Examen de matrices y determinantes- 2º BACHILLERATO

Nombre:____Curso:____

ACLARACIONES PREVIAS

- No se permite el uso de calculadoras que representen gráficas.
- Para obtener la puntuación máxima del ejercicio hay que hacer y desarrollar debidamente explicadas todas las soluciones.

1. a)Sea A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular A^n.

   b)Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcular el valor de los siguientes determinantes.

   $$i)\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \qquad ii)\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x/3 & y/3 & z/3 \end{vmatrix}$$

   (2 puntos)

2. Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

   (2 puntos)

3. a) Determinar la matriz X para que tenga solución la ecuación C.(A+X).B=I, donde las matrices A, B y C son matrices no singulares de orden n, e I es la matriz identidad de orden n.

   b) Aplicar el resultado anterior para: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   NOTA: Matriz singular es aquella de determinante nulo. (3 puntos)

4. Para cada número real b, M(b) es la matriz M(b)= $\begin{pmatrix} 4 & 3 & b \\ 2 & 1 & 2 \\ b & b & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

   a) Obtener el determinante de la matriz M(b), y justificar que para cualquier número real b existe la matriz $M(b)^{-1}$.
   b) Calcular la matriz $M(0)^{-1}$.
   c) Si A= M(8), B=M(4) y C=M(3), calcúlese, razonadamente el determinante de la matriz $A.B^{-1}.C^{-1}$.

   (3 puntos)

① a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ siendo n natural

Suponemos cierto para n.

$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se verifica para $n+1 \Rightarrow$ Cierto para $\forall n$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ Voy a llegar a este haciendo las oportunas transformaciones con el conocido en el enunciado.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -(-)\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{3}\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{3 \cdot 5 = 15}$$

ii) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x/3 & y/3 & z/3 \end{vmatrix}$ Voy a intentar llegar al original.

$$\frac{5}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{5}{3}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix}}_{=0} \right)$$

Por ser $F_2 = 2F_1$.

$$= +\frac{5}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{5}{3}\cdot 5 = \frac{25}{3}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

Como ~~es~~ de dimensión $3\times 4 \Rightarrow$ Máximo valor del rango es 3.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6+2 = 8 \neq 0 \Rightarrow \boxed{Rg\, A = 2 \text{ como mínimo}}$

Ahora vamos a ver los menores de orden 3

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & a+4 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{por } C_3]{\text{Desarrollo}} (a+4)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(a+4)\cdot(-1)\cdot(-2+a) = (a+4)(2-a) = 0 \begin{cases} a=-4 \\ a=2 \end{cases}$$

Si $a \neq 2$ y $a \neq -4 \Rightarrow \boxed{Rg\, A = 3}$

Si $\boxed{a=2}$

$$Rg\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$|C_1 C_2 C_3| = 0 \longrightarrow |C_1 C_2 C_4| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0+0-8-24 = -32 \neq 0$

$\boxed{Rg\, A = 3}$

Si $\boxed{a=-4}$

$$Rg\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 6-60+8+10+24+12 = 0$

$\Rightarrow \boxed{Rg\, A = 2}$

③ a) $C\cdot(A+X)\cdot B = I$

$C^{-1}\cdot C\,(A+X)\,BB^{-1} = C^{-1}\cdot I\cdot B^{-1}$;

$A+X = C^{-1}\cdot B^{-1}$; $\boxed{X = C^{-1}B^{-1} - A}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\cancel{|A| = 6-4 = 2}$ $\quad B = 1$ $\quad C = 1$

$\cancel{A_{11} = 2 \quad A_{12} = -1}$ $\quad B_{11} = 1 \quad B_{12} = 0$ $\quad C_{11} = 1 \quad C_{12} = -1$

$\cancel{A_{21} = -4 \quad A_{22} = 3}$ $\quad B_{21} = -1 \quad B_{22} = 1$ $\quad C_{21} = 0 \quad C_{22} = 1$

$\cancel{A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}}$ $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

④ $M(b) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & b \\ 2 & 1 & 2 \\ b & b & -1 \end{pmatrix}$

$$|M(b)| \xrightarrow{C_2^* = C_2 - C_1} \begin{vmatrix} 4 & -1 & b \\ 2 & -1 & 2 \\ b & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1^* = C_1 + bC_3} \begin{vmatrix} 4+b^2 & -1 & b \\ 2+2b & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{por } F_1]{\text{Desarrollo}}$$

$$(-1)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4+b^2 & -1 \\ 2+2b & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2^* = F_2 - F_1} -\begin{vmatrix} 4+b^2 & -1 \\ -2+2b-b^2 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)(-1)^{1+2}\,|-2+2b-b^2|$$

$$= \boxed{b^2 - 2b + 2 = |M(b)|}$$

$|M(b)| = 0 \Rightarrow b^2 - 2b + 2 = 0$; $b = \dfrac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 2}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$ $\nexists$ solución

Así $|M(b)| \neq 0$ para $\forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\exists\, M(b)^{-1} \ \forall b \in \mathbb{R}}$

b) $M(0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$|M(0)| = 2.$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$M_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad M_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \qquad M_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8 \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4-6 = -2$

$$M^{-1}(0) = \frac{1}{|M(0)|} \cdot Adj(M)^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Por las propiedades de los determinantes.

$$|A.B^{-1}.C^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| \cdot |C^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} \cdot \frac{1}{|C|} = |M(8)| \cdot \frac{1}{|M(4)|} \cdot \frac{1}{|M(3)|}$$

$|M(b)| = b^2 - 2b + 2$

$|M(8)| = 8^2 - 2 \cdot 8 + 2 = 64 - 16 + 2 = 50$

$|M(4)| = 4^2 - 2 \cdot 4 + 2 = 16 - 8 + 2 = 10$

$|M(3)| = 3^2 - 2 \cdot 3 + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$

$$\boxed{|AB^{-1}C^{-1}| = 50 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{50}{50} = 1}$$