Unidad 5

DERIVADAS. APLICACIONES

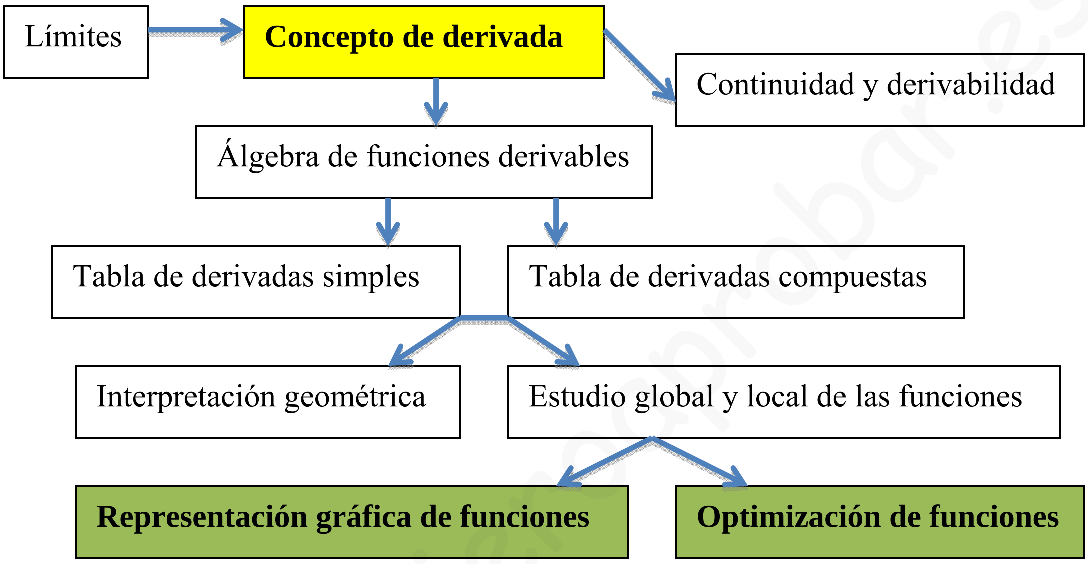
CONTENIDOS

Objetivos fundamentales

1. Conocer el concepto de derivada de una función en un punto y saber calcular derivadas de funciones sencillas, mediante la aplicación de la definición.
2. Saber calcular la función derivada de las funciones elementales así como de funciones compuestas.

3. Conocer la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto y saber aplicarla en la resolución de problemas.
4. Interpretar la derivabilidad de una función a partir de su representación gráfica.
5. Saber calcular la derivada segunda, tercera y cuarta de una función.
6. Estudiar global y localmente una función.
7. Representar gráficamente funciones polinómicas, racionales y definidas a trozos.
8. Optimizar funciones sencillas y resolver problemas donde haya que optimizar una función.

0.- MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



1.- INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Los orígenes del Cálculo estuvieron motivados por el deseo de resolver diversos problemas vinculados al movimiento de los cuerpos, así como problemas de tipo geométrico de importancia en Óptica y problemas de cálculo de valores máximos y mínimos de una función dada.

En el siglo XVII Newton (1642 – 1727) y Leibniz (1646 – 1716) descubren independientemente el *Análisis Matemático* o *Cálculo Infinitesimal*[1], una potentísima herramienta que revolucionó el tratamiento matemático de la Física y la Geometría, que más tarde impregnaría las más diversas ramas de la matemática, como la Estadística o la Teoría de Números y que a partir del S. XX se aplica en prácticamente todas las disciplinas (Economía, Ecología…).

Esencialmente, el Cálculo Infinitesimal consistía por una parte en *analizar* o descomponer la dependencia entre varias magnitudes estudiando el comportamiento de unas al variar o *diferenciar* levemente otras (lo que constituía el *Cálculo Diferencial)* y por otra parte en *integrar* los resultados

[1] Si bien los trabajos de Newton y Leibniz son decisivos por sus aportaciones e influencia, no hay que olvidar que ellos son el punto culminante de un largo proceso en el que han participado científicos de la talla de Johannes Kepler (1571 - 1630), René Descartes (1596 - 1650), Pierre de Fermat (1601 - 1665), John Wallis (1616 -1703) e Isaac Barrow (1630 - 1677) entre otros.

diferenciales para obtener de nuevo resultados globales sobre las magnitudes en consideración (el llamado *Cálculo Integral*).

2.- TASA DE VARIACIÓN

Muchas leyes de la Física, la Química, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable "dependiente" y con otra variable "independiente" x, lo que suele escribirse en la forma $y = f(x)$. Si la variable independiente cambia de un valor inicial a a otro x, la variable y lo hace de $f(a)$ a $f(x)$. La *razón de cambio promedio (o tasa de variación media) de* $y = f(x)$ *con respecto a x en el intervalo* $[a,x]$ *es:*

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \equiv \text{Tvm}[a,x]$$

Con frecuencia interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar "*razón de cambio puntual* (*o instantánea*) de $y = f(x)$ *con respecto a x en el punto a" como:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \equiv \text{Tvi}(a)$$

Ejemplo 1. La tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en los intervalos $[-2,-1]$ y $[1,3]$ vale:

$$Tvm[-2,-1] = \frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = -5$$
$$Tvm[1,3] = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = 2$$

Observa que, en el primer caso, la Tvm coincide con la variación de la función, pues nos hemos trasladado sólo una unidad a la derecha. En cambio, en el segundo caso, la Tvm es la media de las variaciones unitarias, que son:

$$Tvm[1,2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 1 \text{ y } Tvm[2,3] = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = 3$$

Ejemplo 2. Entre Jaén y Cádiz hay 360 km por carretera. Si se viaja en automóvil, partiendo de Jaén a las 8 h y llegando a Cádiz a las 12 h, la velocidad media ha sido de 90 km/h. Para calcularla hemos dividido la variación del espacio recorrido (diferencia de distancias) entre la variación del tiempo transcurrido (diferencia de tiempos):

$$Tvm[\text{Jaén, Cádiz}] = \frac{\text{diferencia de distancias}}{\text{diferencia de tiempos}} = \frac{360}{12-8} = 90$$

Ejemplo 3. El índice de precios al consumo (IPC) expresa la variación porcentual de los precios. Esta variación suele darse mensualmente y por años. El IPC de mayo de 2007 fue de 0.3 %. La acumulación de 12 meses seguidos es el IPC interanual, y coincide, aproximadamente, con la tasa de inflaccion del año considerado.

3.- CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO Y DE FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS LATERALES

En todo el tema y salvo que expresamente se diga otra cosa, $D=(\alpha,\beta)\subseteq\mathbb{R}$ es un intervalo abierto de números reales.

Sea $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función real de variable real y $a\in D$. Se llama derivada de la función f en el punto a al límite siguiente, si existe y es finito:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad [1]$$

Dicho límite, caso de existir, se representa[2] por: $f'(a)=\dfrac{df(a)}{dx}=Df(a)=\dot{f}(a)$.

$f'(a)$ se lee f prima en a

$\dfrac{df(a)}{dx}$ se lee derivada de f respecto de x en a

Si en la definición anterior hacemos el cambio de variable $a+h=x$, el límite [1] se escribe como sigue:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad [2]$$

Si $B\subseteq D$, diremos que f es derivable en B cuando f sea derivable en todos los puntos de B.

Sea $C=\{a\in D: f \text{ es derivable en } a\}$. Definimos la función derivada de f por:

$$f':C\to\mathbb{R}$$
$$a\in C\mapsto f'(a)$$

Los límites [1] y [2] son simplemente dos formulaciones "distintas" del concepto de derivada de una función en un punto. ¿Cuál usar entonces? La respuesta es que podemos usar una u otra indistintamente porque con ambas vamos a llegar al mismo resultado.

Ejercicio 1. *Calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:*

a) $f(x)=x^2$ en $a=1$

b) $f(x)=3x^2-2x+1$ en $a=2$

c) $f(x)=3x^2-3x+1$ en $a=1$

d) $f(x)=\dfrac{3}{x}$ en $a=2$

Indicación: Usar la definición [2]

---

[2] La notación $\dfrac{d}{dx}f(a)$ fué introducida por Leibniz (1646-1716), y en ella se entiende que $\dfrac{d}{dx}$ es un operador, la notación $f'(a)$ fue introducida por Lagrange (1736-1813) y la notación $\dot{f}(a)$ sólo se suele usar en física, ingeniería…

Ejercicio 2. *Calcula la función derivada de* $f(x)=x^2$*, usando la definición [1].*

Ejercicio 3. *Calcula la función derivada de* $f(x)=x^3-2x+1$ *y como aplicación calcula* $f'(3), f'(-2)$ y $f'(0)$.

Indicación: Usar la definición [2] y resolver la correspondiente indeterminación usando Ruffini. Recuerda para ello que "a" es un número.

Ejercicio 4. *Calcula la función derivada de las funciones siguientes:*

a) $f(x)=2x^3-x^2+3x-1$

b) $f(x)=\dfrac{3}{x}$

Una función $f: D\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ es

derivable por la izquierda[3] en $x=a$ $\Leftrightarrow \exists f'(a-)=\lim_{x\to a-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}$

derivable por la derecha en $x=a$ $\Leftrightarrow \exists f'(a+)=\lim_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}$

Caracterización:

Son equivalentes:

1) f es derivable en $x=a$

2) $\exists f'(a-), f'(a+)$ y $f'(a-)=f'(a+)$

En cuyo caso, $f'(a)=f'(a-)=f'(a+)$

Ejercicio 5. *Indica en qué puntos es derivable la siguiente función y halla* $f'(x)$*:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x & \text{si } x\le 0 \\ x^3+3x & \text{si } 0<x<2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

Ejercicio 6. *Halla el valor de* a *para que* $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{si } x\le 1 \\ ax+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ *sea derivable en* $x=1$.

Ejercicio 7. *Estudiar la derivabilidad en* $x=1$*, y representar gráficamente la siguiente función.*

[3] Esta definición es equivalente a la siguiente: Una función $f: D\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ es

derivable por la izquierda en $x=a$ $\Leftrightarrow \exists f'(a-)=\lim_{h\to 0-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\in\mathbb{R}$

derivable por la derecha en $x=a$ $\Leftrightarrow \exists f'(a+)=\lim_{h\to 0+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\left|1-x^2\right|=\begin{cases} x^2-1 & x<-1 \\ 1-x^2 & -1\le x\le 1 \\ x^2-1 & x>1 \end{cases}$$

Ejercicio 8. *Consideremos la función* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0<x<b \\ 1-\dfrac{1}{4}x & b\le x \end{cases}$

Se pide:

a) *Determinar el valor de b para que sea continua.*
b) *¿Es derivable f en el valor de b calculado en el apartado anterior?*

Aunque lo más habitual es que los intervalos donde se estudie la derivabilidad sean abiertos y de hecho es en intervalos abiertos donde se obtienen las mejores propiedades de las funciones derivables, daremos la definición de función derivable en un intervalo cerrado $[a,b]$, que es similar a la que dimos para funciones continuas en un tal intervalo.

Una función $y=f(x)$ es derivable en $[\alpha,\beta]$ cuando:

- sea derivable en (α,β)
- sea derivable por la derecha en α
- sea derivable por la izquierda en β

3.1. Derivabilidad de las funciones elementales

- Las **funciones polinómicas**,
  $$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$
  son derivables en todos los puntos.
- Las **funciones racionales**, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, son derivables en su dominio.
- La **función exponencial**, $y=e^{f(x)}$, es derivable siempre que lo sea $f(x)$.
- La **función logarítmica**, $y=\log f(x)$, es derivable en todo punto x, tal que $f(x)>0$ y $f(x)$ sea derivable.
- Las **funciones trigonométricas**, $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\cos x$, son siempre derivables. La función $y=\operatorname{tg} x$ es derivable en su dominio: $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z}\right\}$
- Las **funciones definidas a trozos** serán derivables si lo son en sus intervalos respectivos y en los puntos de unión. En estos puntos habrá que ver que la función esté definida y que las derivadas laterales existan y sean iguales.

4.- CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD: RELACIÓN

Propiedad 1: Si una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto x_0, entonces es continua en x_0.

Este resultado también se puede utilizar en *sentido negativo*:

Propiedad 1': Si f no es continua en x_0, entonces no puede ser derivable en dicho punto.

En particular, las funciones derivables son continuas, pero ***no toda función continua es derivable***, como muestra el siguiente:

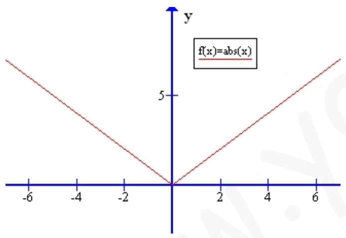
Contraejemplo: La función $f(x) = |x|$ es continua en $x_0 = 0$ pero no es derivable en dicho punto.

Continuidad en $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} |x| = \lim\limits_{x\to 0-} (-x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} |x| = \lim\limits_{x\to 0+} x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} |x| = 0 \text{ y } f(0) = |0| = 0,$$ luego $f(x)$ es continua en $x_0 = 0$.

Derivabilidad en $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0-) = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{-x}{x} = -1 \\ f'(0+) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x}{x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ no existe $f'(0)$ y por tanto, $y = |x|$ no es derivable en $x_0 = 0$.



Resumiendo:

- *f* es continua en 0
- *f* no es derivable en 0
- La gráfica de *f* no tiene recta tangente en 0

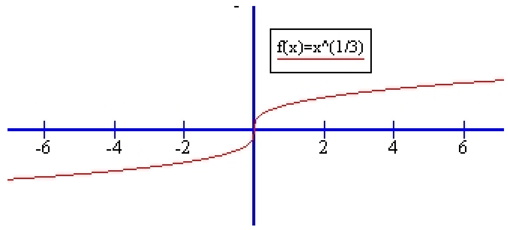
Otro contraejemplo más: La función $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ es continua en $x_0 = 0$ pero no es derivable en dicho punto.

Continuidad en $x_0 = 0$:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^{1/3} = 0 = f(0)$, luego $f(x)$ es continua en $x_0 = 0$.

Derivabilidad en $x_0 = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/3} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty \Rightarrow \nexists f'(0),$$ y por tanto, $y = x^{1/3}$ no es derivable en $x_0 = 0$.



Resumiendo:

- f es continua en 0
- f no es derivable en 0
- La gráfica de f tiene una recta tangente vertical en 0

5.- OPERACIONES CON FUNCIONES DERIVABLES

5.1. Suma

La función derivada de una suma de funciones derivables es la suma de las funciones derivadas:

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)}$$

5.2. Producto de un número real por una función

La función derivada del producto de una constante por una función derivable es la constante por la función derivada de la función:

$$\boxed{(\alpha f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)}$$

5.3. Producto de funciones

La función derivada de un producto de funciones derivables es igual a la derivada del primer factor por el segundo sin derivar más el primer factor si derivar por la derivada del segundo factor:

$$\boxed{(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

5.4. Función recíproca de una función

La derivada de la función recíproca de una función derivable viene dada por:

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}}$$

5.5. Cociente de funciones

La función derivada de un cociente de funciones derivables es igual al cociente de la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, entre el denominador al cuadrado:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$

5.6. Composición de funciones: regla de la cadena

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real con $f(A) \subseteq B$. Supongamos que f es derivable en a y que g es derivable en $b = f(a)$. Entonces:

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)}$$

6.- FUNCIÓN DERIVADA DE LAS FUNCIONES MÁS USUALES

A modo de ejemplo calcularemos las funciones derivadas de algunas funciones elementales. A la vez que practicamos el cálculo de derivadas aplicando la definición, también nos sirve para construir la conocida tabla de derivadas y que esta no aparezca como por arte de magia.

1) La función constante $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=c$, es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. Su derivada viene dada por:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{0}{x-a}=0\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}=0$$

2) La función identidad $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x$, es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. y su derivada es:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{x-a}}{\cancel{x-a}}=\lim_{x\to a}1=1$$

3) (***) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n$, es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. Para calcular su función derivada utilizaremos la fórmula del binomio de Newton:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{\binom{n}{0}a^nh^0}+\binom{n}{1}a^{n-1}h+\binom{n}{2}a^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-1}+\binom{n}{n}a^0h^n-\cancel{a^n}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{na^{n-1}h+\binom{n}{2}a^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-1}+\binom{n}{n}ah^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left[na^{n-1}+\binom{n}{2}a^{n-2}h+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-2}+\binom{n}{n}ah^{n-1}\right]}{\cancel{h}}=na^{n-1}$$

Esta fórmula, también se puede obtener "por inducción", es decir, calculando la derivada de las funciones $x,\ x^2,\ x^3,\ldots$ y obteniendo la regla general para x^n. (Es un buen ejercicio, que te recomiendo hacer)

4) La función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$, es derivable en cualquier $a\in(0,+\infty)$. Su derivada es:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2}{(x-a)\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)} = \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

5) (**) La función exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{a+h}-e^a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^a\left(e^h-1\right)}{h} = e^a$$

teniendo en cuenta que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$$

6) (**) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{sen} x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen} a}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h} = \cos a$$

donde hemos tenido en cuenta que $\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}y = 2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$ y que

$$\lim_{h\to 0} \frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$$

7) (**) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$. Su función derivada se puede obtener teniendo en cuenta que $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad \forall x\in\mathbb{R}$ y aplicando la regla de la cadena:

$$f'(a) = -\cos a$$

8) La función $\begin{array}{l} \operatorname{tg}:\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \operatorname{tg} x \end{array}$ es derivable en cualquier punto de su dominio y su derivada viene dada por:

$$\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)'(x) = \frac{\cos x\cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

9) (**) La función $\log_a x$ es derivable en cualquier $x_0\in(0,+\infty)$. Su función derivada viene dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x_0+h)-\log_a x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a \frac{x_0+h}{x_0}}{h} =$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{h}{x_0}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{x_0}{x_0}\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x_0}\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}=$$

$$=\frac{1}{x_0}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)=\frac{1}{x_0}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)=\frac{1}{x_0}\log_a e$$

En particular la función logaritmo natural (o neperiano[4]) $\ln$ es derivable en cualquier $x_0\in(0,+\infty)$, y su derivada viene dada por: $\ln' x=\dfrac{1}{x}$

Tabla de derivadas (de funciones simples)

Función	Derivada
$y=c\in\mathbb{R}$	$y'=0$
$y=x$	$y'=1$
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=\sqrt[n]{x}$	$y'=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y=a^x$ con $a>0$	$y'=a^x\ln a$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x}\log_a e$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$
$y=\text{sen}\, x$	$y'=\cos x$

[4] En la actualidad las notaciones $\ln$ y L para representar al logaritmo natural, así como la notación $\log$ para representar el logaritmo de base 10 (decimal), están en deshuso, y se tiende cada vez más a usar la notación $\log$ para representar al logaritmo natural (neperiano).

$y=\cos x$	$y=-\operatorname{sen} x$
$y=\operatorname{tg} x$	$y'=1+\operatorname{tg}^2 x$

Ejercicio 9. *Calcula la derivada de las siguientes funciones:*

1) $f(x)=7x^5-2x^3+3x^2-4$
2) $f(x)=5x^4+3x^2+2x-7$
3) $f(x)=(3x-1)\cdot(5x^2+3x-2)$
4) $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{7x+1}$
5) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}+\sqrt[3]{x}$
6) $f(x)=\left(x-\sqrt{x}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x}\right)$
7) $f(x)=\dfrac{(3x-1)\cdot(2x+3)}{x^2+7}$
8) $f(x)=\left(5x^2-3x+1\right)\cdot\dfrac{2x}{5x+3}$
9) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$
10) $f(x)=\dfrac{(3x-1)^2-(3x+1)^2}{2-x^2}$
11) $f(x)=\dfrac{1}{3x^2-5x+2}$
12) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$
13) $f(x)=\left(x^2+3x\right)\cdot\operatorname{sen} x$
14) $f(x)=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{sen} x$
15) $f(x)=\cos x\cdot\operatorname{tg} x$
16) $f(x)=e^x\cdot\operatorname{tg} x$
17) $f(x)=2^x\cdot\ln x$
18) $f(x)=e^x\cdot\log_{10} x$
19) $f(x)=\log_5 x\cdot\cos x$
20) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$
21) $f(x)=\dfrac{2^x}{\ln x}$
22) $f(x)=e^x\cdot\operatorname{sen} x$
23) $f(x)=\operatorname{sen} x\cdot\cos x$
24) $f(x)=\operatorname{sen} x+e^x\cdot\operatorname{sen} x$
25) $f(x)=\dfrac{3^x\cdot\operatorname{sen} x}{2x+e^x}$
26) $f(x)=\log_5 x\cdot\log_7 x$

Aplicando la regla de la cadena, obtenemos la siguiente tabla de derivadas para funciones compuestas:

Tabla de derivadas, para funciones compuestas:

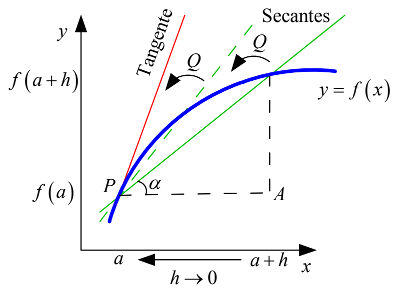
Función	Derivada
$y=f(x)^n$	$y'=n\cdot f(x)^{n-1}\cdot f'(x)$
$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{2\cdot\sqrt{f(x)}}$

$y=\sqrt[n]{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y=a^{f(x)}$ con $a>0$	$y'=f'(x)\cdot a^{f(x)}\cdot\ln a$
$y=e^{f(x)}$	$y'=f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\cdot\log_a e$
$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y=\operatorname{sen} f(x)$	$y'=f'(x)\cdot\cos f(x)$
$y=\cos f(x)$	$y=-f'(x)\ \cdot\operatorname{sen} f(x)$
$y=\operatorname{tg} f(x)$	$y'=f'(x)\cdot\left[1+\operatorname{tg}^2 f(x)\right]$

<u>Ejercicio 10.</u> *Calcula la derivada de las siguientes funciones compuestas:*

1) $f(x)=\operatorname{sen}\left(2x^2-3x\right)$
2) $f(x)=\ln(3x+1)$
3) $f(x)=e^{5x}$
4) $f(x)=\operatorname{tg}\ (2-3x)$
5) $f(x)=\left(x^2-5x+2\right)^7$
6) $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}$
7) $f(x)=3^{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$
8) $f(x)=\log_7(4+\operatorname{sen} x)$
9) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$
10) $f(x)=\operatorname{tg}^3 x$
11) $f(x)=3^{x^2+2}\cdot\ \operatorname{sen} x$
12) $f(x)=\left(3x^2-2\right)\ \cdot\operatorname{sen}\ (5x)$
13) $f(x)=\left(x^2+1\right)^5$
14) $f(x)=\operatorname{sen}^3 x$
15) $f(x)=\operatorname{sen}\left(x^3\right)$
16) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x$
17) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}\ (5x+2)}{\cos\ (3x-1)}$
18) $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x$
19) $f(x)=\log_5(3x+1)$
20) $f(x)=\ln(\operatorname{tg} x)$
21) $f(x)=\operatorname{sen}\ (\cos(3x))$
22) $f(x)=\sqrt{5x^2-3x+2}$
23) $f(x)=\sqrt[3]{\left(3-2x^2\right)^2}$
24) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-3x+1}$

7.- INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA



Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y

$$P=(a, f(a)),\ Q=(a+h, f(a+h))$$

dos puntos de su gráfica. Geométricamente se tiene que

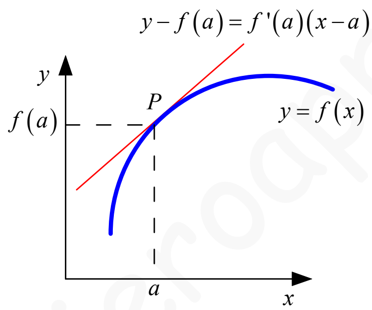
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\operatorname{tg}\alpha=m_{\text{secantes}}$$

que es el valor que mide la pendiente de la recta secante en los puntos P y Q a la curva.

Tomando límites en la igualdad anterior resulta:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\operatorname{tg}\alpha=\lim_{h\to 0}m_{\text{secantes}} \Leftrightarrow f'(a)=\operatorname{tg}\alpha=m_{\text{recta tangente}}$$

es decir, *la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente*[5] *a la función en ese punto*.



Como consecuencia:

Ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en $(a, f(a))$:

$$\boxed{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

Ecuación de la recta normal a la curva $y=f(x)$ en $(a, f(a))$:

$$\boxed{y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)}$$

[5] Si f es continua en x_0, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es:

i) la recta que pasa por P y tiene pendiente $m(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ si este límite existe.

ii) la recta $x=x_0$ si $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty$

Aclaración: Esta definición proviene del hecho de que la recta tangente a una función en un punto x_0 es el límite de la recta secante a la función, cuando el otro punto de corte de la recta secante y la función tiende a x_0.

Ejercicio 11. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x^3$ en el punto de abscisa $x=-1$.

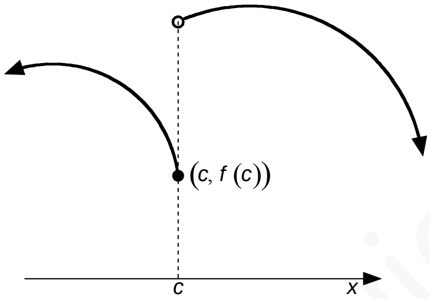
Ejercicio 12. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función $f(x)=\dfrac{4}{x^2}$ en el punto de abscisa $x=2$.

Ejercicio 13. Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=2x^3-x^2$ en el punto de abscisa $x=3$.

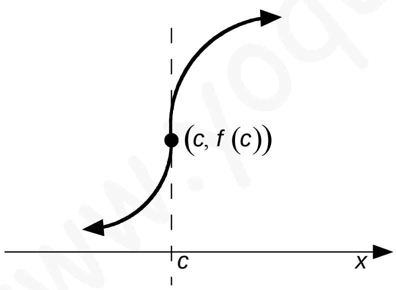
Ejercicio 14. Dada la función $f(x)=x^2-10x+9$ halla el punto en el que la recta tangente a la gráfica de f es paralela al eje de abscisas.

Ejercicio 15. Halla la pendiente de la recta tangente a la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ en el punto de abscisa $x=-1$.

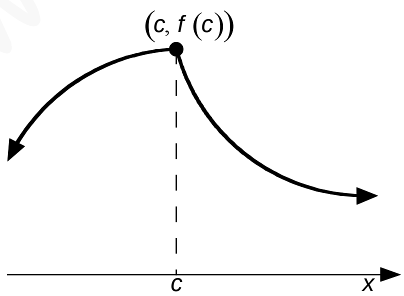
Gráficamente las situaciones en las que una función no es derivable en un punto son:



f no es continua en $c \Rightarrow f$ no es derivable en c



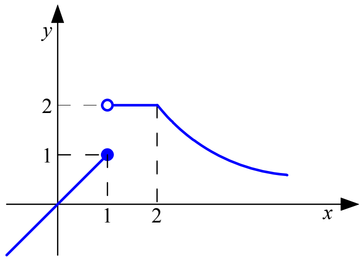
f es continua en c, pero la gráfica de f tiene una recta tangente vertical en c $\Rightarrow$ f no es derivable en c

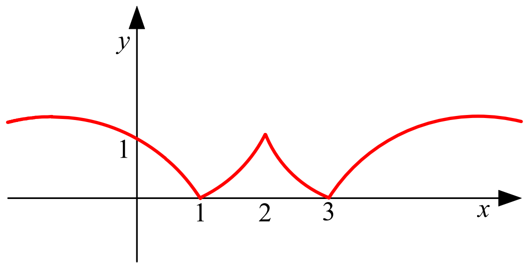


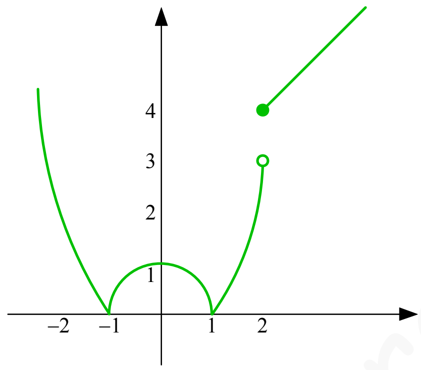
f es continua en c, pero la gráfica de f no tiene recta tangente en c (ya que tiene un pico) $\Rightarrow$ f no es derivable en c

8.- EJERCICIOS

Ejercicio 16. *Señala en qué puntos no son derivables las siguientes funciones:*







Ejercicio 17. *Indica los puntos en los que las siguientes funciones no son derivables:*

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x>0 \\ x+1 & \text{si } x\le 0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x>0 \\ -x+1 & \text{si } x\le 0 \end{cases}$

c) $f(x)=|\operatorname{sen} x|$

d) $f(x)=\begin{cases} |x^2-1| & \text{si } x<2 \\ x+2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

Ejercicio 18. *Halla la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en los puntos indicados:*

a) $y=\ln x$ en $x=e$

b) $y=\cos x$ en $x=0$

Ejercicio 19. *¿En qué punto la derivada de* $y=x^2+3x+1$ *toma el valor cero? ¿Cómo será la recta tangente a esta curva en dicho punto?*

Ejercicio 20. *Halla* a y b *en la función* $y=x^2+ax+b$, *sabiendo que* $f(0)=1$ *y* $f'(0)=1$.

Ejercicio 21. *Dada la función* $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{3}$*:*

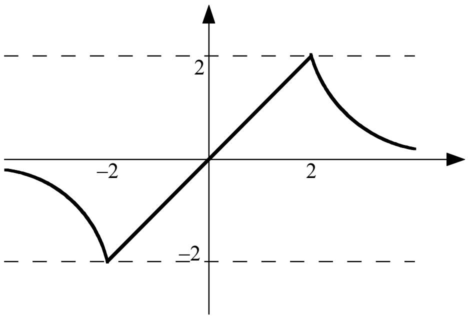
a) Calcula la ecuación de la recta secante a su gráfica que pasa por los puntos $x=-1$ y $x=3$.

b) Resuelve el problema gráficamente.

c) ¿Qué representa la pendiente de esta recta?

Ejercicio 22. *¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función* $f(x)=x^2-5x+6$ *es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante?*

Ejercicio 23. *Indica en qué puntos no es derivable la función cuya gráfica es la siguiente:*



Como en el intervalo $[-2,2]$ la función es la recta que une los puntos $(-2,-2)$ y $(2,2)$, ¿qué puedes decir de su derivada?

9.- DERIVADAS SUCESIVAS

Sea I un intervalo y f una función derivable en *I*. Si f' es derivable en $a \in I$, a la derivada $(f')'(a)$ se le llama derivada segunda de f en a y se designa por $f''(a)$.

Si $\forall x \in I$ existe $f''(x)$, la función $x \mapsto f''(x)$ se llama función derivada segunda de f en I.
En general, definidas las funciones $f',\dots,f^{n-1)}: I \to \mathbb{R}$, de tal modo que $f^{k)} = \left(f^{k-1)}\right)'$, para $k = 2,\dots,n-1$, diremos que $f^{k)}$ es la función derivada *k*-ésima (o derivada de orden *k*) de f en I.

Ejercicio 24. Calcula las derivadas segundas y terceras de las siguientes funciones:

a) $y = x^6 - 5x^4$ *b)* $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

c) $y = 2x+1$ *d)* $y = \dfrac{-1}{x}$

10.- ESTUDIO GLOBAL Y LOCAL DE FUNCIONES

10.1. Monotonía de una función

Una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente (resp. decreciente) en D cuando para cualesquiera $x,y \in D$ en la situación $x < y$, se verifica que $f(x) \le f(y)$ (respectivamente $f(x) \ge f(y)$).

Una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en D cuando para cualesquiera $x,y \in D$ en la situación $x < y$, se verifica que $f(x) < f(y)$ (respectivamente $f(x) > f(y)$).

Criterio: de la derivada primera

Si $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en D, y:

$$\boxed{f'(x_0) \begin{cases} > 0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente en } D \\ < 0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente en } D \end{cases}}$$

Diremos que una función es monótona, cuando sea creciente o decreciente y estrictamente monótona, cuando sea estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Por tanto, **estudiar la monotonía de una función es estudiar el signo de** f'.

Ejercicio 25. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) $y = x^6 - 5x^4$ *b)* $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ *c)* $y = 2x+1$ *d)* $y = \dfrac{-1}{x}$

Ejercicio 26. Dibuja una función que sea:

a) Creciente en todo $\mathbb{R}$

b) Creciente en $(-\infty,-2)$ *y decreciente en* $(0,+\infty)$.

10.2. Extremos relativos

Se dice que $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un máximo (resp. mínimo) relativo en x_0 si $\exists E(x_0)$: $x \in E(x_0) \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$ (resp. $f(x) \ge f(x_0)$).

Condición necesaria para la existencia de extremos relativos en funciones derivables:

> Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en x_0 y supongamos que f tiene un extremo relativo en x_0. Entonces: $f'(x_0) = 0$

Contraejemplo: *El recíproco no es cierto.*

La función $f(x) = x^3$ es derivable y $f'(0) = 0$, y sin embargo no tiene un extremo relativo en el origen, ya que es siempre creciente.

Condición necesaria y suficiente para que una función derivable posea un extremo relativo en un punto

> Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en x_0 y supongamos que
>
> 1) $f'(x_0) = 0$
>
> 2) $f''(x_0) \ne 0$
>
> Entonces, $f(x)$ posee un extremo relativo en x_0, que es un $\begin{cases} \text{máximo si } f''(x_0) < 0 \\ \text{mínimo si } f''(x_0) > 0 \end{cases}$.

Ejercicio 27. Halla los extremos relativos de las funciones del ejercicio 25.

Ejercicio 28. Estudia los intervalos de monotonía y los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$

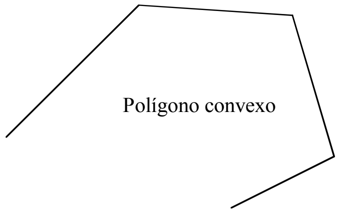
b) $f(x) = x^3 - 3x$

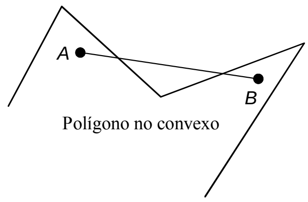
c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

d) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

10.3. Curvatura de una función: puntos de inflexión

Una figura o región del plano es convexa si al tomar dos puntos cualesquiera de ella, el segmento que los une está completamente incluido en la figura. En caso contrario se dice que la figura o región es cóncava.





Una función es convexa[6] en un intervalo si la tangente a dicha función en cualquier punto del intervalo queda por debajo de la gráfica; Si queda por encima se dirá que la función es cóncava.

Los puntos en los que la tangente a la gráfica atraviesa a la función se llaman puntos de inflexión.

1er criterio:

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en D.

$$\text{Si } f''(x_0) \begin{cases} > 0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es convexa en } D \ (\text{tangente por debajo de la gráfica en } D) \\ < 0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es cóncava en } D \ (\text{tangente por encima de la gráfica en } D) \end{cases}$$

2º criterio:

Condición necesaria: Si f es dos veces derivable en x_0 y x_0 es un punto de inflexión, entonces $f''(x_0) = 0$.

Condición necesaria y suficiente: Si f es tres veces derivable en x_0, $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en x_0.

Por tanto, **estudiar la curvatura de una función es estudiar el signo de f''.**

Ejercicio 29. Estudia la curvatura (concavidad y convexidad) de las siguientes funciones:

a) $y = x^6 + 5$

b) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

c) $y = e^x$

d) $y = \operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$

Ejercicio 30. Halla los puntos de inflexión de las funciones del ejercicio anterior.

11.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Hoy en día, con el uso de programas informáticos de representación gráfica de funciones (Graph, Derive, GeoGebra,…), uno se podría preguntar si sigue siendo necesario aprender a dibujar "a

[6] **¡¡Ojo!! Al consultar la bibliografía es posible encontrar libros donde llaman función cóncava a lo que nosotros llamamos función convexa. Lo importante es su significado, no el nombre que se le de.**

mano" la gráfica de una función cualquiera. Creo que hay dos motivos fundamentales para que la respuesta sea afirmativa:

- Lo que más nos interesa de una gráfica es interpretarla correctamente y comprender bien toda la información que nos proporciona. Pero para hacer esto, es imprescindible aprender a representar funciones gráficamente, ya que este proceso consiste, esencialmente, en conocer la relación entre las propiedades de una función y el aspecto que tiene su gráfica.
- Por otra, cuando le pedimos a un programa de ordenador que represente una función, surgen varias cuestiones que tenemos que decidir. Por ejemplo, ¿en qué intervalo pedimos la representación?, ¿qué escala es conveniente para los ejes?, etc. Para responder a éstas preguntas es fundamental nuestro dominio del tema.

Para representar gráficamente una función seguiremos los siguientes pasos:

1º) DOMINIO Y RECORRIDO

Dom (f) = {números x para los que $f(x)$ tiene sentido}

Img $(f) = \{y : \exists x$ de forma que $y = f(x)\}$

2º) SIMETRÍAS

a) **Función par**: $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f(x)$ es simétrica respecto del eje OY

b) **Función impar**: $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x)$ es simétrica respecto del origen, es decir, si giramos 180º la gráfica obtenemos la misma función.

3º) PERIODICIDAD

$y = f(x)$ es periódica de período $T \Leftrightarrow f(x+T) = f(T)$ y T es el menor de los números que cumplen dicha condición.

4º) PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

a) **Corte(s) con el eje OX**

$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ → Ninguno, uno o más puntos

b) **Corte con el eje OY**

$x = 0 \Rightarrow f(0) = y$ → Ninguno o un punto

5º) REGIONES DE EXISTENCIA

a) **Intervalos de positividad**

$f(x) > 0 \Rightarrow$ gráfica por encima del eje OX

b) **Intervalos de negatividad**

$f(x) < 0 \Rightarrow$ gráfica por debajo del eje OX

Para determinar las regiones de existencia de la función $y = f(x)$ hay que estudiar el signo de $f(x)$.

6º) ASÍNTOTAS

a) **Asíntotas verticales**

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$$

Observaciones:

(1) Una función puede tener infinitas asíntotas verticales.
(2) La gráfica de la función no puede cortar a las asíntotas verticales.

b) **Asíntotas horizontales**

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = k \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = k$$

Observaciones:

(1) Una función tiene corno máximo dos asíntotas horizontales.
(2) La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas horizontales.

c) **Asíntotas oblicuas**

La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -\infty} \left(f(x) - mx - n\right) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \left(f(x) - mx - n\right) = 0$$

en cuyo caso $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right)$

Observaciones:

(1) Una función puede tener como máximo dos asíntotas oblicuas.
(2) Si una función tiene asíntota oblicua no tiene asíntota horizontal y recíprocamente.
(3) La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas oblicuas en uno o varios puntos.

7º) PUNTOS DE DISCONTINUIDAD

$f(x)$ es continua en $x = a$ cuando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, y por tanto la función $f(x)$ presenta discontinuidad en un punto cuando o no existe el límite de la función en dicho punto o cuando ese límite no coincide con el valor que toma la función en él.

8º) MONOTONÍA

a) **Intervalos de crecimiento**: $f'(x) > 0$ para todos los x del intervalo

b) **Intervalos de decrecimiento**: $f'(x) < 0$ para todos los x del intervalo

c) **Puntos críticos**:

$x = a$ es un posible máximo o mínimo de $f(x)$ si $f'(a) = 0$

Si $f''(a) > 0$, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un mínimo

Si $f''(a) < 0$, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un máximo

Para determinar la monotonía de la función hay que estudiar el signo de $f'(x)$.

9º) CURVATURA

a) **Intervalos de convexidad**: $f''(x) > 0$ para todos los x del intervalo

b) **Intervalos de concavidad**: $f''(x) < 0$ para todos los x del intervalo

c) **Puntos de inflexión**:

$x = a$ es un posible punto de inflexión de $f(x)$ si $f''(a) = 0$

Si $f'''(a) > 0$, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un punto de inflexión cóncavo-convexo

Si $f'''(a) < 0$, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un punto de inflexión convexo-cóncavo

Para determinar la curvatura de la función hay que estudiar el signo de $f''(x)$.

Ejercicio 31. *Realiza, estudiando todas sus propiedades, la gráfica de $y = x^3$, y a partir de ella, obtén la gráfica de:*

a) $y = x^3 + 1$ *b)* $y = (x-2)^3$ *c)* $y = (x-2)^3 + 1$

Ejercicio 32. *Estudia y representa las gráficas de las funciones:*

a) $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ *b)* $y = x^4$

Ejercicio 33. *Estudia y representa las siguientes funciones:*

1) $y = x^3 - 4x^2 + 4x$

2) $y = x^3 - x$

3) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

4) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

5) $y = \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

6) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

7) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$

8) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$

9) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+4}$

10) $y = x^3 - x^2$

11) $y = x^5$

12) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

13) $y = \dfrac{4x}{2x+5}$

14) $y = e^x + x$

15) $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-2}$

16) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x+6}$

17) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

18) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

12.- OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

Optimizar una función es obtener el valor o valores de la variable independiente que maximizan o minimizan la función objeto de estudio.

Ejercicio 34. *Tras la aparición de una cierta enfermedad infecciosa, el número de afectados viene dado por la función $p(t) = 48t^2 - 2t^3$, siendo t el número de días desde que se detectó el primer caso. Se pide: ¿Cuántos días transcurrirán hasta que la enfermedad deje de propagarse? ¿Cuándo aumenta el número de personas afectadas? ¿Cuándo disminuye? ¿Cuándo se detecta el número máximo de personas afectadas? ¿Cuántas son las personas afectadas en ese momento?*

Ejercicio 35. *La trayectoria de una bala, medida en metros, viene dada por la función*

$$f(x)=\frac{1}{40}\left(-x^2+80x\right)$$

donde x expresa el tiempo en segundos. 1) ¿Cuántos metros recorre la bala transcurridos 39 segundos? 2) ¿Cuántos segundos han de transcurrir para que la bala empiece a descender? 3) ¿A qué altura máxima llega antes de comenzar a descender? 4) ¿En qué momentos alcanza una altura de 30 m.?

Ejercicio 36. *Unos grandes almacenes abren a las 10 horas y cierran a las 22 horas. Se ha comprobado que el número de visitantes puede representarse, en función de la hora del día, como:*

$$N(t)=-t^2+36t+260 \quad \text{con } 10\le t\le 22$$

1) ¿Cuántos clientes han pasado por los almacenes a las 12 de la mañana? 2) ¿A qué hora hay la máxima afluencia de clientes? 3) ¿Cuál es el máximo número de clientes que registran? 4) ¿Cuántos clientes quedan a la hora de cerrar?

Ejercicio 37. *La atención ante un anuncio de televisión (en una escala del 0 a 100) de 3 minutos de duración se comporta según la función*

$$A(t)=-10t^2+40t+40 \quad \text{con } 0\le t\le 3.$$

1) ¿A cuántos minutos de comenzar el anuncio se presta la máxima atención? 2) Cuando finaliza el anuncio, ¿en qué punto de la escala de atención se está? 3) ¿En qué punto de la escala de atención se está transcurrido 90 segundos?

Ejercicio 38. *El beneficio en euros por kilogramo de un alimento perecedero se estima que viene dado por la función*

$$B(x)=4x-2x^2-0{,}68$$

donde x es el precio en euros de cada kilogramo del alimento. 1) ¿Entre qué precios por kilogramo se obtienen beneficios? 2) ¿A qué precio se obtiene el máximo beneficio? 3) Si en un comercio se tienen 1000 kilogramos de ese alimento ¿Qué beneficio máximo puede obtener?

Ejercicio 39. *Halla un número "xy" tal que la suma de sus cifras sea 12 y de modo que la suma del cubo de la cifra de las decenas y del triple del cuadrado de la cifra de las unidades sea lo más pequeña posible.*

Ejercicio 40. *Halla dos números que sumados den 20 y que su producto sea máximo.*

Ejercicio 41. *Halla dos números tales que el cuadrado de uno multiplicado por el otro sea máximo, si la suma de dichos números es 40.*

Ejercicio 42. *Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3 600 m^2 de superficie, para poderlo cercar con una valla de longitud mínima.*

Ejercicio 43. *Una cuerda de 120 metros de longitud se divide en dos trozos. Con el primero de ellos se forma un cuadrado de lado "x" y con el segundo trozo se forma un rectángulo de base "x" y de altura "y". Halla los valores de "x" e "y" para que la suma del área del cuadrado y el doble del área del rectángulo sea lo mayor posible y calcula este valor máximo.*

Ejercicio 44. *Un agricultor sabe que si vende hoy su cosecha podrá recoger 50 000 kg, que le pagarán al precio de 20 céntimos por kg. Por cada día que espere, la cosecha disminuirá en 800 kg, pero el precio aumentará en 3 céntimos por kg. ¿Cuántos días deberá esperar para obtener el mayor beneficio?*

Ejercicio 45. *Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 24 euros y el tramo vertical 40 euros.*
a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.
b) Determinar el coste del marco.

Ejercicio 46. *En una oficina de correos sólo admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y, además, la suma de sus tres dimensiones debe ser de 72 cm. Halla las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.*

Ejercicio 47. *Se dispone de un papel rectangular de 2 metros cuadrados de superficie para diseñar un cartel publicitario. Los márgenes del cartel han de ser: 0,2 metros el superior, 0,1 metro el inferior, 0,1 metro el izquierdo y 0,05 metros el derecho. Calcular las dimensiones que debe tener el papel para que la parte que se ha de imprimir sea máxima. ¿Qué superficie tendría la parte impresa?*

Ejercicio 48. *El coste de producción de x unidades diarias de un determinado producto es $\frac{1}{4}x^2+35x+25$, y el precio de venta de una de ellas es $50-\frac{x}{4}$ miles de euros. Halla el número de unidades que deben venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.*

En los siguientes problemas nos piden optimizar funciones pero en intervalos cerrados del tipo $[a,b]$. Para abordar este tipo de problemas con éxito es conveniente tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Los extremos del intervalo: a y b
- Los $x\in(a,b): f'(x)=0$ (posibles extremos relativos)
- Los x en los que no existe $f'(x)$

Ejercicio 49. *Se considera la función $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+1$. Se pide:*
a) Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-1$.
b) Escribe los intervalos en donde la función es creciente y en donde sea decreciente
c) Determina los valores de x en los que la función alcanza máximos y mínimos relativos.
d) Valor mínimo que toma la función en el intervalo [- 1, 2].

Ejercicio 50. *Se considera la función $f(x)=x^3-3x-2$. Se pide:*

a) Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-\frac{1}{2}$.
b) Escribe los intervalos en donde la función sea creciente y en donde sea decreciente.
c) Determina los valores de x en los que la función alcanza máximos y mínimos relativos.

13.- EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD

1. **[Junio 2000]** Dada la función $f(x)=2x^3+3x^2-12x+4$. Se pide:

i) Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=2$.
ii) Escribir los intervalos, en donde la función *f* sea creciente y en donde sea decreciente.
iii) Determinar los valores de *x* en los que la función *f* alcanza un máximo relativo y un mínimo relativo, respectivamente. ¿Cuánto vale la función *f* en esos puntos?
iv) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-3,\ 1]$. Razona tu respuesta.

2. **[Junio 2000]** Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x} & si\ \ x\le\dfrac{-3}{2}\\ 2x+1 & si\ \ \dfrac{-3}{2}\le x<0\\ x^2+1 & si\ \ x\ge 0\end{cases}$ Se pide:

1) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.
2) Representación gráfica de $f(x)$.
3) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[0,\ 3]$. Razona tu respuesta.

3. **[Septiembre 2000]** El consumo de agua de un colegio viene dado por la función:

$$f(t)=\begin{cases}0 & si\ \ t<0\\ 0,1t^3-0,675t^2+1,35t & si\ \ 0\le t\le 3,5\\ 0 & si\ \ t>3,5\end{cases}$$

en donde *t* es el tiempo en horas a contar desde la apertura del colegio y *f*(*t*) es el consumo en m^3. Se supone que la jornada escolar comienza a las 10 horas y finaliza a las 13.5 horas. Se pide:

1) ¿Cuándo el consumo de agua es creciente? ¿Cuándo el consumo es decreciente?
2) ¿En qué momento el consumo es máximo y en qué momento es mínimo?

4. **[Septiembre 2000]** Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}2 & si\ \ x<-3\\ |x+1| & si\ \ -3\le x<0\\ 2x^2-4x+3 & si\ \ x\ge 0\end{cases}$$ Se pide:

1) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función.
2) Representación gráfica de $f(x)$.
3) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[0,\ 3]$. Razona tu respuesta.

5. **[Reserva Junio 2000]** Tras la aparición de una cierta enfermedad infecciosa, el número de afectados viene dado por la función $p(t)=48t^2-2t^3$, siendo *t* el número de días desde que se detectó el primer caso. Se pide:

1) ¿Cuántos días transcurrirán hasta que la enfermedad deje de propagarse?
2) ¿Cuándo aumenta el número de personas afectadas? ¿Cuándo disminuye?

3) ¿Cuándo se detecta el número máximo de personas afectadas? ¿Cuántas son las personas afectadas en ese momento?

6. **[Reserva Junio 2000]** Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & si \quad x\le 0 \\ -x^2+(a-1)x+3 & si \quad x>0 \end{cases}$$

Se pide:

1) Determinar el valor de a para que $f(x)$ sea continua en $x=0$.
2) Para el valor de a calculado en el apartado anterior, dibujar la gráfica de la función y estudiar la derivabilidad en cero.
3) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[0,\ 4]$. Razona tu respuesta.

7. **[Reserva Septiembre 2000]** Se dispone de un papel rectangular de 2 m^2 de superficie para diseñar un cartel publicitario. Los márgenes del cartel han de ser: 0,2 m el superior, 0,1 m el inferior, 0,1 m el izquierdo y 0,05 m el derecho. Calcular las dimensiones que debe tener el papel para que la parte que se ha de imprimir sea máxima. ¿Qué superficie tendría la parte impresa?

8. **[Reserva Septiembre 2000]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} |2x-1| & si \quad x\le 0 \\ a & si \quad 0<x\le 1 \\ -x^2+3x & si \quad x>1 \end{cases}$

Se pide:

1) Determinar el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x=0$.
2) Para ese valor de a ¿Es $f(x)$ continua para todo valor real de x?
3) Grafica de $f(x)$.
4) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[0,\ 3]$. Razona tu respuesta.

9. **[Junio 2001]** Halla un número "xy" tal que la suma de sus cifras sea 12 y de modo que la suma del cubo de la cifra de las decenas y del triple del cuadrado de la cifra de las unidades sea lo más pequeñas posible.

10. **[Junio 2001]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} x+\mathrm{t} & \text{si } x\le -2 \\ x^2-2t & \text{si } -2<x<2 \\ 4x-8 & \text{si } x>2 \end{cases}$

a) Halla el valor de "t" para que la función sea continua en todos los números reales.
b) Estudiar (con el *t* obtenido en el apartado anterior) la derivabilidad en – 2 y en 2.
c) Para el valor de "t" obtenido en el apartado anterior, representa gráficamente la función.
d) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-2,\ 2]$. Razona tu respuesta.

11. **[Septiembre de 2001]** El precio, en euros, que la acción de una empresa alcanza en el transcurso de una sesión de bolsa, viene dado por la función

$$p(t)=40t^3-420t^2+1200t+200$$

en donde t es el tiempo en horas a contar desde el inicio de la sesión. Supongamos que la sesión comienza a las 10 de la mañana y finaliza 7 horas después. Se pide:

a) ¿Entre qué horas el precio de acción sube?
b) ¿Entre qué horas el precio de la acción baja?
c) ¿A qué hora el precio de la acción alcanza un máximo relativo? ¿Cuál es ese valor?
d) ¿A qué hora el precio de la acción alcanza un mínimo relativo? ¿Cuál es ese valor?
e) ¿A qué hora el precio de la acción alcanza su valor más grande? ¿Cuál es ese valor?

12. **[Septiembre 2001]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\leq 2 \\ \dfrac{6}{x} & si \quad x>2 \end{cases}$. Se pide:

a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.

b) Representación gráfica de $f(x)$.

c) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-1,\ 1]$. Razona tu respuesta.

13. **[Reserva Septiembre 2001]** Una cuerda de 120 metros de longitud se divide en dos trozos. Con el primero de ellos se forma un cuadrado de lado x y con el segundo se forma un rectángulo de base x y de altura y. Halla los valores de x e y para que la suma del área del cuadrado y el doble del área del rectángulo sea lo mayor posible y calcula este valor máximo.

14. **[Reserva Septiembre 2001]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} |x+1| & si \quad x\leq 0 \\ -x^2+1 & si \quad 0<x\leq 2 \\ -2 & si \quad x>2 \end{cases}$.

Se pide:

(a) Estudia la continuidad de $f(x)$.

(b) Representación gráfica de $f(x)$.

(c) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-3,\ 1]$. Razona tu respuesta.

15. **[Reserva Junio 2001]** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{x} & si \quad x<0 \\ x^2+1 & si \quad 0\leq x<2 \\ 5x+15 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Se pide:

1) Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$

2) Representación gráfica de $f(x)$

3) Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-1,\ 2]$. Razona tu respuesta.

16. **[Reserva Junio 2001]** Se considera la función $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+1$. Se pide: a) Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-1$. b) Escribe los intervalos en donde la función sea creciente y en donde sea decreciente. c) Determina los valores de x en los que la función alcanza máximos y mínimos relativos. d) Valor máximo que toma la función en el intervalo $[-1,\ 2]$.

17. **[Junio 2002]** Dada la función $f(x)=\begin{cases}16-x^2 & \text{si } -2\le x<2\\ x^2 & \text{si } 2\le x\le 3\end{cases}$

a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f.
b) Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en $x=1$.
c) Determinar los valores de x en los que la función alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

18. **[Septiembre 2002]** Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+5x-4 & \text{si } 0\le x<2\\ x+k & \text{si } 2\le x\le 9\end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de f.
b) Representa gráficamente f.

19. **[Septiembre 2002]** Supongamos que el momento actual corresponde al valor $x=0$ de la variable tiempo y que las pérdidas o ganancias (y) de una empresa que acaba de fundarse siguen una función del tipo $y=(x-1)^2-1$. Basándose en la representación gráfica de esa función determinar:

a) Los intervalos de tiempo en que la empresa tiene pérdidas y en cuáles tiene ganancias.
b) En qué momento tiene la mayor pérdida.
c) En qué momento no tiene ni pérdidas ni ganancias.

20. **[Reserva Junio 2002]** Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } 0\le x\le 1\\ x & \text{si } 1<x<3\\ 6-x & \text{si } 3\le x\le 4\end{cases}$

a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f.
b) Representa gráficamente f.
c) Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[2,\ 4]$. Razona tu respuesta.

21. **[Reserva Junio 2002]** Se considera la función $f(x)=x^3-3x-2$. Se pide:

a) Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-\dfrac{1}{2}$.
b) Escribe los intervalos en donde la función sea creciente y en donde sea decreciente.
c) Determina los valores de x en los que la función alcanza máximos y mínimos relativos.

22. **[Reserva Septiembre 2002]** Determinar los valores de "a" y de "b" en la ecuación de la parábola $y=ax^2+bx+2$ sabiendo que tiene el punto $(1,-2)$ común con la recta $y=-2x$, y que dicha recta es tangente a la parábola en ese punto.

23. **[Reserva Septiembre 2002]** En un estudio sobre el coste de producción de una empresa de ordenadores, se ha concluido que producir x unidades de un determinado componente tiene un coste expresado por la función $f(x)=0,01x^2+x+1$. La venta de x unidades de ese componente proporciona unos ingresos que vienen determinados por la función $g(x)=(6+0,25x)\cdot x$, siendo x el número de unidades producidas.

a) Calcular el número de unidades que deben producir para que los costes sean mínimos.

b) Hallar la expresión, en función de x, de los beneficios, suponiendo que se venden todas las unidades que se producen.

c) Calcular el número de unidades que deben producir y vender para que los beneficios sean máximos.

24. **[Junio 2003]** Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+kx & \text{si } 0\le x\le 2\\ x^2-6x+10 & \text{si } x>2\end{cases}$

a) Calcula el valor de k para que la función sea continua en $x=2$.

b) Representa gráficamente f para el valor de k hallado en el apartado anterior.

c) Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[0,\ 5]$. Razona tu respuesta.

25. **[Junio 2003]** El número de personas que utiliza las instalaciones de una piscina de verano viene expresado por la función $f(t)=10t^3-120t^2+450t$, en donde t expresa el tiempo transcurrido desde la apertura de la piscina, 12 de la mañana (instante $t=0$), hasta el cierre de la piscina que se produce a las 19 horas de la tarde.

1) ¿Cuántas personas quedan a la hora de cerrar la piscina?

2) ¿A qué hora el número de personas es mayor? ¿Cuántas hay en ese momento?

3) ¿A qué hora el número de personas es menor? ¿Cuántas hay en ese momento?

4) Periodos en los que el número de personas crece o decrece.

26. **[Septiembre 2003]** Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+5x-4 & \text{si } x\le 3\\ x+k & \text{si } x>3\end{cases}$

a) Calcula el valor de k para que la función sea continua en $x=3$.

b) Representa gráficamente f para el valor de k hallado en el apartado anterior.

c) Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[1,\ 3]$. Razona tu respuesta.

27. **[Septiembre 2003]** El precio en euros de cada acción de una empresa viene determinado, en el transcurso de una sesión bursátil, por la función $f(t)=t^3-6t^2+9t+1$ en donde t expresa el tiempo transcurrido desde el inicio de la sesión. Suponiendo que ésta comienza a las 10 horas (instante $t=0$) y finaliza, por problemas técnicos, tres horas y media después. Se pide: 1) El precio de la acción al cabo de dos horas. 2) Hora en que la acción adquiere su valor máximo. ¿Cuál es ese valor? 3) Horas en que la acción adquiere su valor mínimo. ¿Cuál es ese valor? 4) Periodos en los que el precio de la acción sea creciente o decreciente.

28. **[Reserva Junio 2003]** Dada la función $f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^2+3\right|$.

a) Estudia su continuidad en $x=3$

b) Representa gráficamente f.

c) Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[-3,\ 3]$. Razona tu respuesta.

29. **[Reserva Junio 2003]** La temperatura (T) de una reacción química en un laboratorio de productos agrícolas viene dad, en función del tiempo t en horas, por la expresión $T(t)=2t-t^2$ para $0\le t\le 2$.

a) ¿Qué temperatura habrá a los quince minutos?
b) ¿En qué momento volverá a alcanzarse esta misma temperatura?
c) Halla las temperaturas máxima y mínima alcanzadas y lo momentos en que se producen.

30. **[Reserva Septiembre 2003]** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+7}{3} & \text{si } -5\le x\le -2\\ -x^2+\mathrm{k} & \text{si } -2<x\le 2\end{cases}$$

a) Calcula el valor de k para que la función sea continua en $x=-2$.
b) Representa gráficamente f para el valor de k hallado en el apartado anterior.
c) Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[-2,\ 2]$. Razona tu respuesta.

31. **[Reserva Septiembre 2003]** El producto de dos números reales positivos es 18. Hallar dichos números de forma que la suma de tres veces el cuadrado del primero más nueve veces el segundo sea lo más pequeña posible.

32. **[Junio de 2004]** Dada la función f(x) = $\begin{cases}-x^2-2x & \text{si} & x\le 0\\ -1+2x & \text{si} & 0<x\le 1\\ -x^2+2x & \text{si} & x>1\end{cases}$. **1)** Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad en los puntos x = 0 y x = 1. **3)** Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[0,\ 1]$. Razona tu respuesta.

33. **[Junio de 2004]** Una compañía de autobuses interurbanos ha comprobado que el número de viajeros (N) diarios depende del precio del billete (p) según la expresión:

$$N(p)=300-6p$$

1) Dar la expresión que nos proporciona los ingresos diarios (I) de esa compañía en función del precio del billete. **2)** ¿Qué ingreso diario se obtiene si el precio del billete es 15 euros? **3)** ¿Cuál es el precio del billete que hace máximo los ingresos diarios? **4)** ¿Cuáles son esos ingresos máximos?

34. **[Septiembre de 2004]** Dada la función f(x) = $\begin{cases}x^2+3x+2 & \text{si} & x\le 0\\ 2 & \text{si} & 0<x\le 1\\ x^2-4x+5 & \text{si} & x>1\end{cases}$.

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad en los puntos x = 0 y x = 1. **3)** Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[1,\ 5]$. Razona tu respuesta.

35. **[Septiembre de 2004]** La altura en metros, H, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba, viene dada en función del tiempo en segundos por la expresión: $H(t)=20t-2t^2$.

1) ¿Qué altura habrá alcanzado a los tres segundos?
2) ¿En qué momentos alcanzará 32 m de altura? **3)** ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? ¿Dónde?

36. **[Reserva 1de 2004]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2+4x+3 & \text{si} \quad x \le -1 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$.

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[0,\ 3]$. Razona tu respuesta.

37. **[Reserva 1 de 2004]** El beneficio (B) mensual, en miles de euros, de una fábrica de camiones viene dado en función del número de camiones (x) fabricados en un mes por la expresión: $B(x) = 1{,}2x - (0{,}1x)^3$. **1)** ¿Qué beneficio mensual obtiene si fabrica 10 camiones en ese mes? **2)** ¿Cuántos camiones tiene que fabricar en un mes para que el beneficio de ese mes sea máximo? **3)** ¿Cuál es ese beneficio máximo?

38. **[Reserva 2 de 2004]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} -|x+2| & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2-2 & \text{si} \quad 0 < x \le 3 \\ 4 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$.

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad en los puntos x = 0 y x = 3. 3) Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[0,\ 3]$. Razona tu respuesta.

39. **[Reserva 2 de 2004]** La producción (*P*) en kg. de cierta hortaliza en un invernadero depende de la temperatura (*t*) de éste en grados centígrados y viene dada por la expresión:

$$P(t) = (t+1)^2(32-t)$$

1) ¿Qué producción se obtiene si la temperatura es de 18ºC? **2)** ¿A qué temperatura se produce la máxima producción? **3)** ¿Cuál es esa máxima producción?

40. **[Junio de 2005]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2+4 & \text{si} \quad x \le -1 \\ |x-2| & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$ **1)** Representa gráficamente f. **2)** Estudiar su continuidad y su derivabilidad.

41. **[Junio de 2005]** Si la relación funcional entre la superficie de un cuadro y su base viene dada por $S = 150x - x^2$ siendo x la base en cm. **1)** ¿Cuál es la superficie de un cuadro que tiene de base 25 cm.? **2)** ¿Qué dimensión ha de tener la base de un cuadro para tener una superficie máxima? **3)** ¿Cuál es esa superficie máxima?

42. **[Septiembre de 2005]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \le -2 \\ x^2-x-2 & \text{si} \quad -2 < x \le 2 \\ -x+2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ **1)** Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-2,\ 2]$. Razona tu respuesta.

43. **[Septiembre de 2005]** Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, R en euros viene dada por: $R(x) = -0,01x^2 + 5x + 2500$, siendo x la cantidad que se invierte. **1)** ¿Qué rentabilidad obtiene un inversor que invierte 1000 euros? **2)** ¿Cuánto ha de invertir si quiere obtener una rentabilidad máxima? **3)** Calcula esa rentabilidad máxima.

44. **[Reserva 1 de 2005]** Dada la función f(x) = $\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le -1 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{si} \quad -1 < x \le 3 \\ -1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$ **1)** Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-1,\ 3]$. Razona tu respuesta.

45. **[Reserva 1 de 2005]** Un cohete se desplaza según la función $d = 100t + 2000t^2$, en la que d es la distancia recorrida en km. y t el tiempo en horas. **1)** ¿A qué distancia del punto de salida estará cuando haya transcurrido 1 hora?, ¿y cuando hayan transcurrido 3 horas? **2)** Sabiendo que la función velocidad se obtiene derivando la función distancia, ¿cuál es la expresión de la función velocidad? **3)** ¿Qué velocidad ha alcanzado cuando han pasado 3 horas?

46. **[Reserva 2 de 2005]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 - 4x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-3,\ 3]$. Razona tu respuesta.

47. **[Reserva 2 de 2005]** El técnico de un Hipermercado observa que si el precio al que venden la botella de agua es x céntimos de euro, sus beneficios vendrán dados por la expresión

$$B = -x^2 + 100x - 2300$$

en euros al día. **1)** ¿Qué beneficio obtienen si venden la botella a 40 céntimos? **2)** ¿Qué precio deben poner a la botella para obtener un beneficio máximo? **3)** ¿Cuál será ese beneficio máximo?

48. **[Junio de 2006] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \le -1 \\ -x^2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ x^2 - 4x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. 3) Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[-5,\ 0]$. Razona tu respuesta.

49. **[Junio de 2006] B)** El beneficio en euros por kilogramo de un alimento perecedero se estima que viene dado por la función

$$B(x) = 4x - 2x^2 - 0,68$$

donde x es el precio en euros de cada kilogramo del alimento. **1)** ¿Entre qué precios por kilogramo se obtienen beneficios? **2)** ¿A qué precio se obtiene el máximo beneficio? **3)** Si en un comercio se tienen 1000 kilogramos de ese alimento ¿Qué beneficio máximo puede obtener?

50. **[Septiembre de 2006] A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x+8 & \text{si} \quad x\le -3 \\ x^2-2 & \text{si} \quad -3<x<2 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$

1) Representa gráficamente *f*. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-3\ ,\ 2]$. Razona tu respuesta.

51. **[Septiembre de 2006] B)** La atención ante un anuncio de televisión (en una escala del 0 a 100) de 3 minutos de duración se comporta según la función

$$A(t)=-10t^2+40t+40 \quad \text{con } 0\le t\le 3.$$

1) ¿A cuántos minutos de comenzar el anuncio se presta la máxima atención? **2)** Cuando finaliza el anuncio, ¿en qué punto de la escala de atención se está? **3)** ¿En qué punto de la escala de atención se está transcurrido 90 segundos?

52. **[Reserva 1 de 2006] A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} 6 & \text{si} \quad x\le -4 \\ (x+2)^2 & \text{si} \quad -4<x\le -1 \\ 4 & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad**. 3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-4,\ -1]$. Razona tu respuesta.

53. **[Reserva 1 de 2006] B)** Unos grandes almacenes abren a las 10 horas y cierran a las 22 horas. Se ha comprobado que el número de visitantes puede representarse, en función de la hora del día, como:

$$N(t)=-t^2+36t+260 \quad \text{con } 10\le t\le 22$$

1) ¿Cuántos clientes han pasado por los almacenes a las 12 de la mañana? **2)** ¿A qué hora hay la máxima afluencia de clientes? **3)** ¿Cuál es el máximo número de clientes que registran? **4)** ¿Cuántos clientes quedan a la hora de cerrar?

54. **[Reserva 2 de 2006] A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ -x^2+6x-5 & \text{si} \quad 1<x<5 \\ x-5 & \text{si} \quad x\ge 5 \end{cases}$

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[2,\ 7]$. Razona tu respuesta.

55. **[Reserva 1 de 2006] B)** La trayectoria de una bala, medida en metros, viene dada por la función $f(x)=\dfrac{1}{40}\left(-x^2+80x\right)$, donde *x* expresa el tiempo en segundos. **1)** ¿Cuántos metros recorre la bala transcurridos 39 segundos? **2)** ¿Cuántos segundos han de transcurrir para que la bala empiece a descender? **3)** ¿A qué altura máxima llega antes de comenzar a descender? **4)** ¿En qué momentos alcanza una altura de 30 m.?

56. **[Junio de 2007] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en el punto x = 0. **3)** Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[0,\ 3]$. Razona tu respuesta.

57. **[Junio de 2007] B)** La cotización de las acciones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley:

$$C = x^3 - 45x^2 + 243x + 30000$$

siendo x el número de días. **1)** ¿Cuál ha sido la cotización en Bolsa el día 2? **2)** Determina los días en que alcanza las cotizaciones máxima y mínima. **3)** Calcula esas cotizaciones máxima y mínima.

58. **[Septiembre de 2007] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en el punto x =0. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[0,\ 4]$. Razona tu respuesta.

59. **[Septiembre de 2007] B)** En un determinado modelo de coche el consumo de gasolina, para velocidades comprendidas entre 20 y 160 Km/h, viene determinado por la función

$$C(x) = 8 - 0{,}045x + 0{,}00025x^2$$

y viene expresado en litros consumidos cada 100 km, recorridos a una velocidad constante de x km/h. **1)** ¿Cuántos litros cada 100Km. consume el coche si se conduce a una velocidad de 120 Km/h? **2)** ¿A qué velocidad consume menos? y ¿cuánto consume? **3)** ¿A qué velocidades se ha de conducir para consumir 10 litros cada 100 Km?

60. **[Reserva 1 de 2007] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} \left| x^2 - 2x \right| & \text{si} \quad x \ge 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en el punto x = 0. **3)** Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[-3,\ 3]$. Razona tu respuesta.

61. **[Reserva 1 de 2007] B)** Durante 31 días consecutivos las acciones de un cierta empresa han tenido unas cotizaciones que vienen dadas por la función C = 0'1 x^2 -3 x + 100, donde x representa el número de días transcurridos.

1) Encontrar las cotizaciones máxima y mínima de la compañía y los días en que se han conseguido.
2) Hallar los días en que las acciones estuvieron en alza y en los que estuvieron a la baja.

62. **[Reserva 2 de 2007] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ -(x-2)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en el punto x =1. **3)** Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[-1,\ 1]$. Razona tu respuesta.

63. **[Reserva 2 de 2007] B)** Un importador de caviar estima que si vende el kilo de caviar a x euros, entonces su beneficio por kilo viene dado por la función $B(x) = 160x - x^2 - 63000$. **1)** Indica entre qué precios obtiene beneficios el importador. **2)** Calcula a qué precio debe vender el kilo de caviar para obtener un beneficio máximo. **3)** Calcula el beneficio máximo por kilo.

64. **[Junio de 2008] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si} \quad x \le -1 \\ k & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$ **1)** Halla el valor de k para que la gráfica sea continua para x = –1. **2)** Para ese valor de k, dibuja la gráfica. **3)** Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[-1,\ 1]$. Razona tu respuesta.

65. **[Junio de 2008] B)** Suponiendo que el rendimiento (R) en % de un estudiante en una hora de examen viene dado $R(t) = 300t(1-t)$ siendo $0 \le t \le 1$ (tiempo en horas). **1)** Representar gráficamente la función R(t). **2)** Indicar cuando aumenta y disminuye el rendimiento y ¿cuándo se hace cero? **3)** ¿Cuándo es máximo el rendimiento y cuál es?

66. **[Septiembre de 2008] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & \text{si} \quad x \le 0 \\ |x-3| & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad. 3) Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[0,\ 3]$. Razona tu respuesta.

67. **[Septiembre de 2008] B)** Una empresa ha realizado un estudio acerca de los costes de producción llegando a la conclusión de que producir x unidades de un objeto dado tiene un coste (en euros) expresado por $f(x) = 0,25x^2 - 25x + 700$. **1)** ¿Cuántas unidades han de producirse para tener un coste de 175 euros? **2)** Halla el número de unidades que se deben producir para que el coste sea mínimo. **3)** ¿Cuál es ese coste mínimo?

68. **[Reserva 1 de 2008] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{si} \quad x \le 0 \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-4,\ 0]$. Razona tu respuesta.

69. **[Reserva 1 de 2008] B)** Existen unos fondos de inversión cuya rentabilidad, en función de la cantidad invertida en euros, viene dada por:

$$R(x) = \begin{cases} -0'0001x^2 + 0'5x & \text{si } 0 < x < 4000 \\ 400 & \text{si } x \ge 4000 \end{cases}$$

1) ¿Qué rentabilidad se obtiene al invertir 3000 euros? **2)** ¿Qué cantidad x, conviene invertir para obtener la máxima rentabilidad. **3)** ¿Cuál es esa máxima rentabilidad?

70. **[Reserva 2 de 2008] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si} \quad -2 \le x < 2 \\ x - 2 & \text{si} \quad 2 < x < 3 \\ (x-4)^2 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Estudia los extremos relativos de *f* en el intervalo $[2,\ 5]$. Razona tu respuesta.

71. **[Reserva 2 de 2008] B)** El beneficio (B) mensual, en miles de euros, de una fábrica de coches viene dado en función del número de coches (x) fabricados en un mes por la expresión:

$$B(x)=1,2x-0,001x^3$$

1) ¿Cuántos euros de beneficio mensual obtiene si fabrica 10 coches en ese mes? **2)** ¿Cuántos coches tiene que fabricar en un mes para que el beneficio de ese mes sea máximo? **3)** ¿Cuál es ese beneficio máximo?

72. **[Junio de 2009] A)** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x\le -2\\ x^2-4 & \text{si} \quad -2<x<3\\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x\ge 3\end{cases}$$

se pide: **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en x = -2 y en x = 3. **3)** Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[-2,\ 3]$. Razona la respuesta.

73. **[Junio de 2009] B)** El coeficiente de elasticidad de un producto, en función de la temperatura (t) en grados centígrados, viene definido por la función:

$$T(t)=\frac{t^2}{9}-2t+10$$

1) ¿A qué temperatura o temperaturas se obtiene una elasticidad de 2? **2)** Calcular el valor de la temperatura para la que la elasticidad es mínima. **3)** Calcular ese mínimo.

74. **[Septiembre de 2009] A)** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}-x-2 & \text{si} \quad x\le -2\\ \dfrac{x+2}{3} & \text{si} \quad -2<x<1\\ -(x-2)^2 & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$$

se pide: **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en x = -2 y x = 1. **3)** Estudia los extremos absolutos de *f* en el intervalo $[-2,\ 1]$. Razona tu respuesta.

75. **[Septiembre de 2009] B)** Una multinacional ha estimado que anualmente sus beneficios en euros vienen dados por la función: $B(x)=-16x^2+24000x-700000$, donde x representa la cantidad de unidades vendidas. Determinar: **1)** Las unidades que se han de vender para obtener un beneficio de 7300000. **2)** La cantidad de unidades que deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo. **3)** El beneficio máximo.

76. **[Reserva 1 de 2009] A)** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\le -3\\ (x+1)^2 & \text{si} \quad -3<x<1\\ -4x+8 & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$$

se pide: **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en x = -3 y x = 1. **3)** Estudia los extremos relativos de *f* en el intervalo $[-4,\ 0]$. Razona tu respuesta.

77. **[Reserva 1 de 2009] B)** En una empresa de producción y venta de ordenadores, los beneficios en cientos de euros, vienen dados por la expresión: $B(x) = \frac{x^3}{3} - 8x^2 + 55x + 20$, donde x representa el número de ordenadores vendidos en un día. Calcula: **1)** Los euros que ganará si vende 6 ordenadores en un día. **2)** La cantidad de ordenadores que deben ser vendidos para que el beneficio sea máximo, teniendo en cuenta que la empresa no produce más de 12 ordenadores por día. **3)** El beneficio máximo en euros.

78. **[Reserva 2 de 2009] A)** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le -4 \\ x^2 + 4x & \text{si} \quad -4 < x < 0 \\ x^2 - 3x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

se pide: **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en x = - 4. **3)** Estudia los extremos absolutos de f en el intervalo $[-4,\ 0]$. Razona tu respuesta.

79. **[Reserva 2 de 2009] B)** Un restaurante abre a las 8 de la noche y cierra cuando todos los clientes se han ido. La función

$$f(t) = 60t - 10t^2$$

representa el número de clientes que hay en el restaurante en función del número de horas que lleva abierto (t). Se pide: **1)** La hora de cierre del restaurante. **2)** El número máximo de clientes que van una determinada noche a este establecimiento. **3)** ¿A qué horas debemos ir si queremos que haya 50 personas en el restaurante?