezan por 3 y terminan en 5?

6. El número de variaciones de cierto número de elementos, tomados de cinco en cinco, es igual que el de las variaciones de los mismos elementos, tomados de cuatro en cuatro. Halla el número de elementos.

7. ¿De cuántas maneras se pueden sentar siete personas en un banco? ¿Y en una mesa redonda?

8. ¿Cuántos números mayores que un millón pueden formarse con los dígitos 0, 2, 2, 3, 3, 3 y 4?

9. Una bolsa contiene 8 bolas blancas y seis negras. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden extraer siete bolas, de forma que haya 5 blancas y 2 negras?

10. En un concurso literario hay asignados tres premios distintos para los tres mejores trabajos presentados. Si participan doce concursantes, ¿de cuántas maneras puede hacerse la distribución de premios?

11. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(3 - x)^5$ b) $(x + 1)^8$

SOLUCIONES

1. a) $V_{n,3} = V_{n,4}$

$n(n-1)(n-2) = n(n-1)(n-2)(n-3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n-3=1 \Leftrightarrow n=4$

b) $V_{n,4} = 4V_{n-1,3}$

$n(n-1)(n-2)(n-3) =$
$= 4(n-1)(n-2)(n-3) \Leftrightarrow n=4$

c) $V_{n,4} = 20V_{n,2}$

$n(n-1)(n-2)(n-3) = 20n(n-1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (n-2)(n-3) = 20 \Leftrightarrow n=7$

($n = -2$, no tiene sentido)

d) $V_{11,n} = 7\,920 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = V_{11,4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n=4$

2. a) $V_{m+1,n} = (m+1) \cdot m \cdot (m-1) \ldots (m-n+4) \cdot$
$\cdot (m-n+3) \cdot (m-n+2)$

b) $V_{m+1,n+1} = (m+1) \cdot m \cdot (m-1) \ldots$
$\ldots (m-n+3) \cdot (m-n+2) \cdot (m-n+1)$

c) $V_{x+3,y-1} = (x+3) \cdot (x+2) \cdot (x+1) \ldots$
$\ldots (x-y+7) \cdot (x-y+6) \cdot (x-y+5)$

d) $V_{2x+1,x-2} = (2x+1) \cdot 2x \cdot (2x-1) \ldots$
$\ldots (x+6) \cdot (x+5) \cdot (x+4)$

3. a) $x(x-1) = 72 \Leftrightarrow x = 9$ ($x = -8$ no es válida).

b) $(x+1)x = 132 \Leftrightarrow x = 11$ ($x = -12$ no es válida).

4. a) $5C_{x,3} = 8C_{x-1,4}$

$$5 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$$
$$= 8 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow 5x = 2(x-3)(x-4) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 19x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = 8;$

($x = \frac{3}{2}$ no es válida).

b) $2C_{x,4} = 2C_{x,3} - C_{x,2}$

$$2 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$
$$= 2 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{x(x-1)}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 4(x-2) - 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = 5;\ x = 4.$

5. $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Que empiecen por 3:
$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; (3 - - - -)

Que empiecen por 3 y terminen en 5:
$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; (3 - - - 5)

6. $V_{n,5} = V_{n,4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) =$
$= n(n-1)(n-2)(n-3) \Leftrightarrow n-4=1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = 5$

7. En un banco: $P_7 = 7! = 5\,040$

En una mesa redonda: $PC_7 = P_6 = 6! = 720$

8. $PR_7^{1,2,3,1} = \dfrac{7!}{2! \cdot 3!} = 420$, son los números distintos que podemos formar con las siete cifras dadas.

$PR_6^{2,3,1} = \dfrac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$, son los menores de un millón, es decir, los que tienen el cero a la izquierda.

Por tanto, mayores que un millón: $420 - 60 = 360$.

9. Grupos de 5 bolas blancas: $C_{8,5} = \binom{8}{5} = 56$

Grupos de 2 bolas negras: $C_{6,2} = \binom{6}{2} = \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$

Como cada grupo de bolas blancas se combina con cada grupo de bolas negras, se obtienen:

$C_{8,5} \cdot C_{6,2} = \binom{8}{5} \cdot \binom{6}{2} = 56 \cdot 15 = 840$ maneras diferentes.

10. Se trata de variaciones ordinarias: importa el orden de concesión de los premios; sin repetición, y una misma persona no puede recibir más que un premio.

$V_{12,3} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1\,320$

11. a) $(3-x)^5 = \binom{5}{0}3^5 - \binom{5}{1}3^4\,x + \binom{5}{2}3^3\,x^2 -$
$- \binom{5}{3}3^2\,x^3 + \binom{5}{4}3\,x^4 - \binom{5}{5}x^5 =$
$= 243 - 405x + 270x^2 - 90x^3 + 15x^4 - x^5$

b) $(x+1)^8 = \binom{8}{0}x^8 + \binom{8}{1}x^7 1 + \binom{8}{2}x^6 1^2 +$
$+ \binom{8}{3}x^5 1^3 + \binom{8}{4}x^4 1^4 + \binom{8}{5}x^3 1^5 + \binom{8}{6}x^2 1^6 +$
$+ \binom{8}{7}x^1 1^7 + \binom{8}{8}1^8 = x^8 + 8x^7 + 28x^6 +$
$+ 56x^5 + 70x^4 + 56x^3 + 28x^2 + 8x + 1$

14 Cálculo de probabilidades

1. En el experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de una moneda tres veces, encuentra:

a) El espacio muestral.

b) Los sucesos: *A*: «Aparece cara al menos dos veces».
B: «Aparece cara dos veces seguidas».
C: «No se obtiene dos veces seguidas el mismo resultado».

2. Las fichas de respuesta de una encuesta recogen los siguientes datos: el sexo, la edad (mayor o igual a 35 o menor de 35) y la respuesta a la pregunta planteada (Sí o No).

a) Describe las posibles tarjetas.

b) Enumera los elementos de cada uno de los siguientes sucesos:

- *S*1: «Es un hombre menor de 35 años».
- *S*2: «Es una mujer».
- *S*3: «Es una persona con 35 o más años que ha respondido Sí».
- *S*3: «Es una persona que ha respondido No o que tiene menos de 35 años».

3. Consideremos el experimento consistente en el lanzamiento de un dado, anotando la puntuación de la cara superior y los sucesos *A*: «Se obtiene un número mayor que 2» y *B*: «Se obtiene un número par»:

a) Describe el espacio de sucesos del experimento en cuestión.

b) Expresa por extensión los sucesos *A* y *B*.

c) Expresa: $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$.

4. Se tienen cinco cartas numeradas del uno al cinco; si se escogen al azar dos de ellas, ¿cuál es la probabilidad de que el número mayor sea 3?

5. ¿Qué probabilidad hay de que al levantar una ficha de dominó se obtenga un número de puntos mayor que 9 o un múltiplo de 4?

6. A un simposio asisten 100 congresistas, de los cuales 80 hablan inglés y 40 francés. ¿Qué probabilidad existe de que dos congresistas, escogidos al azar, se entiendan sin intérprete?

7. Sean *A* y *B* dos sucesos de un experimento aleatorio para los que se tiene:

$$p(A \cup B) = \frac{3}{4}; \qquad p(\overline{A}) = \frac{2}{3}; \qquad p(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Calcula: $p(A)$; $p(\mathrm{B})$; $p(A \cap \overline{B})$; $p(\overline{A} \cap B)$

8. Un dado está cargado de manera que los números pares tienen doble probabilidad de salir que los impares. Determina la probabilidad de los sucesos:

A: « Se obtiene un número par».

B: «Aparece un número primo».

C: «Se obtiene un número primo e impar».

SOLUCIONES

1. a) $E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$

b) $A = \{CCC, CCX, CXC, XCC\}$
$B = \{CCX, XCC\}$
$C = \{CXC, XCX\}$

2. a) Pongamos H y M para indicar el sexo (hombre o mujer); m y p para indicar la edad (igual o mayor de 35 y menor de 35); S y N para indicar Sí o No.

Según lo anteriormente expuesto, hay ocho tarjetas o resultados posibles:

$E = \{HmS, HmN, HpS, HpN, MmS, MmN, MpS, MpN\}$

b) $S1 = \{HpS, HpN\}$;
$S2 = \{MmS, MmN, MpS, MpN\}$;
$S3 = \{HmS, MmS\}$;
$S4 = \{HmN, HpS, HpN, MmN, MpS, MpN\}$

3. a) El espacio de sucesos está formado por todos los subconjuntos del espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, es decir:

$S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, ..., \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, ..., \{1, 6\}, \{2, 3\}, ..., \{2, 6\}, \{3, 4\}, ..., \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, ..., E\}$

En total hay $2^6 = 64$ sucesos relativos al experimento considerado.

Observación:
núm. de elementos de $S = 2^{\text{núm. de elementos de } E}$

b) A: «Se obtiene un número mayor que 2» $= \{3, 4, 5, 6\}$

B: «Se obtiene un número par» $= \{2, 4, 6\}$

c) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{4, 6\}$,
$\overline{A \cup B} = \{1\}$, $\overline{A} = \{1, 2\}$, $\overline{B} = \{1, 3, 5\}$,
$\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$, $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 3, 5\}$

4. Puesto que no se dice nada en contra, se supone que los sucesos elementales son equiprobables.

Los casos posibles son $C_{5,2} = 10$.

El suceso A: «El número mayor sea 3» $= \{(1, 3), (2, 3)\}$; por tanto, casos favorables: 2.

$$p(A) = \frac{2}{10} = 0,2$$

5. Hay 28 sucesos elementales, puesto que 28 son las fichas del dominó.

Consideramos:

Suceso A: «Número de puntos mayor que 9» $= \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\}$

Suceso B: «Número de puntos múltiplo de 4» $= \{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (6, 6), (0, 0)\}$

Suceso $A \cap B$: «Número de puntos mayor que 9 y múltiplo de 4» $= \{(6, 6)\}$. Los sucesos A y B son compatibles; por tanto:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{4}{28} + \frac{8}{28} - \frac{1}{28} = \frac{11}{28}$$

6. Sea el suceso I: «Entenderse en inglés», y F: «Entenderse en francés». Se pide calcular la probabilidad del suceso $I \cup F$; ahora bien, por los datos del enunciado se deduce que hay congresistas bilingües, exactamente $20 = 80 + 40 - 100$, lo que nos dice que los sucesos I y F son compatibles.

$$p(I \cup F) = p(I) + p(F) - p(I \cap F) = \frac{\binom{80}{2}}{\binom{100}{2}} + \frac{\binom{40}{2}}{\binom{100}{2}} - \frac{\binom{20}{2}}{\binom{100}{2}} = 0,757$$

7. $$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$p(B) = p(A \cup B) - p(A) + p(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

$$p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

8. Las probabilidades de los sucesos elementales:

$p(1) = p(3) = p(5) = x$; $p(2) + p(4) + p(6) = 2x$

Como $p(E) = 1 = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 9x \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

$$p(A) = p(\{2, 4, 6\}) = 6x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$p(B) = p(\{1, 2, 3, 5\}) = 5x = \frac{5}{9}$$

$$p(C) = p(\{1, 3, 5\}) = 3x = \frac{1}{3}$$

15 Probabilidad condicionada

1. Se lanzan un par de dados cúbicos. Sabiendo que la suma de los puntos es 6, calcula la probabilidad de que solo en uno de los dados aparezca un 2.

2. Un operario tiene una probabilidad de 0,7 de ser cambiado de sección, y la probabilidad de ser ascendido y cambiado es de 0,6. Calcula:

a) La probabilidad de ser ascendido, en el supuesto de que haya sido cambiado de sección.

b) La probabilidad de que no sea ascendido, en el supuesto de que haya sido cambiado.

3. Se lanza al aire un dado cúbico y se anota la puntuación de la cara superior en reposo. Se consideran los sucesos A: «Se obtiene un número mayor que 4»; B: «Aparece un múltiplo de 3»; C: «Se obtiene un número impar»; D: «Aparece un número mayor o igual que 5».

a) Comprueba que los sucesos A y B son dependientes.

b) Comprueba que los sucesos C y D son independientes.

4. Una urna contiene 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules; si se extraen 3 bolas aleatoriamente sin reemplazamiento, calcula la probabilidad de que:

a) Las 3 bolas sean rojas.

b) Las 3 bolas sean blancas.

5. En cierta facultad el 25 % de los estudiantes suspende las matemáticas, el 15 % suspende la química y el 10 % suspende las dos asignaturas. Se selecciona un alumno al azar; determina la probabilidad de que:

a) Suspenda las matemáticas, en el supuesto de que haya suspendido la química.

b) Apruebe la química, en el supuesto de que haya suspendido las matemáticas.

c) Suspenda las matemáticas o la química.

6. Se tienen dos urnas, A y B. En A hay 6 bolas blancas y 4 negras; y en B, 5 blancas y 8 negras. Tomamos una urna al azar y de ella extraemos dos bolas; calcula la probabilidad de que sean:

a) Las dos negras.

b) Una de cada color.

7. Las probabilidades de que un artículo proceda de una fábrica A o de una B son 0,6 y 0,4, respectivamente. La fábrica A produce artículos defectuosos con probabilidad 0,01, y la B, con probabilidad 0,05. Se observa un artículo y resulta defectuoso. Calcula la probabilidad de que provenga de la fábrica A.

SOLUCIONES

1. A: «La suma es 6» = $\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\} \Rightarrow p(A) = \frac{5}{36}$

B: «Aparece 2 en uno de los dados» = $\{(2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (1, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$

Aplicando las expresiones de la probabilidad condicionada: $A \cap B = \{(2, 4), (4, 2)\}$

$$p(B / A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

2. a) C: «Ser cambiado» y A: «Ser ascendido»

$$p(A / C) = \frac{p(A \cap C)}{p(C)} = \frac{0,6}{0,7} = 0,857$$

b) $p(\overline{A} / C) = \dfrac{p(\overline{A} \cap C)}{p(C)} = 1 - p(A / C) =$
$= 1 - 0,857 = 0,143$

3. El espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) $A = \{5, 6\} \Rightarrow p(A) = \frac{1}{3}$;

$B = \{3, 6\} \Rightarrow p(B) = \frac{1}{3}$;

$B \cap A = \{6\} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3}$

Por tanto, son dependientes.

b) $C = \{1, 3, 5\} \Rightarrow p(C) = \frac{1}{2}$;

$D = \{5, 6\} \Rightarrow p(D) = \frac{1}{3}$;

$D \cap C = \{5\} \Rightarrow p(D \cap C) = \frac{1}{6}$

$P(D \cap C) = \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$

Así pues, son independientes.

4. a) R_i: «La i-ésima bola es roja», R: «3 bolas rojas»

$p(R) = p(R_1 \cap R_2 \cap R_3) =$

$= p(R_1) \cdot p(R_2 / R_1) \cdot p(R_3 / R_1 \cap R_2) =$

$= \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} = \frac{14}{285}$

b) $p(B) = p(B_1 \cap B_2 \cap B_3) =$

$p(B_1) \cdot p(B_2 / B_1) \cdot p(B_3 / B_1 \cap B_2) =$

$= \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{1\,140}$

5. $p(M) = 0,25$; $p(Q) = 0,15$;

$p(M \cap Q) = 0,10$; $p(\overline{Q} \cap M) = 0,25 - 0,10 = 0,15$

a) $p(M / Q) = \dfrac{p(M \cap Q)}{p(Q)} = \dfrac{0,10}{0,15} = \dfrac{2}{3}$

b) $p(\overline{Q} / M) = \dfrac{p(\overline{Q} \cap M)}{p(M)} = \dfrac{0,15}{0,25} = \dfrac{3}{5}$

c) $p(M \cup Q) = p(M) + p(Q) - p(M \cap Q) = 0,3$

6. $N \equiv$ «Obtener dos bolas negras»
$A \equiv$ «Elegir la urna A»
$\overline{A} \equiv$ «Elegir la urna B»
$C \equiv$ «Obtener una bola blanca y otra negra»

a) $p(N) = p(A) \cdot p(N / A) + p(\overline{A}) \cdot p(N / \overline{A}) =$

$$= 0,5 \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} + 0,5 \cdot \frac{\binom{8}{2}}{\binom{13}{2}} = 0,246$$

b) $p(C) = p(A) \cdot p(C / A) + p(\overline{A}) \cdot p(C / \overline{A}) =$

$$= 0,5 \cdot 2 \cdot \frac{6 \cdot 4}{\binom{10}{2}} + 0,5 \cdot 2 \cdot \frac{5 \cdot 8}{\binom{13}{2}} = 0,523$$

7. $A \equiv$ «El artículo observado procede de la fábrica A»

$B \equiv$ «El artículo observado procede de la fábrica B»

$D \equiv$ «El artículo observado es defectuoso»

$$p(A / D) = \frac{p(A) \cdot p(D / A)}{p(A) \cdot p(D / A) + p(B) \cdot p(D / B)} =$$
$$= \frac{0,6 \cdot 0,01}{0,6 \cdot 0,01 + 0,4 \cdot 0,05} = \frac{3}{13} = 0,23$$

16 Teoría de muestras

1. Halla la media, la cuasivarianza y la desviación típica muestral de las series estadísticas:

a) 1 3 4 6 8 9 11 13 16

b)

Variable	4	7	10	15	20
Frec. abs.	2	5	8	6	1

2. Utilizando las tablas de la distribución normal tipificada, calcula las siguientes áreas:

a) Entre 0 y 0,75 b) Entre -2 y 1,35 c) A la derecha de -1

3. Si Z es una variable aleatoria continua con distribución $N(0, 1)$, calcula:

a) $p(Z \geqslant -1{,}13)$ c) $p(Z \leqslant 1{,}98)$ e) $p(-0{,}79 < Z \leqslant 3{,}02)$

b) $p(Z \geqslant 1{,}13)$ d) $p(Z \leqslant -1{,}98)$

4. Sea X una variable aleatoria continua con distribución $N(10, 2)$, calcula:

a) $p(X \geqslant 12)$ b) $p(9{,}5 < X \leqslant 10{,}5)$ c) $p(16 < X \leqslant 30)$

5. Supongamos una población formada por los elementos 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Averigua cuántas muestras distintas se pueden formar...

a) de tamaño 2 b) de tamaño 3 c) de tamaño 5

6. Un Ayuntamiento va a realizar una encuesta para saber la opinión de los ciudadanos sobre las medidas tomadas en materia de medio ambiente.

El Ayuntamiento pretende que la muestra contenga información de distintas zonas de la ciudad. Si se tiene la siguiente distribución de habitantes:

Zona	A	B	C
N.º habitantes	25 063	40 291	87 646

y si el tamaño de la muestra es de 200 personas, determina el tamaño muestral, redondeando si es preciso, de cada estrato.

7. Cinco de cada cien bombillas producidas por una fábrica son defectuosas. Se toman muestras aleatorias de 200 unidades.

a) ¿Cuál es la distribución que sigue la proporción de bombillas defectuosas en la muestra?

b) Halla la probabilidad de que en la muestra haya menos de 12 piezas defectuosas.

SOLUCIONES

1. a) Serie estadística con datos no agrupados:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 7{,}88;\ \sigma_{n-1}^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{9-1} = 24{,}11$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{9}} = 4{,}63$$

b) Serie estadística con datos agrupados:

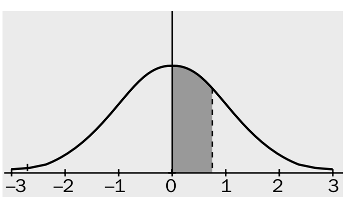
$$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{n} =$$

$$= \frac{4\cdot 2 + 7\cdot 5 + 10\cdot 8 + 15\cdot 6 + 20\cdot 1}{22} = 10{,}59$$

$$\sigma_{n-1}^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i}{n-1} = 17{,}11$$

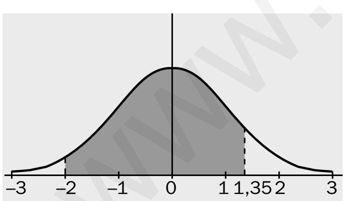
$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i}{n}} = 4{,}04$$

2. a)



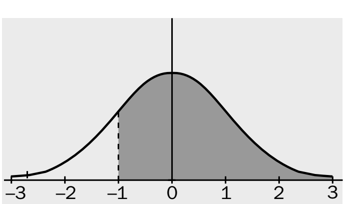
Área entre 0 y 0,75 = Área a la izq. de 0,75 − − Área a la izq. de cero = 0,7734 − 0,5 = = 0,2734.

b)



Área entre −2 y 1,35 = Área a la izq. de 1,35 − − Área a la izq. de −2 = Área a la izq. de 1,35 − − [1 − Área a la izq. de 2] = 0,9115 − − [1 − 0,9772] = 0,8887.

c)



Área a la dcha. de −1 = Área a la izq. de 1 = 0,8413.

3. a) $p(Z \geqslant -1{,}13) = p(Z \leqslant 1{,}13) = 0{,}8708$.

b) $p(Z \geqslant 1{,}13) = 1 - p(Z < 1{,}13) = 0{,}1292$.

c) $p(Z \leqslant 1{,}98) = 0{,}9761$.

d) $p(Z \leqslant -1{,}98) = 1 - p(Z < 1{,}98) = 0{,}0239$.

e) $p(-0{,}79 < Z \leqslant 3{,}02) =$
$= p(Z \leqslant 3{,}02) - p(Z < -0{,}79) =$
$= 0{,}9987 - [1 - p(Z \leqslant 0{,}79)] =$
$= 0{,}9987 - [1 - 0{,}7852] = 0{,}7839$.

4. a) $p(X \geqslant 12) = p\left(Z \geqslant \frac{12-10}{2}\right) = p(Z \geqslant 1) =$
$= 1 - p(Z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$.

b) $p(9{,}5 < X \leqslant 10{,}5) =$
$$= p\left(\frac{9{,}5-10}{2} < Z \leqslant \frac{10{,}5-10}{2}\right) =$$
$= p(-0{,}25 < Z \leqslant 0{,}25) = 2 \cdot [(p \leqslant 0{,}25) - 0{,}5] =$
$= 2 \cdot [0{,}5987 - 0{,}5] = 0{,}1974$.

c) $p(16 < X \leqslant 30) =$
$$= p\left(\frac{16-10}{2} < Z \leqslant \frac{18-10}{2}\right) = p(3 < Z \leqslant 4) =$$
$= p(Z \leqslant 4) - p(Z \leqslant 3) = 0{,}0013$.

5. Como la población es finita con pocos elementos, el muestreo se realiza con reemplazamiento; por tanto:

a) $n = 2 \Rightarrow VR_{8,2} = 64$ muestras.

b) $n = 3 \Rightarrow VR_{8,3} = 512$ muestras.

c) $n = 5 \Rightarrow VR_{8,5} = 32\,768$ muestras.

6. El número de habitantes susceptible de ser encuestado es: 25 063 + 40 291 + 87 646 = 153 000.

El número de integrantes de la muestra de cada zona es:

Zona A: $\frac{25\,063}{153\,000} \times 200 = 32{,}76 \approx 33$ personas.

Zona B: $\frac{40\,291}{153\,000} \times 200 = 52{,}66 \approx 53$ personas.

Zona C: $\frac{87\,646}{153\,000} \times 200 = 114{,}56 \approx 114$ personas.

7. La proporción de bombillas defectuosas es $p = 0{,}05$.

a) La variable aleatoria «proporción de bombillas defectuosas» tiene:

Media: $\mu = p = 0{,}05$.

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} =$
$= \sqrt{\frac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{200}} = 0{,}015$

La distribución en el muestreo que sigue dicha proporción es $N(0{,}05;\ 0{,}015)$.

b) $p\left(p < \frac{12}{200}\right) = p(p < 0{,}06) =$
$$= p\left(Z < \frac{0{,}06 - 0{,}05}{0{,}015}\right) = p(Z < 0{,}66) = 0{,}745.$$

17 Intervalos de confianza

1. Se ha tomado, al azar, una muestra de 15 pymes (pequeñas y medianas empresas) y se les ha preguntado por el número de trabajadores. Los resultados han sido: 8, 5, 2, 6, 14, 4, 5, 9, 20, 7, 10, 12, 14, 6, 3.

a) Calcula la media aritmética y la varianza muestrales.

b) Calcula la cuasivarianza muestral.

c) ¿Qué relación existe entre la varianza y la cuasivarianza muestrales?

2. Utiliza las tablas de la distribución normal tipificada y halla los valores críticos tales que el área rayada tome los valores:

a) Área rayada = 0,8624.

b) Área rayada = 0,98.

c) Área rayada = 0,75.

3. La media de los pesos de 500 estudiantes de un determinado centro es 68 kg y la desviación típica 6 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, halla:

a) El número de estudiantes que pesan entre 65 y 71 kg.

b) El número de estudiantes que pesan menos de 60 kg.

4. La media de los diámetros interiores de tubos de acero es 12,75 cm, con una desviación típica de 0,75 cm. El propósito para el que se destinan estos tubos permite una tolerancia máxima en el diámetro entre 11,75 y 13,75 cm, suponiendo que los diámetros se distribuyen normalmente.

a) Determina el porcentaje de tubos defectuosos.

b) ¿Qué intervalo centrado en 12,75 contiene al 50 % de la población de tubos?

c) Si la producción es de 5 000 unidades, ¿cuántos se espera que tengan un diámetro superior a 14 cm?

5. Una muestra de 100 votantes elegidos al azar, entre todos los de un distrito determinado, indicó que el 55 % de ellos estaba a favor de un determinado candidato *A*. Halla un intervalo de confianza para el parámetro «proporción de votantes favorables al candidato *A*» al nivel del:

a) 95 %

b) 99,73 %

6. A dos grupos de enfermos *A* y *B*, formados por 50 y 100 individuos, respectivamente, se les ha suministrado, al primero, un somnífero nuevo, y al segundo, uno convencional. Para los pacientes del grupo *A*, el número medio de horas de sueño ha sido 7,82 horas, con una desviación típica igual a 0,24 horas. Para los del grupo *B*: 6,75 horas y 0,30 horas. Calcula el intervalo de confianza para la diferencia del número medio de horas de sueño inducidas por los dos somníferos para un nivel del:

a) 95 %

b) 99 %

SOLUCIONES

1. a) Media aritmética muestral: $\bar{x} = 8{,}33$

Varianza muestral:

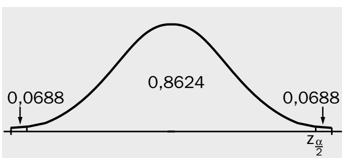
$$s^2 = \frac{\sum (x_i - 8{,}33)^2}{15} = 22{,}62$$

b) Cuasivarianza muestral:

$$\hat{s}^2 = \frac{\sum (x_i - 8{,}33)^2}{15 - 1} = 24{,}24$$

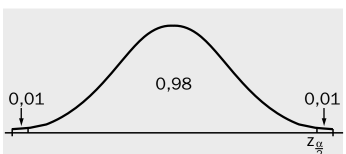
c) $\dfrac{n\, s^2}{n-1} = \hat{s}^2$; en efecto: $\dfrac{15 \cdot 22{,}62}{14} = 24{,}24$

2. a)



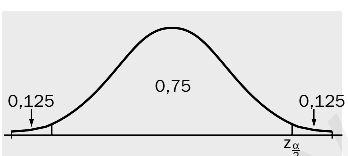
$p(Z \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}8624 + 0{,}0688;\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}49$

b)



$p(Z \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}98 + 0{,}01 = 0{,}99;\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33$

c)



$p(Z \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}75 + 0{,}125 = 0{,}875;\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}15$

3. La variable peso, X, se distribuye según una $N(68, 6)$.

a) $p(65 < X \leqslant 71) = p\left(\dfrac{65-68}{6} < Z \leqslant \dfrac{71-68}{6}\right) =$

$= p(-0{,}5 < Z \leqslant 0{,}5) = 2 \cdot [p(Z \leqslant 0{,}5) - 0{,}5] =$
$= 2 \cdot [0{,}6915 - 0{,}5] = 0{,}383.$

El número de estudiantes con el peso entre 65 y 71 kg es: $500 \cdot 0{,}3830 = 191{,}5 \approx 191$ ó 192.

b) $p(X < 60) = p\left(Z < \dfrac{60-68}{6}\right) = p(Z < -1{,}33) =$

$= 1 - p(Z \leqslant 1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$

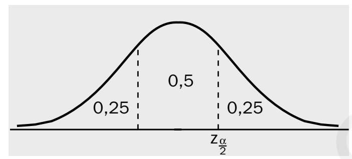
El número de estudiantes con el peso menor de 60 kg es: $500 \cdot 0{,}0918 = 45{,}9 \approx 46$.

4. a) p(defectuoso) = la suma de las áreas a la izquierda de $\dfrac{11{,}75-12{,}75}{0{,}75}$ y a la derecha de $\dfrac{13{,}75-12{,}75}{0{,}75}$, es decir:

$1 - p(-1{,}33 < Z \leqslant 1{,}33) = 1 - 0{,}8164 =$
$= 0{,}1836.$

Porcentaje de tubos defectuosos: 18,36 %.

b)



$P(Z \leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75;\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 0{,}675.$

Intervalo: $(12{,}75 - 0{,}675,\ 12{,}75 + 0{,}675) =$
$= (12{,}075,\ 13{,}425)$

c) Si la producción es de 5 000 unidades, el número de tubos con diámetro superior a 14 cm es igual a:

$5\,000 \cdot p\left(Z > \dfrac{14-12{,}75}{0{,}75}\right) =$

$= 5\,000 \cdot [1 - p(Z \leqslant 1{,}67)] = 237{,}5 \approx 237$ ó 238 tubos.

5. $n = 100;\ \hat{p} = 0{,}55 \longrightarrow \sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}0497$

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow p\left(Z \leqslant Z_{\frac{0{,}05}{2}}\right) =$

$= 0{,}95 + \dfrac{0{,}05}{2} = 0{,}975 \Rightarrow Z_{\frac{0{,}05}{2}} = 1{,}96$

IC: $\left(\hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\right) =$

$= (0{,}55 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}0497) = (0{,}453;\ 0{,}647)$

b) $1 - \alpha = 0{,}9973 \Rightarrow p\left(Z \leqslant Z_{\frac{0{,}0027}{2}}\right) =$

$= 0{,}9973 + \dfrac{0{,}0027}{2} = 0{,}99865 \Rightarrow Z_{\frac{0{,}0027}{2}} = 3$

IC: $\left(\hat{p} \pm Z_{\frac{a}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right) =$

$= (0{,}55 \pm 3 \cdot 0{,}0497 = (0{,}4009;\ 0{,}6991)$

6. El intervalo de confianza para la diferencia de medias:

$$IC = \left(\bar{x}_A - \bar{x}_B \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}\right)$$

a) Para un nivel del 95 %, $z_{\frac{0{,}05}{2}} = 1{,}96$.

$$IC = \left(7{,}82 - 6{,}75 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}24^2}{50} + \frac{0{,}30^2}{100}}\right)$$

$$= \left(1{,}07 \pm 1{,}96 \cdot \frac{0{,}45299}{10}\right) = (0{,}981;\ 1{,}159)$$

b) Para un nivel del 99 %, $z_{\frac{0{,}01}{2}} = 2{,}58$

$$IC\text{: } \left(1{,}07 \pm 2{,}58 \cdot \frac{0{,}4529}{10}\right) = (0{,}953;\ 1{,}187).$$

18 Contraste de hipótesis

1. Formula la hipótesis nula y una hipótesis alternativa en los siguientes casos:

a) Decidir si una moneda está cargada.

b) El fabricante de un medicamento dice que el mismo tiene un 90 % de efectividad en el alivio de una dolencia.

c) Se sabe que los cables producidos por una determinada empresa tienen una resistencia media a la rotura de 1 800 kg y una desviación típica de 100 kg. Mediante una nueva técnica en el proceso de fabricación se aspira a que esta resistencia media pueda ser incrementada.

2. Determina los valores críticos a los niveles de significación del 0,5 %; 0,2 %; 1 %; y 5 %, si la distribución es $N(0, 1)$, para contrastes bilaterales y unilaterales.

3. La probabilidad de obtener entre 80 y 120 caras inclusive, en 200 lanzamientos de una moneda es 0,9962.

Para ensayar la hipótesis de que la moneda está bien construida, se toma la siguiente regla de decisión: se acepta la hipótesis si el número de caras, en una serie de 200 lanzamientos, se encuentra entre 80 y 120, ambos inclusive; de otro modo, se rechaza.

a) Halla la probabilidad de rechazar la hipótesis cuando en realidad es cierta.

b) Interpretación gráfica.

c) ¿Qué conclusión sacarías si en la muestra de 200 lanzamientos se obtuvieran 120 caras?

4. Una urna contiene bolas negras y blancas. Para contrastar la hipótesis «proporciones iguales de bolas blancas y negras», se toma una muestra mediante la extracción de 100 bolas con reemplazamiento, anotando los colores de las bolas extraídas, y se adopta la regla de decisión: se acepta la hipótesis si se obtienen entre 45 y 55 bolas negras, ambos valores incluidos; se rechaza en caso contrario.

a) Halla la probabilidad de rechazar la hipótesis cuando en realidad es correcta.

b) Interpretación gráfica de la regla de decisión.

5. Un laboratorio expide un preparado farmaceútico envasado. El departamento de control afirma que los pesos de los envases se distribuyen normalmente con media 20 g y desviación típica 3 g.

Para contrastar esta afirmación se toma una muestra aleatoria de 25 envases y observamos que el peso medio es de 19,5 g. ¿Qué se puede decir al respecto si el nivel de significación ha de ser del 5 %?

6. El porcentaje de notas iguales o superiores a 8 puntos en un curso de matemáticas aplicadas de una universidad durante la última década ha sido del 10 %. En el último año hubo 40 de estas notas en un grupo de 300 estudiantes. Contrasta la significación de este resultado al nivel 0,1.

SOLUCIONES

1. a) $H_0 : p = 0{,}5$; donde p es la probabilidad de cara.
$H_1 : p \neq 0{,}5$, o bien, $H_1 : p > 0{,}5$; $H_1 : p < 0{,}5$

b) $H_0 : p = 0{,}9$
$H_1 : p < 0{,}9$ (p es la probabilidad de alivio).

c) $H_0 : \mu = 1\,800$ kg (no cambia la resistencia).
$H_1 : \mu > 1\,800$ kg (hay cambio en la resistencia).

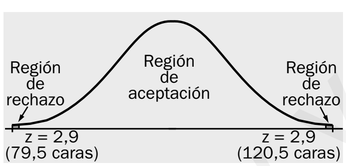
2.

Nivel de significación	Valores críticos Contraste bilateral	Valores críticos Contraste unilateral
5 % = 0,05	±1,96	±1,645
1 % = 0,01	±2,58	±2,33
0,5 % = 0,005	±2,81	±2,58
0,2 % = 0,002	±3,08	±2,88

3. $p(80 \leq \text{n.º de caras} \leq 120) = 0{,}9962$

a) $1 - 0{,}9962 = 0{,}0038$ es la probabilidad de obtener menos de 80 o más de 120 caras, si la moneda está bien construida, por lo que la probabilidad de rechazar la hipótesis cuando es correcta es 0,0038.

b)



Si en 200 lanzamientos se obtienen valores tales que la normal tipificada $Z \in (-2{,}9,\ 2{,}9)$, se acepta la hipótesis; en caso contrario, se rechaza y se decide que la moneda está mal construida.

c) $H_0 : p = 0{,}5 = p_0$ (p probabilidad de cara, moneda bien construida); $H_1 : p \neq 0{,}5$

La proporción $\hat{p}$ sigue una distribución

$$N\left(p_0,\ \sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}\right) : N\left(0{,}5,\ \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{200}}\right) =$$

$$= N(0{,}5,\ 0{,}035)$$

O bien, la variable «número de caras»:

$$N\left(100,\ \sqrt{\frac{100 \cdot 100}{200}}\right) = N(100,\ 5\sqrt{2})$$

número de caras es 120 $\Rightarrow \dfrac{120 - 100}{5\sqrt{2}} = 2{,}82$,

que está dentro de la región de aceptación.

4. La variable aleatoria discreta X: número de bolas negras, sigue una $B(100,\ 0{,}5)$ que aproximamos por la normal, con lo que X' sigue una $N(50,\ 5)$.

$$p(45 < X \leq 55) = p(44{,}5 < X' \leq 55{,}5) =$$

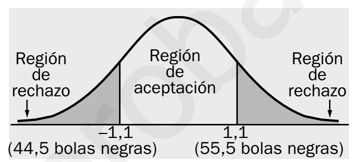
$$= p\left(\frac{44{,}5 - 50}{5} < Z \leq \frac{55{,}5 - 50}{5}\right) =$$

$$= p(-1{,}1 < Z \leq 1{,}1) = 2p[(Z \leq 1{,}1) - 0{,}5] =$$

$$= 2 \cdot 0{,}3643 = 0{,}7286.$$

a) La probabilidad de rechazar la hipótesis «proporciones iguales», cuando sea correcta, es:
$1 - 0{,}7286 = 0{,}2714$.

b)



Nivel de significación: $\alpha = 0{,}2714$.

5. $H_0 : \mu = 20 \text{ g} = \mu_0$; $H_1 : \mu \neq 20$ g

Contraste bilateral, ya que $\mu > 20$, o bien, $\mu < 20$.

- Estadístico del contraste: la media muestral

$$\overline{X}: \longrightarrow N\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right): N(20;\ 0{,}6);$$

$$Z = \frac{\overline{x} - 20}{0{,}6} \longrightarrow N(0,\ 1)$$

- Nivel de significación $\alpha = 0{,}05$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$-1{,}96 = \frac{\overline{x} - 20}{0{,}6} \Rightarrow \overline{x} = 20 - 1{,}96 \cdot \frac{3}{5} = 18{,}824$$

$$1{,}96 = \frac{\overline{x} + 20}{0{,}6} \Rightarrow \overline{x} = 20 + 1{,}96 \cdot \frac{3}{5} = 21{,}176$$

Como $19{,}5 \in (18{,}824;\ 21{,}176)$, se acepta la hipótesis nula, al nivel de significación del 5 %.

6. Formulación de las hipótesis:

$H_0 : p = 0{,}1 = p_0$
$H_1 : p \neq 0{,}1$ es un contraste bilateral.

La proporción $\hat{p}$ sigue una distribución:

$$N\left(p_0,\ \sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}\right): N(0{,}1;\ 0{,}017)$$

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1 - p_0)}{n}}} = \frac{\hat{p} - 0{,}1}{0{,}017} \longrightarrow N(0,\ 1)$$

Para $\alpha = 0{,}1$ la región de aceptación es: $(-1{,}645;\ 1{,}645)$

$$z = \frac{0{,}133 - 0{,}1}{0{,}017} = 1{,}94 \notin (-1{,}645;\ 1{,}645)$$

Se rechaza H_0 y hemos de aceptar que el porcentaje de notas iguales o superiores a 8 no es del 10 %.