

## Matrices

### Problemas Resueltos

#### Operaciones con matrices

1. Dadas  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -14 & 41 \end{pmatrix}$ , halla dos números  $a$  y  $b$  para que se verifique que  $a \cdot A + b \cdot B = C$ .

Solución:

Escribiendo la ecuación extendida y operando, se tiene:

$$a \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -14 & 41 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 3a \\ -a & 7a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5b & -2b \\ 4b & -9b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -14 & 41 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+5b & 3a-2b \\ -a+4b & 7a-9b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -14 & 41 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+5b = -11 & 3a-2b = 12 \\ -a+4b = -14 & 7a-9b = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

Puede comprobarse el resultado:

$$2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ 12 & -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -14 & 41 \end{pmatrix}.$$

2. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ , halla otras dos matrices del mismo

orden,  $X$  e  $Y$ , que cumplan:  $\begin{cases} 2X - Y = A \\ X + 3Y = 2B \end{cases}$ .

Solución:

Primero conviene resolver el sistema en función de  $A$  y  $B$ ; después se hacen los cálculos.

Por el método de reducción:

$$\begin{cases} 2X - Y = A \\ X + 3Y = 2B \end{cases} \xrightarrow{2E2} \begin{cases} 2X - Y = A \\ 2X + 6Y = 4B \end{cases} \xrightarrow{E2 - E1} \begin{cases} 2X - Y = A \\ 7Y = 4B - A \end{cases} \Rightarrow Y = \frac{1}{7}(4B - A)$$

Sustituyendo este valor de  $Y$  en la segunda ecuación inicial, se tiene:

$$X + \frac{3}{7}(4B - A) = 2B \Rightarrow X = \frac{3}{7}A + \frac{2}{7}B$$

Por tanto:

$$X = \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -18/7 \\ 8/7 & -18/7 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{7} \left[ 4 \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & -22/7 \\ 2/7 & -8/7 \end{pmatrix}$$

3. (Propuesto en Selectividad 2011, Canarias)

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ . Resuelve el sistema

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X + 4Y = B \end{cases}$$

Solución:

Aplicando el método de reducción para la resolución de sistemas:

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X + 4Y = B \end{cases} \Leftrightarrow 2E2 - 3E1 \Rightarrow \begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 17Y = 2B - 3A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17Y = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -9 & -1 & 9 \\ -2 & -7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -9 & -1 & 9 \\ -2 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si se elimina la matriz  $Y$  se tiene:

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X + 4Y = B \end{cases} \Leftrightarrow 3E2 + 4E1 \Rightarrow \begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 17X = 3B + 4A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17X = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 14 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Para las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ , comprueba que se cumplen las siguientes propiedades:

- a)  $A + (B + C) = (A + B) + C$     b)  $A(B + C) = AB + AC$   
 c)  $(A - B)C = AC - BC$     d)  $A(BC) = (AB)C$

Solución:

a)  $A + (B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$   
 $(A + B) + C = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$

b)  $A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$   
 $AB + AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$

c)  $(A - B)C = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$   
 $AC - BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

d)  $A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 23 \end{pmatrix}.$   
 $(AB)C = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 23 \end{pmatrix}.$

5. Calcula, si es posible, los productos  $AB$  y  $BA$  para las matrices siguientes:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } A = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } A = (2 \ 3 \ -1), B = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{f) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{a) } AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ -16 & 2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 22 & -10 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

En este caso puede observarse que  $AB = -BA$ .

$$\text{d) } AB = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{No puede realizarse.} \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{e) } AB = (2 \ 3 \ -1) \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -11; \quad BA = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 3 \ -1) = \begin{pmatrix} -8 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{f) } AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -14 \\ -2 & -8 & 15 \\ 5 & -14 & 6 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -9 & 5 \\ 27 & -10 & 1 \\ -19 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ , halla los productos  $AB$  y  $BA$ . Además de

que no se cumple la propiedad conmutativa, ¿qué otro comentario puede hacerse?

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 20 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$$

Además de que no se cumple la propiedad conmutativa, puede observarse la propiedad relativa a divisores de cero: el producto de dos matrices no nulas da la matriz nula.

7. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , comprueba que  $AB =$

$AC$ , y sin embargo,  $B \neq C$ .

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}; \quad AC = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

En efecto,  $AB = AC$ , y sin embargo,  $B \neq C$ . Esta advierte que en el cálculo matricial no puede simplificarse.

8. Para la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ , calcula el valor de  $a$  para que  $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$ .

Solución:

$$\begin{aligned} A^2 - A &= \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A(A - I) = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 0 & -a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a^2 - a = 12 \\ a^2 + a = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4; & a = -3 \\ a = 4; & a = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

La única solución común es  $a = 4$ .

### Potencia de una matriz

9. Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ .

a) Demuestra que  $A^2 = 2A - I_2$ .

b) Aplicando el apartado a) halla la matriz  $A^6$ .

Solución:

a) Operando:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -16 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}; \quad 2A - I_2 = 2 \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -16 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Se cumple la igualdad indicada.

b) Si  $A^2 = 2A - I_2 \Rightarrow A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2A - I_2)(2A - I_2) = 4A^2 - 4A + I_2^2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^4 &= 4(2A - I_2) - 4A + I_2^2 = 8A - 4I_2 - 4A + I_2 = 4A - 3I_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow A^6 &= A^4 \cdot A^2 = (4A - 3I_2)(2A - I_2) = 8A^2 - 10A + 3I_2^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow A^6 &= 8(2A - I_2) - 10A + 3I_2^2 = 16A - 8I_2 - 10A + 3I_2 = 6A - 5I_2 \end{aligned}$$

Luego:

$$A^6 = 6 \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -48 \\ 12 & -23 \end{pmatrix}$$

10. a) Halla las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$  que cumplen que  $A^3 = A$ .

b) Para esas matrices y para el valor  $a = -2$ , calcula  $A^{10} + A^{11} + A^{12}$ .

Solución:

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^2b \\ ab^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para que } A^3 = A \text{ es necesario que } \begin{cases} a^2b = a \\ ab^2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0; & b = 0 \\ ab = 1; & b = 1/a \end{cases} \rightarrow$$

La solución  $a = b = 0$  no tiene interés, pues es evidente.

$$\text{Por tanto, la matriz pedida es } A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

b) Para  $a = -2$ , se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = A; A^4 = I \dots; A^{10} = I; A^{11} = A; A^{12} = I.$$

Por tanto:

$$A^{10} + A^{11} + A^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

11. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , encuentra la expresión general de  $A^n$ . ¿Cuál es la matriz

$$A^{10} - 10A?$$

Solución:

Segunda y tercera potencias:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Puede hacerse la conjetura: } A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es evidente que se cumple para  $n = 1$  (también para  $n = 2$  y  $n = 3$ ). Supuesto que se cumple hasta  $n$  hay que ver que se cumple para el siguiente, para  $n + 1$ .

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a + na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto, la conjetura es cierta y puede afirmarse que } A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$A^{10} - 10A = \begin{pmatrix} 1 & 10a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 10a \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

12. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , encuentra la expresión general de  $A^n$ . ¿Cuál es la matriz

$$A^{10} - 10A?$$

Solución:

Primeras potencias:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I; \quad A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = I \cdot I = I; \quad A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$$

Por tanto, el valor de  $A^n$  depende de la paridad del exponente, siendo:  $A^{2n} = I$  y  $A^{2n-1} = A$ .

En consecuencia,

$$A^{10} - 10A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 10a \\ 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -10a \\ 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

13. Halla la expresión general de  $A^n$  en los siguientes casos:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A \Rightarrow A^4 = I \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow A^{2n} = I \text{ y } A^{2n-1} = A.$$

$$\text{b) } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 8 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \dots$$

No puede darse una fórmula para la potencia  $A^n$ , pero puede observarse que en los elementos  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  y  $a_{22}$  aparecen los términos de la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...

$$\text{c) } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puede establecerse la conjetura  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , que efectivamente es cierta, pues se cumple

$$\text{para el siguiente: } A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**14.** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , comprueba que para todo  $n$  natural se cumple que

$$A^{2n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Solución:**

Para  $n = 1$  y  $n = 2$  se cumplen las expresiones dadas:

$$n = 1: A = A^{2 \cdot 1 - 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A^2 = A^{2 \cdot 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$n = 2: A^3 = A^{2 \cdot 2 - 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A^4 = A^{2 \cdot 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si se ve que  $A^{2n} = A^{2n-1} \cdot A$  y que  $A^{2n+1} = A^{2n} \cdot A$  ya estaría demostrado.

En efecto:

$$A^{2n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n-1+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{2n}$$

$$A^{2n} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n+1 & 0 & 1 \\ n & 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{2(n+1)-1} = A^{2n+1};$$

**15.** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , comprueba que para todo  $n$  natural se cumple que

$$A^{2n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & -2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^{2n} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Solución:**

Para  $n = 1$  y  $n = 2$  se cumplen las expresiones dadas, pues se obtiene:

$$n = 1: A = A^{2^{1-1}} = \begin{pmatrix} 2^{1-1} & 2^{1-1} & 0 \\ 2^{1-1} & -2^{1-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^2 = A^{2^1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$n = 2: A^3 = A^{2^{2-1}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^4 = A^{2^2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Falta ver que  $A^{2^n} = A^{2^{n-1}} \cdot A$  y que  $A^{2^{n+1}} = A^{2^n} \cdot A$ .

En efecto:

$$A^{2^{n-1}} \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & -2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{2^n}$$

$$A^{2^n} \cdot A = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n & 0 \\ 2^n & -2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{2^{(n+1)-1}} = A^{2^{n+1}}$$

$$A^{2^n} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n+1 & 0 & 1 \\ n & 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{2^{(n+1)-1}} = A^{2^{n+1}}$$

### Comprobación de algunas propiedades

16. Halla los valores de  $a$  para los que la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & -1 \end{pmatrix}$  es simétrica.

Solución:

Debe cumplirse que  $\begin{cases} a+1 = a^2-1 \\ 4a = a^2+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-a-2=0 \\ a^2-4a+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2; a=-1 \\ a=2 \end{cases}$ .

El valor de  $a$  que cumple las dos condiciones es  $a=2$ .

17. Halla el valor de  $a$  para que sea ortogonal la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(Recuerda: Una matriz  $A$  es ortogonal si  $A \cdot A^t = I$ ).

Solución:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**18.** Demuestra que si las matrices  $A$  y  $B$  son ortogonales, entonces su producto también es ortogonal.

Solución:

Si  $A$  y  $B$  son ortogonales  $\Rightarrow A \cdot A^t = I$  y  $B \cdot B^t = I$ .

Para que el producto  $AB$  sea ortogonal debe cumplirse que  $(AB) \cdot (AB)^t = I$ .

Como  $(AB) \cdot B^t \cdot A^t = A \cdot (B \cdot B^t) \cdot A^t = A \cdot I \cdot A^t = A \cdot A^t = I$ .

**19.** Demuestra que si  $P$  y  $Q$  son matrices cuadradas tales que  $P \cdot Q = Q^2 \cdot P$ , entonces

$$(P \cdot Q)^2 = Q^6 \cdot P^2.$$

Solución:

$$\begin{aligned} (P \cdot Q)^2 &= (P \cdot Q) \cdot (P \cdot Q) = (Q^2 \cdot P) \cdot (Q^2 \cdot P) = Q^2 \cdot (P \cdot Q) \cdot (Q \cdot P) = Q^2 \cdot (Q^2 \cdot P) \cdot (Q \cdot P) = \\ &= Q^4 \cdot (P \cdot Q) \cdot P = Q^4 \cdot (Q^2 \cdot P) \cdot P = Q^6 \cdot P^2 \end{aligned}$$

**20.** Dada las matrices  $A = (a_{ij})_{n \times m}$  y  $B = (b_{ij})_{n \times m}$ , demuestra las propiedades:

$$1) (A^t)^t = A \quad 2) (A + B)^t = A^t + B^t \quad 3) (kA)^t = kA^t$$

Solución:

$$1) (A^t)^t = A \rightarrow$$

$$A^t = ((a_{ij})_{n \times m})^t = (a_{ji})_{m \times n} \Rightarrow (A^t)^t = ((a_{ji})_{m \times n})^t = (a_{ij})_{n \times m}$$

$$2) (A + B)^t = A^t + B^t \rightarrow$$

$$(A + B)^t = ((a_{ij} + b_{ij})_{n \times m})^t = (a_{ji} + b_{ji})_{m \times n} = (a_{ji})_{m \times n} + (b_{ji})_{m \times n} = A^t + B^t$$

$$3) (kA)^t = kA^t \rightarrow$$

$$(kA)^t = ((ka_{ij})_{n \times m})^t = (ka_{ji})_{m \times n} = k(a_{ji})_{m \times n} = kA^t$$

**21.** Comprueba las propiedades anteriores para las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Solución:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^t)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$2) A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + B)^t = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -5 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$3) kA = \begin{pmatrix} k & -2k \\ 3k & 0 \\ 4k & -5k \end{pmatrix} \Rightarrow (kA)^t = \begin{pmatrix} k & 3k & 4k \\ -2k & 0 & -5k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = k \cdot A^t$$

22. Dada las matrices  $A = (a_{ij})_{n \times m}$  y  $B = (b_{rs})_{m \times p}$ , demuestra la propiedad 4)  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Solución:

Primero se verá que las matrices  $(A \cdot B)^t$  y  $B^t \cdot A^t$  tienen la misma dimensión.

En efecto:

Como  $A \cdot B$  tiene dimensión  $n \times p \Rightarrow (A \cdot B)^t$  tendrá dimensión  $p \times n$ .

Por otra parte,  $B^t \cdot A^t$ , es el producto de matrices de dimensión  $(p \times m)$  por  $(m \times n) \rightarrow$  su dimensión será  $p \times n$ .

El segundo lugar haya que ver que los elementos de  $(A \cdot B)^t$  y de  $B^t \cdot A^t$  son iguales.

En efecto:

El elemento  $c_{ji}$  de  $(A \cdot B)^t$  es el elemento  $c_{ij}$  de  $A \cdot B$ , que se obtiene al multiplicar la fila  $i$  de  $A$  por la columna  $j$  de  $B$ :  $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}$ .

Por otra parte, el elemento  $e_{ji}$  de  $B^t \cdot A^t$  se obtiene al multiplicar la fila  $j$  de  $B^t$  (que es la columna  $j$  de  $B$ ) por la columna  $i$  de  $A^t$  (que es la fila  $i$  de  $A$ )  $\Rightarrow e_{ji} = c_{ji}$ .

Por tanto, los elementos de  $(A \cdot B)^t$  y de  $B^t \cdot A^t$  son iguales.

23. Comprueba la propiedad anterior para las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ .

Solución:

4)  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 & -6 \\ 6 & -3 & 0 \\ 28 & 26 & -15 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^t = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 28 \\ 11 & -3 & 26 \\ -6 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

$$B^t A^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 28 \\ 11 & -3 & 26 \\ -6 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

24. (Propuesto en Selectividad 2006, Castilla y León)

Halla las matrices  $A$  cuadradas de orden 2, que verifican la igualdad:  $A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A$ .

Solución:

Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  se desea que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=a \\ b=b \\ c+d=a+c \\ d=b+d \end{cases} \Rightarrow b=0; a=d; c=c$$

La solución del sistema viene en función de dos indeterminadas,  $a$  y  $c$ . Luego,  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ .

Una de las matrices es  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ , que se obtiene dando los valores  $a = 3$  y  $c = -2$ .

### Rango de una matriz

25. Utilizando transformaciones de Gauss halla el rango de las siguientes matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{matrix} F2+2F1 \\ F3-5F1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 \\ 0 & 8 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango} = 2$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{matrix} F2-2F1 \\ F3-F1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Su rango es } 2.$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow C = \begin{matrix} F2-2F1 \\ F3+F1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Su rango es } 2.$$

26. Determina, en función de los valores de  $a$ , el rango de las matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{matrix} F2-2F1 \\ F3-F1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{el rango es } 2 \text{ para cualquier valor de}$$

$a$ : en todos los casos, las filas 2 y 3 son proporcionales.

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{matrix} F2-F1 \\ F3-F1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{el rango es } 2 \text{ si } a = 1; \text{ es } 3 \text{ en los demás}$$

casos.

c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 \end{pmatrix} \rightarrow$  el rango es 2 si  $a = \pm 1$ ; es 3 en los demás casos.

27. Determina, en función de los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ , el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

Por tanto:

Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son iguales (cualquiera que sea su valor) el rango es 1: las tres filas serán proporcionales.

Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  no son iguales (cualquiera que sea su valor) el rango es 2: las filas 1ª y 3ª siempre son proporcionales.

### Inversa de una matriz

28. Halla por dos métodos distintos (directamente y aplicando el método de Gauss–Jordan) la inversa de cada una de las siguientes matrices, si existe.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) Directamente:

$$\text{Sea } A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a+5c & 2b+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+3c=1 \\ 2a+5c=0 \\ b+3d=0 \\ 2b+5d=1 \end{cases} \Rightarrow a=-5, c=2; b=3, d=-1 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por el método de Gauss–Jordan:

$$\begin{aligned} (A|I) &= \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F2 - 2F1 \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow -F2 \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow F1 - 3F2 \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Directamente:

$$\text{Sea } B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ -2a+2c & -2b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + c = 1 \\ -2a + 2c = 0 \\ 3b + d = 0 \\ -2b + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1/4, c = 1/4; b = -1/8, d = 3/8 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/8 \\ 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

Por el método de Gauss–Jordan:

$$\begin{aligned} (B|I) &= \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F1+F2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F2+2F1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow F2/8 \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2/8 & 3/8 \end{array} \right) \xrightarrow{F1-3F2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 6/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 2/8 & 3/8 \end{array} \right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/8 \\ 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Directamente:

$$\begin{aligned} \text{Sea } C^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a+6c & 2b+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} a+3c = 1 \\ 2a+6c = 0 \\ b+3d = 0 \\ 2b+6d = 1 \end{cases} &\rightarrow \text{El sistema es incompatible, lo que indica que la matriz no es invertible.} \end{aligned}$$

Por el método de Gauss–Jordan:

$$(C|I) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F2-2F1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{En la matriz de la izquierda aparece una fila de ceros, lo que significa que la matriz no es invertible.}$$

**29.** Aplicando el método de Gauss–Jordan halla, cuando exista la inversa de cada una de las siguientes matrices.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } (A|I) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F3-F1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow F1-F3 \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F1-F2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\text{La matriz inversa buscada es } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } (B|I) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F2-F1 \\ F3-2F1}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\
 &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F3+F2 \\ (F3)/(-4)}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right) \rightarrow \\
 &\xrightarrow{F1-F3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right) \xrightarrow{F1-F3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{F2+2F3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right) \\
 \text{La matriz inversa buscada es } B^{-1} &= \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } (C|I) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F2+F1 \\ F3-F1}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

Como en la submatriz izquierda aparecen dos filas repetidas, la matriz  $C$  no tiene inversa.

**30.** Calcula la matriz  $A$  que haga que  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ . Halla la solución de dos maneras:

1) Sin calcular la matriz inversa; 2) Calculándola.

Solución:

$$\begin{aligned}
 \text{1) Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+5b & a+3b \\ 2c+5d & c+3d \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 1 = 2a+5b \\ 3 = a+3b \\ 4 = 2c+5d \\ 2 = c+3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 5 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\text{2) De } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = A.$$

Cálculo de la inversa:

$$\begin{aligned}
 (M|I) &= \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(F1)/2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F2-5F1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\
 &\rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{2F2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F1-(F2)/2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array} \right) = (I|M^{-1})
 \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto, } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**31.** (Propuesto en Selectividad 1997, Madrid)

Calcula los valores del parámetro  $\lambda$  para que la inversa de la matriz  $A = \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 5 & -\lambda \end{pmatrix}$  coincida

con su opuesta.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Si } A^{-1} = -A &\Rightarrow A^{-1} \cdot A = -A \cdot A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ -5 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 5 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda^2 + 10 & 0 \\ 0 & 10 - \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 10 - \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 3. \end{aligned}$$