OPERACIONES CON MATRICES

EJERCICIO 1 : Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz identidad. Usando la fórmula anterior, calcula A^4.

Solución: Comprobamos que $A^2 = 2A - I$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Son iguales.

Utilizando que $A^2 = 2A - I$, calculamos A^4:

$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = 4A^2 - 4AI + I^2 = 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I + 4A - I = 4A - 3I$

Por tanto: $A^4 = 4A - 3I = 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2 : Si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ Satisface la igualdad $A^2 + xA + yI = 0$, halla los valores numéricos de x e y (I representa la matriz identidad de orden 2.

Solución:

Calculamos A^2: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}$

Así: $A^2 + xA + yI = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+x+y & 10+2x \\ -15-3x & 10+4x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Luego, ha de ser:
$$\left.\begin{array}{r} -5+x+y=0 \\ 10+2x=0 \\ -15-3x=0 \\ 10+4x+y=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \quad y=5-x=5-(-5)=10 \\ \rightarrow \quad x=-5 \\ \rightarrow \quad x=-5 \\ \rightarrow \quad y=-10-4x=-10+20=10 \end{array}$$

Por tanto: $x = -5$; $y = 10$

EJERCICIO 3 : Si I es la matriz identidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, halla el valor que deben tener "x" para que $A^2 - xA + yI = 0$

Solución:

Calculamos $A^2 - xA - yI$ e igualamos a 0:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - xA - yI = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2x-y & 9-3x \\ -6+2x & -5-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos que ha de ser: $\left.\begin{array}{r} -2-2x-y=0 \\ 9-3x=0 \\ -6+2x=0 \\ -5-x-y=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \quad y=-2-2x=-2-6=-8 \\ \to \quad x=3 \\ \to \quad x=3 \\ \to \quad y=-5-x=-5-3=-8 \end{array}$ Por tanto: $x=3,\ y=-8$

<u>EJERCICIO 4</u> : Dada la matriz: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^tA y AA^t, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

b) Encuentra las matrices de la forma $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tales que: $AA^tX=X$

c) Encuentra todas las matrices de la forma $Y=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, tales que: $A^tAY=Y$

Solución:

a) La matriz transpuesta de *A* es:

$A^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto:

$$A^tA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Imponemos la condición dada:

$$AA^tX=X \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} x=x \\ 2y=y \quad \to \quad y=0 \end{cases}$$

Por tanto: $X=\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $x\in\mathbf{R}$.

c) $A^tAY=Y \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c \\ b \\ a+c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} a+c=a \quad \to \quad c=0 \\ b=b \\ a+c=c \quad \to \quad a=0 \end{cases}$ Por tanto: $Y=\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $b\in\mathbf{R}$.

PROBLEMAS CON MATRICES

<u>EJERCICIO 5</u> : Los consumos anuales de agua mineral, pan y leche de tres familias vienen expresados en la matriz *A*. La evolución de los precios de los años 1997 a 2000 viene reflejada en la matriz *B*.

a) Hallar, si es posible, $A\cdot B$ y $B\cdot A$ e indicar que información proporciona el producto matricial.

b) ¿Qué información nos da el elemento c_{34} de la matriz producto?

$$A=\begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{PAN} & \text{AGUA} & \text{LECHE} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B=\begin{array}{c} \\ \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1997 & 1998 & 1999 & 2000 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solución:

a) La matriz A es 3×3 y la B es 3×4. Para poder efectuar el producto de dos matrices, el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda.

Por tanto, el producto $B\cdot A$ no se puede hacer, pero el $A\cdot B$ sí.

$$A\cdot B=\begin{array}{c} \\ F_1\\ F_2\\ F_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{PAN} & \text{AGUA} & \text{LECHE}\end{array}\\ \begin{pmatrix}450 & 800 & 650\\ 500 & 810 & 620\\ 200 & 500 & 600\end{pmatrix}\end{array}\cdot\begin{array}{c} \\ \text{PAN}\\ \text{AGUA}\\ \text{LECHE}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1997 & 1998 & 1999 & 2000\end{array}\\ \begin{pmatrix}85 & 90 & 90 & 95\\ 28 & 30 & 30 & 35\\ 70 & 72 & 75 & 80\end{pmatrix}\end{array}=$$

$$=\begin{array}{c} \\ F_1\\ F_2\\ F_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1997 & 1998 & 1999 & 2000\end{array}\\ \begin{pmatrix}106150 & 111300 & 113250 & 122750\\ 108580 & 113140 & 115800 & 125450\\ 73000 & 76200 & 78000 & 84500\end{pmatrix}\end{array}$$

La matriz $A\cdot B$ nos da el gasto anual de cada familia en el total de los tres productos durante los años 1997 a 2000.

b) El elemento $c_{34}=84\,500$, corresponde a la familia tercera en el año 2000; es decir, nos indica el gasto total de esta familia en los tres productos durante ese año.

<u>EJERCICIO 6</u> : En una acería se fabrican tres tipos de productos que llamaremos *A*, *B*, y *C*, que se obtienen a partir de chatarra, carbón mineral y ciertas aleaciones metálicas, según la tabla adjunta, que representa las unidades de cada material necesaria para fabricar una unidad de producto:

PRODUCTO / MATERIAL	*A*	*B*	*C*
CHATARRA	8	6	6
CARBÓN	6	6	4
ALEACIONES	2	1	3

Obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones necesarias para la producción de 6 unidades de *A*, 4 de *B* y 3 de C.

Solución:

Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{r} \\ \text{CHATARRA}\\ \text{CARBÓN}\\ \text{ALEACIONES}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}A & B & C\end{array}\\ \begin{pmatrix}8 & 6 & 6\\ 6 & 6 & 4\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\end{array}\cdot\begin{array}{c}A\\ B\\ C\end{array}\begin{pmatrix}6\\ 4\\ 3\end{pmatrix}=\begin{array}{r}\text{CHATARRA}\\ \text{CARBÓN}\\ \text{ALEACIONES}\end{array}\begin{pmatrix}90\\ 72\\ 25\end{pmatrix}$$

Es decir, necesitaremos 90 unidades de chatarra, 72 de carbón mineral y 25 de aleaciones.

<u>EJERCICIO 7</u> : En una compañía se utilizan tres tipos de materiales (madera, plástico y aluminio) para fabricar tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás, según la tabla:

	SILLA	MECEDORA	SOFÁ
MADERA	1 unidad	1 unidad	1 unidad
PLÁSTICO	1 unidad	1 unidad	2 unidades
ALUMINIO	2 unidades	3 unidades	5 unidades

Obtén, matricialmente, las unidades de madera, de plástico y de aluminio que se han utilizado para fabricar 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sofás.

Solución:

Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{r} \\ \text{MADERA}\\ \text{PLÁSTICO}\\ \text{ALUMINIO}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{SILLA} & \text{MECED.} & \text{SOFÁ}\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\text{SILLAS}\\ \text{MECEDORAS}\\ \text{SOFÁS}\end{array}\begin{pmatrix}100\\ 100\\ 200\end{pmatrix}=\begin{array}{r}\text{MADERA}\\ \text{PLÁSTICO}\\ \text{ALUMINIO}\end{array}\begin{pmatrix}400\\ 600\\ 1\,500\end{pmatrix}$$

Es decir se han utilizado 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1 500 de aluminio.

<u>EJERCICIO 8</u> : Un fabricante produce tres tipos de clavos: de aluminio (*A*), de cobre (*Q*) y de acero (*H*). Todos ellos se fabrican en longitudes de 1; 1,5 y 2 cm con los precios respectivos siguientes:

Clavos *A*:	**0,20**	**0,30**	**0,40**	**céntimos de euro**
Clavos *Q*:	**0,30**	**0,45**	**0,60**	**céntimos de euro**
Clavos *H*:	**0,40**	**0,60**	**0,80**	**céntimos de euro**

Sabiendo que en un minuto se producen:

De 1 cm de longitud:	**100*A***	**50*Q***	**700*H***
De 1,5 cm de longitud:	**200*A***	**20*Q***	**600*H***
De 2 cm de longitud:	**500*A***	**30*Q***	**400*H***

Se pide:

a) Resume la información anterior en dos matrices: M y N. M que recoja la producción por minuto, y N que recoja los precios.
b) Calcula el elemento a_{11} de la matriz $M \cdot N$ y da su significado.
c) Calcula el elemento a_{11} de la matriz $N \cdot M$ y da su significado.

Solución:

a) Unidades producidas por minuto: $\begin{array}{c} \\ A \\ Q \\ H \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 1{,}5 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 100 & 200 & 500 \\ 20 & 20 & 30 \\ 700 & 600 & 400 \end{pmatrix} \end{array} = M$

Precios (en céntimos de euro): $\begin{array}{c} \\ 1 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & Q & H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}40 \\ 0{,}30 & 0{,}45 & 0{,}60 \\ 0{,}40 & 0{,}60 & 0{,}80 \end{pmatrix} \end{array} = N$

b) $a_{11} = 100 \cdot 0{,}20\ 200 \cdot 0{,}30\ 500 \cdot 0{,}40 = 280$ céntimos.
Producen 280 céntimos de euro de clavos de aluminio por minuto.
c) $a_{11} = 0{,}20 \cdot 100\ 0{,}30 \cdot 50\ 0{,}40 \cdot 700 = 315$ céntimos.
Producen 315 céntimos de euro de clavos de 1cm por minuto.

CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ Buscar alguna sin inversa

<u>EJERCICIO 9</u> : Calcula la inversa de las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

- La inversa de A: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow\rightarrow \begin{array}{c} 1^a + 3 \cdot 3^a \\ 2 \cdot 2^a - 5 \cdot 3^a \\ 3^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & -10 & 0 & -9 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 10 \cdot 1^a + 3 \cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 13 & -9 & 15 \\ 0 & -10 & 0 & -9 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow\rightarrow \begin{array}{c} \frac{1}{10} \cdot 1^a \\ -\frac{1}{10} \cdot 2^a \\ -\frac{1}{2} \cdot 3^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{15}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{10} & -\frac{7}{10} & \frac{5}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Por tanto, $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 13 & -9 & 15 \\ 9 & -7 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

- La inversa de B:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) F_2 \overset{\approx}{=} F_2 - 2F_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) F_3 \overset{\approx}{=} F_3 + F_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

No tiene inversa porque la tercera fila es nula.

- La inversa de C: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 2\cdot 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow\rightarrow \begin{array}{c} 4\cdot 1^a + 3\cdot 2^a \\ 2^a + 3^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a + 3^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow\rightarrow \begin{array}{c} \frac{1}{8}\cdot 1^a \\ \frac{1}{4}\cdot 2^a \\ \frac{1}{2}\cdot 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \text{Así, } C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

CALCULAR LA POTENCIA N-ÉSIMA DE UNA MATRIZ

<u>EJERCICIO 10</u> : Se considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**, donde a, b y c son tres números reales arbitrarios.**

a) Encuentra A^n para todo natural n. **b) Calcula $\left(A^{35} - A\right)^2$.**

Solución:

a) $A^1 = A$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, como $A^3 = 0$, tenemos que $A^n = 0$ para $n \geq 3$.

b) Teniendo en cuenta lo obtenido en a): $\left(A^{35} - A\right)^2 = (0 - A)^2 = (-A)^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

RESOLVER ECUACIONES MATRICIALES

<u>EJERCICIO 11</u> : Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ **b) Halla una matriz, X, tal que $AX = B$.**

Solución:

a) Se trata de probar que $A\,A^{-1} = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. Efectuamos el producto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ como queriamos demostrar.}$$

b) Despejamos X en la igualdad $AX = B$, multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$A^{-1}AX = A^{-1}B \;\rightarrow\; IX = A^{-1}B \;\rightarrow\; X = A^{-1}B$

Por el apartado a), conocemos A^{-1}; luego: $X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -1 & 1 \\ -18 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 \\ -9/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 12</u> : Halla la matriz X que verifica BX = A, siendo $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{2}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{4}\end{pmatrix}$**.**

Solución: Despejamos X multiplicando por la izquierda por B^{-1}: $B^{-1}BX=B^{-1}A \;\rightarrow\; X=B^{-1}A$

$$\text{Hallamos } B^{-1}: \left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&1&1&0&0\\1&0&2&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c}1^{a}\\3^{a}\\2^{a}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&1\\1&0&2&0&1&0\end{array}\right) \rightarrow\rightarrow \begin{array}{c}1^{a}\\2^{a}\\3\cdot 3^{a}-1^{a}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&5&-1&3&0\end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c}5\cdot 1^{a}-3^{a}\\2^{a}\\3^{a}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}15&0&0&6&-3&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&5&-1&3&0\end{array}\right) \rightarrow\rightarrow \begin{array}{c}\frac{1}{15}\cdot 1^{a}\\2^{a}\\\frac{1}{5}\cdot 3^{a}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{6}{15}&\frac{-3}{15}&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&0\end{array}\right) \rightarrow B^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}6&-3&0\\0&0&15\\-3&9&0\end{pmatrix}$$

Como $B^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}6&-3&0\\0&0&15\\-3&9&0\end{pmatrix}$, $X=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}6&-3&0\\0&0&15\\-3&9&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$. Así: $X=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}12\\60\\-21\end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix}4/5\\4\\7/5\end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 13</u> : Resuelve la ecuación matricial XA = B, siendo $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{-1}\\\mathbf{0}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$**.**

Solución: Despejamos X multiplicando por A^{-1} por la derecha: $XAA^{-1}=BA^{-1} \;\rightarrow\; X=BA^{-1}$

$$\text{Hallamos } A^{-1}: \left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c}F_1-2F_2\\F_2\end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-2\\0&1&0&1\end{array}\right) \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$$

Así: $X=\begin{pmatrix}3&-1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix}3&-7\\0&2\end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 14</u> : Halla la matriz X que verifica AX + B = 0, siendo $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\\\mathbf{2}&\mathbf{4}&\mathbf{3}\\\mathbf{3}&\mathbf{5}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$**,** $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{5}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$ **y 0 la matriz nula.**

Solución: Despejamos X: $AX=-B \;\rightarrow\; A^{-1}AX=A^{-1}(-B) \;\rightarrow\; IX=-A^{-1}B \;\rightarrow\; X=-A^{-1}B$

$$\text{Calculamos la inversa de } A: \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\2&4&3&0&1&0\\3&5&2&0&0&1\end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c}\\2^{a}-2\cdot 1^{a}\\3^{a}-3\cdot 1^{a}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&0&1&-2&1&0\\0&-1&-1&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\text{Intercambiamos las filas } 2^{a} \text{ y } 3^{a}: \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&-1&-1&-3&0&1\\0&0&1&-2&1&0\end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c}1^{a}\\-2^{a}\\3^{a}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&1&3&0&-1\\0&0&1&-2&1&0\end{array}\right) \xrightarrow{1^{a}-2\cdot 2^{a}}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-5&0&2\\0&1&1&3&0&-1\\0&0&1&-2&1&0\end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c}1^{a}+3^{a}\\2^{a}-3^{a}\\3^{a}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-7&1&2\\0&1&0&5&-1&-1\\0&0&1&-2&1&0\end{array}\right) \text{ Por tanto, } A^{-1}=\begin{pmatrix}-7&1&2\\5&-1&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}.$$

$$X=-\begin{pmatrix}-7&1&2\\5&-1&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-35\\26\\12\end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix}35\\-26\\12\end{pmatrix}$$

RESOLVER SISTEMAS MATRICIALES

EJERCICIO 15 : Resuelve el siguiente sistema matricial: $3X-2Y=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}$; $\quad 2X+Y=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

Solución:

Llamamos: $A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ Así, el sistema queda: $\left.\begin{matrix} 3X-2X=A \\ 2X+X=B \end{matrix}\right\} X=B-2X$

$$3X-2(B-2X)=A \;\rightarrow\; 3X-2B+4X=A \;\rightarrow\; 7X=A+2B \;\rightarrow\; X=\frac{1}{7}(A+2B)$$

$$Y=B-2X=B-\frac{2}{7}(A+2B)=B-\frac{2}{7}A-\frac{4}{7}B=\frac{3}{7}B-\frac{2}{7}A=\frac{1}{7}(3B-2A)$$

Por tanto:

$$X=\frac{1}{7}(A+2B)=\frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \\ 35 & -14 & 0 \end{pmatrix}==\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y=\frac{1}{7}(3B-2A)=\frac{1}{7}\left[3\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 21 & -7 & 14 \\ -28 & 0 & 21 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix}==\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 16 : Halla la matriz X^2+Y^2, donde X e Y son dos matrices cuadradas de orden dos, verificando: $5X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ $\qquad 3X+2Y=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

Llamamos $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$. Tenemos que resolver el sistema:

$$\left.\begin{matrix} 5X+3Y=A \\ 3X+2Y=B \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} (-3)\cdot 1^a & \rightarrow & -15X-9Y=-3A \\ 5\cdot 2^a & \rightarrow & \underline{15X+10Y=5B} \\ \text{Sumando} & & Y=5B-3A \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2\cdot 1^a & \rightarrow & 10X+6Y=2A \\ -3\cdot 2^a & \rightarrow & \underline{-9X-6Y=-3B} \\ \text{Sumando} & & X=2A-3B \end{matrix}$$

Por tanto:

$$X=2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Y=5\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -12 & 45 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos X^2 e Y^2:

$$X^2=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}; \quad Y^2=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$$

Luego: $X^2+Y^2=\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & 17 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$

HALLAR LAS MATRICES QUE COMUTAN CON UNA DADA

EJERCICIO 17 :

a) Dada $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar las matrices que conmutan con A.

b) Escribe una matriz que conmute con A.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & 0 \\ 2c+d & 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 2a = 2a + b \\ 2b = 0 \\ a = 2c + d \\ b = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} b = 0 \\ a = 2c + d \end{array} \qquad \text{Por tanto, } X = \begin{pmatrix} 2c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \quad c, d \in \mathbf{R}$$

b) Por ejemplo, si $c = 1$ y $d = 1$: $\quad X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

COMBINACIÓN LINEAL. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE VECTORES

EJERCICIO 18 : Estudia la dependencia lineal del conjunto de vectores:
$\vec{u}_1 = (1,\ 1,\ -1,\ 1);\ \vec{u}_2 = (2,\ 3,\ -2,\ 1);\ \vec{u}_3 = (1,\ 3,\ -1,\ -1)$

Solución:
Estudiemos el rango de la matriz cuyas filas son los tres vectores dados. El rango coincide con el número de vectores linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2\cdot 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de la matriz es 2. Luego, hay dos vectores linealmente independientes; el tercero se puede escribir como combinación lineal de los otros dos.
Los tres vectores $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$ son linealmente dependientes.

RANGO DE UNA MATRIZ

EJERCICIO 19 : Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix}$ **c)** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **e)** $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3\cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 9 & -6 & 18 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 3\cdot 2^a \\ 3\cdot 4^a + 4\cdot 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -30 \end{pmatrix}. \quad \text{Por tanto, } \operatorname{ran}(M) = 3.$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 5\cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & -10 & 10 & -8 \\ 0 & -20 & 20 & -16 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a \\ 3^a-2\cdot 2^a \\ 4^a-4\cdot 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Por tanto, } \operatorname{ran}(A)=2.$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a-4\cdot 1^a \\ 3^a-2\cdot 1^a \\ 4^a-1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a \\ 3^a-2^a \\ 4^a+2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Por tanto, } \operatorname{ran}(A)=3.$$

$$\text{d)} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a-3\cdot 1^a \\ 3^a+1^a \\ 4^a-2\cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a \\ 3^a+2^a \\ 4^a-2^a \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Por tanto, } \operatorname{ran}(A)=2.$$

e)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a+2\cdot 1^a \\ 3^a+4\cdot 1^a \\ 4^a+7\cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & 15 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a \\ 3^a-3\cdot 2^a \\ 4^a-3\cdot 2^a \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Por tanto, } \operatorname{ran}(M)=2.$$

<u>EJERCICIO 20</u> : Halla el rango de las siguientes matrices:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-8} & \mathbf{9} & \mathbf{-6} \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-7} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{7} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Solución:

- $$A \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 8 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a-1^a \\ 3^a-1^a \\ 4^a-3\cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a \\ 3^a+3\cdot 2^a \\ 3\cdot 4^a+4\cdot 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow ran\,(A)=3.$$
- $$B \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a-2\cdot 1^a \\ 3^a-1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & -10 & 10 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a \\ 3^a-2\cdot 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

  Por tanto, $ran\,(B)=2$.

- C $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 4\cdot 1^a \\ 3^a - 2\cdot 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow ran\,(C) = 3.$
- D $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 3\cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto, $ran\,(D) = 2$.

- E $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a + 2\cdot 1^a \\ 3^a + 4\cdot 1^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 15 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3\cdot 2^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto, $ran\,(E) = 2$.

<u>EJERCICIO 21</u> :

a) Halla el rango de la matriz: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores:
$\vec{u}_1 = (2,\ -1,\ 3,\ 4);\ \vec{u}_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 2)$ **y** $\vec{u}_3 = (-1,\ 3,\ 4,\ 1)$

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a + 2\cdot 1^a \\ 3^a + 3\cdot 1^a \\ 4^a + 4\cdot 1^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 13 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2\cdot 2^a \\ 4^a - 3\cdot 2^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 3\cdot 4^a + 2\cdot 3^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$ Por tanto, $\text{ran}\,(A) = 3$.

b) Observamos que las columnas de la matriz A coinciden con los vectores $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$.
El número de vectores linealmente independientes es el rango de *A*. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

<u>EJERCICIO 22</u> : Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores
$\{\vec{u}_1 = (2,\ -1,\ 0,\ 1);\ \vec{u}_2 = (-1,\ 0,\ 2,\ 1);\ \vec{u}_3 = (5,\ -4,\ 6,\ 7)\}$ **y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son** $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$**.**

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$:

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a + 2\cdot 1^a \\ 3^a + 5\cdot 1^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & 16 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 4\cdot 2^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$ Por tanto, el rango de la matriz es 2.

Esto significa que los vectores son linealmente dependientes. Hay dos vectores linealmente independientes y el tercero depende de ellos.

<u>EJERCICIO 23</u> : Calcula el rango de la siguiente matriz y di cuál es el número de columnas linealmente independientes: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a + 3\cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \operatorname{ran}(A) = 2.$$

Esto significa que hay dos columnas linealmente independientes en A; las otras dos dependen linealmente de ellas.

<u>EJERCICIO 24</u> : Estudiar el rango de las siguientes matrices, en función de los valores de los parámetros:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ a & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 2 & -a \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & a+1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

- A: Aplicamos el método de Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ a & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - a\cdot 1^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ 0 & 4-a^2 & -a^2+a+2 \end{pmatrix}$

Hacemos $4 - a^2 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$

- o Si $a = 2$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \operatorname{ran} A = 1$
- o Si $a = -2$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \operatorname{ran} A = 2$
- o Si $a \neq \pm 2$, $ran\ C = 2$.

- B: Aplicamos el método de Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 2 & -a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a - 3\cdot 1^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & a & 7 \\ 0 & 2 & -a+9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ a\cdot 3^a - 2\cdot 2^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & a & 7 \\ 0 & 0 & -a^2+9a-14 \end{pmatrix}$

Hacemos $-a^2 + 9a - 14 = 0 \begin{cases} a = 7 \\ a = 2 \end{cases}$

- o Si $a \neq 7$ y $a \neq 2$, $ran\ B = 3$
- o Si $a = 7$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\ B = 2$ Si $a = 2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\ B = 2$

- C: Aplicamos el método de Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 3\cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -3a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + (a-1)2^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -3a \\ 0 & 0 & -3a^2+2a+1 \end{pmatrix}$

Hacemos $-3a^2 + 2a + 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1/3 \end{cases}$

- o Si $a = 1$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \operatorname{ran} C = 2$ Si $a = -\frac{1}{3}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \operatorname{ran} C = 2$
- o Si $a \neq 1$ y $a \neq -\frac{1}{3}$, $\operatorname{ran} C = 3$.

- D: Aplicamos el método de Gauss: $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ a\cdot 2^a - 2\cdot 1^a \end{array}\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a^2-a-6 \end{pmatrix}$

Hacemos $a^2 - a - 6 = 0 \begin{cases} a = 3 \\ a = -2 \end{cases}$

- o Si $a=3$, $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \operatorname{ran} D = 1$ Si $a=-2$, $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \operatorname{ran} D = 1$
- o Si $a \neq 3$ y $a \neq -2$, $\operatorname{ran} D = 2$.

• E: Aplicamos el método de Gauss: $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & a+1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\text{a}} \\ 2 \cdot 2^{\text{a}} - 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & a+2 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}$

La tercera fila se anula si $a = 1$ y la segunda, si $a = -2$. Estudiamos estos dos casos:

- o Si $a=1$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \operatorname{ran} E = 2$ Si $a=-2$, $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \operatorname{ran} E = 2$

Por tanto, $ran\ D = 2$ cualquiera que sea el valor de a.