PROBLEMAS RESUELTOS DE DETERMINANTES

- Determinantes de la selectividad de Andalucía.
- Determinantes de órdenes 3, 4 y 5.
- Determinantes de orden n.

ENUNCIADOS

Determinantes de selectividad

Antes del 2000.

1. Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$. Calcula el valor de $\begin{vmatrix} 3a-b & 6a+2b \\ 3c-d & 6c+2d \end{vmatrix}$

2. Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = 0$

3. Sin desarrollar el determinante, demuestra que

$$\begin{vmatrix} a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \\ a & a+b & a+2b \end{vmatrix} = 9b^2(a+b)$$

4. El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^2 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para $a = 3$.

Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo. Determina todos los valores de a para los que las tres columnas del determinante anterior representan vectores linealmente dependientes.

Año 2000

5. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula los siguientes determinantes:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$$

6. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcula el determinante de las matrices: $2A$, A^{31} y $(A^{31})^{-1}$.

Año 2002

7. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula los valores de t para los que el determinante de A es positivo y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.

8. Sin desarrollarlo, calcula el valor del determinante de la matriz
$\begin{pmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{pmatrix}$ y enuncia las propiedades que hayas utilizado.

Año 2003

9. Sean C1, C2 y C3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

a) El determinante de A^3.
b) El determinante de A^{-1}.
c) El determinante de 2 A.
d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, 3C1-C3; 2C3 y C2.

Año 2004

10. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$

11. Denotamos por M^t a la matriz transpuesta de una matriz M.
Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y que $\det(A) = 4$, calcula los siguientes determinantes:
(a) $\det(3A^t)$ y $\begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix}$
(b) Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea B una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$. Calcula det(B).
(c) Sea C una matriz cuadrada tal que $C^{-1} = C^t$. ¿Puede ser det(C) = 3? Razona la respuesta.

12. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$=-2, Calcula:

(a) $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Año 2005

13. Sabiendo que $A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=2$, calcula:

(a) $|-3A|$ y $|A^{-1}|$

(b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$

14. Sean F_1, F_2 , F_3 , las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:
   (a) El determinante de B^{-1}.
   (b) El determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).
   (c) El determinante de 2B.
   (d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.

<u>Año 2011</u>

15. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A| = 1/2$ y $|B| = -2$.
   Halla:
   (a) $|AB^t|$, siendo B^t la matriz traspuesta de B.
   (b) El rango de B.

Determinantes de orden 3, 4 y 5.

16. Calcular
   (a) $\begin{vmatrix} 0 & 1-i & 1-2i \\ 1+i & 0 & 2+3i \\ 1+2i & 2-3i & 0 \end{vmatrix}$
   (b) $\begin{vmatrix} 1 & \text{sena} & \text{cosa} \\ 1 & \text{senb} & \text{cosb} \\ 1 & \text{senc} & \text{cosc} \end{vmatrix}$
   (c) $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 3x \\ \cos 3x & \cos 5x & \cos 7x \\ \cos 5x & \cos 7x & \cos 9x \end{vmatrix}$

17. Resolver aplicando las propiedades de los determinantes:
   (a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix}=0$
   (b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & x & 2c \\ a^2 & ab & x \end{vmatrix} = 0$
   (c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & x & 2c \\ x & -b & -c \end{vmatrix}=0$

18. Demostrar, sin desarrollar, la igualdad $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$

19. Comprueba, utilizando las propiedades de los determinantes, que

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ x+y & y+z & z+x \\ r+s & s+t & t+r \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix}$$

20. Demuestra sin desarrollar que $\begin{vmatrix} x & y & z+t \\ x & z & y+t \\ x & t & y+z \end{vmatrix} = 0.$

21. Demuestra sin desarrollar que $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

22. Sabiendo que los números de tres cifras “abc”, “def” y “ghi” son múltiplos de 6, demostrar que el determinante

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ también es múltiplo de 6.

23. Calcular:

(a) $\begin{vmatrix} x+y & x & x & x \\ x & x+y & x & x \\ x & x & x+y & x \\ x & x & x & x+y \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} ab & b^2 & a^2 & ab \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ a^2 & ab & ab & b^2 \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & a & 5 & c+b+d \\ 2 & 2b & 6 & 2a+2c+2d \\ 3 & 3c & 7 & 3a+3b+3d \\ 4 & 4d & 8 & 4a+4b+4c \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 5^2 & 6^2 & 7^2 & 8^2 \\ 9^2 & 10^2 & 11^2 & 12^2 \\ 13^2 & 14^2 & 15^2 & 16^2 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ (Este determinante se conoce como determinante de Vandermonde, de orden 4)

(f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t & r \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 & r^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 & r^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 & t^4 & r^4 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 & t^4 \end{vmatrix}$

(h) $\begin{vmatrix} \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} \\ \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} \\ \binom{8}{0} & \binom{8}{1} & \binom{8}{2} & \binom{8}{3} & \binom{8}{4} \\ \binom{9}{0} & \binom{9}{1} & \binom{9}{2} & \binom{9}{3} & \binom{9}{4} \end{vmatrix}$

(i) $\begin{vmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

Determinantes de orden n.

24. Calcular:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_3 & S_3 & \cdots & S_3 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_4 & \cdots & S_4 & S_4 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & \cdots & S_5 & S_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & \cdots & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & \cdots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix}$ Siendo S_i la suma de los primeros i números naturales.

(d) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$

(g) $\left||i-j|\right|_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}}$

(h) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$

25. Demostrar que el determinante de una matriz de orden mayor que 1, con todos sus elementos iguales a ± 1, es siempre un número par.

26. ¿Cuánto vale el determinante de una matriz antisimétrica de orden impar?
¿Cuánto vale el determinante de una matriz idempotente?
¿Cuánto vale el determinante de una matriz nilpotente?

¿Cuánto vale el determinante de una matriz ortogonal?

SOLUCIONES

1.
$\begin{vmatrix} 3a-b & 6a+2b \\ 3c-d & 6c+2d \end{vmatrix}$=(abro por la 1ª columna) $\begin{vmatrix} 3a & 6a+2b \\ 3c & 6c+2d \end{vmatrix} -$
$\begin{vmatrix} b & 6a+2b \\ d & 6c+2d \end{vmatrix}$= (abro ambos determinantes por la 2ª columna)
$\begin{vmatrix} 3a & 6a \\ 3c & 6c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 6a \\ d & 6c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 2b \\ d & 2d \end{vmatrix}$= (el primero y el último de los determinantes son nulos por tener las columnas

proporcionales) $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 6a \\ d & 6c \end{vmatrix} =$ (permuto las columnas del segundo determinante) $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6a & b \\ 6c & d \end{vmatrix}$ =(saco factor común en las columnas) $3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 30+30=60$.

También se puede resolver de otra forma: $\begin{vmatrix} 3a-b & 6a+2b \\ 3c-d & 6c+2d \end{vmatrix} =$ ($C'_1=C_1+C_2/2$) $\begin{vmatrix} 6a & 6a+2b \\ 6c & 6c+2d \end{vmatrix} =$ ($C'_2=C_2-C_1$) $\begin{vmatrix} 6a & 2b \\ 6c & 2d \end{vmatrix} =$ (saco factor común de las columnas) $6\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 60$.

2.

Si hago $F'_3=F_3-F_1$, queda $\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 0 & 0 & 2x \end{vmatrix} = 0$, que desarrollando por los adjuntos de la tercera fila da $2x\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x \\ 2x+1 & x \end{vmatrix} = 0$; saco factor común x de la segunda columna $2x^2\begin{vmatrix} 2x-1 & 3 \\ 2x+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $2x^2(2x-1-6x-3) = 0$; $2x^2(-4x-4) = 0$, que tiene por soluciones 0 y -1.

3.

$\begin{vmatrix} a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \\ a & a+b & a+2b \end{vmatrix} =$ (A la primera columna le sumo las otras dos) $\begin{vmatrix} 3a+3b & a & a+b \\ 3a+3b & a+2b & a \\ 3a+3b & a+b & a+2b \end{vmatrix} =$ (saco factor común 3a+3b, de la primera columna) $=(3a+3b)\begin{vmatrix} 1 & a & a+b \\ 1 & a+2b & a \\ 1 & a+b & a+2b \end{vmatrix} =$(a las 2ª y 3ª filas les resto la 1ª) $(3a+3b)\begin{vmatrix} 1 & a & a+b \\ 0 & 2b & -b \\ 0 & b & b \end{vmatrix} =$ (saco factor común b, de la 2ª y 3ª filas)= $(3a+3b)b^2\begin{vmatrix} 1 & a & a+b \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ (a la 2ª columna le resto la 3ª) $\begin{vmatrix} 1 & -b & a+b \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ (el determinante es triangular: su valor será 3, que es el producto de los elementos de la diagonal) $(3a+3b)b^2 3 = 9b^2(a+b)$

4.

Cambio a por 3: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 13 \\ 8 & 27 & 35 \end{vmatrix}$ y observo que la tercera columna es suma de la primera y la segunda. Si una línea es combinación lineal de otras paralelas el determinante vale 0, y este es el caso.

Que las tres columnas sean linealmente dependientes equivale a que el determinante valga cero: $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^2 & 35 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & a & 13 \\ 8 & a & 35 \end{vmatrix} = a(70a + 104 + 20a - 40a - 140 - 26a) = a(4a - 36) = 4a(a - 9) = 0$, si a=0 o a=9.

5.

(a) El determinante (a) se obtiene del original multiplicando, primero, la 1ª fila por 3 y, luego, la 3ª columna por 5. En consecuencia, su valor es 2·3·5=30.
(b) El determinante (b) se obtiene añadiendo a la 1ª columna el doble de la segunda (lo que no altera su valor) y, luego, intercambiando la 2ª y 3ª columnas (que le cambia el signo), en consecuencia vale -2.

6.
Como
$|A| = -1, |2A| = 2^3|A| = -8, |A^{31}| = |A|^{31} = (-1)^{31} = -1, |(A^{31})^{-1}| = \frac{1}{|A^{31}|} = \frac{1}{-1} = -1.$

7.

$|A| = -t^2 + 3t + 4$, que es una función cuadrática con coeficiente líder negativo. Deducimos que el determinante será positivo para los valores comprendidos entre los valores de t que determinan el corte de su gráfica con el eje x. Resolviendo la ecuación $0 = -t^2 + 3t + 4$, obtenemos t=-1 y t=4. El mayor valor se corresponde con el vértice de la parábola, cuya abcisa es t=1.5, siendo este valor $-(1.5)^2 + 3 \cdot 1.5 + 4 = 6.25$.

8.
$\begin{vmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & x & 1 \\ 2k & y & 2 \\ 3k & z & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & x & ax \\ 2k & y & ay \\ 3k & z & az \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & y & 2 \\ 3 & z & 3 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} k & x & x \\ 2k & y & y \\ 3k & z & z \end{vmatrix} =$
0, por tener cada uno de los determinantes columnas iguales.

9.
a) $|A^3| = |A|^3 = 125.$
b) $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{5}$
c) $|2A| = 2^3|A| = 40.$
d) Det (3C1-C3; 2C3; C2) = Det (3C1; 2C3; C2) – Det (-C3; 2C3; C2) = (el segundo determinante es 0, por tener proporcionales las dos primeras

columnas) Det (3C1; 2C3; C2) = 3·2 Det (C1; C3; C2) = -3·2 Det (C1; C2; C3)= -30.

10.

(a) $\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix} = 18$

(b) Se obtiene multiplicando la 2ª columna del determinate original por -2, y luego cambiando la segunda y la primera columnas. Así, el nuevo determinante es

2·(-6)=-12.

(c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix}$, El primer determinante es nulo, por ser proporcionales las filas 1ª y 3ªl. El resultado es -(-6)=6,

11.

(a) $|3A^t| = 3^2|A^t| = 3^2|A| = 36$. $\begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot(-1)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 24.$

(b) $1 = |I| = |B^3| = |B|^3$. Luego $|B| = 1$.

(c) $\frac{1}{|C|} = |C^{-1}| = |C^t| = |C|$. Luego $|C|^2 = 1$, con lo que $|C| \pm 1$.

12.

a) El determinante se obtiene multiplicando la 1ª fila por 3 y, luego, la 3ª columna por 5, así el determinante original queda multiplicado por 15, valiendo -30.
b) Se obtiene multiplicando po3 3 la 1ª fila, y cambiándola con la segunda, así el determinante original queda multiplicado por -3, valiendo 6.
c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$= (abro por la segunda fila)

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$-$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$ (el segundo determinante es nulo por tener iguales la 2ª y 3ª filas).

13.

a) $|-3A| = (-3)^3|A| = -54$. $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{2}$

b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$=(saco factor común 2 de la 3ª fila) $2\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix}$=

(intercambio la 1ª y 3ª columnas)-2$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & 2h & i \end{vmatrix}$=-4.

$\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$= (abro por la 3ª columna) $\begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix}$-$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$=-2, ya que el primer determinante es nulo por tener dos columnas iguales.

14.

(a) $|B^{-1}| = |B|^{-1} = -\frac{1}{2}$

(b)$|B^t|^4 =$ (el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta)$|B|^4 =$ 16.

(c) $|2B| = 2^3|B| - 16$.

(d) $Det(5F_1 - F_3, 3F_3, F_2) = Det(5F_1, 3F_3, F_2) + Det(-F_3, 3F_3, F_2) =$

$= 5.3\ Det(F_1, F_3, F_2) + 0 =$-15. $Det(F_1, F_2, F_3)$=30.

15.

Los tres primeros apartados son similares a otros ya vistos.

a) $|AB^t| = |A||B^t| = |A||B|$=-1.
b) Vale 3, por tener el determinante no nulo.

16.

a. $\begin{vmatrix} 0 & 1-i & 1-2i \\ 1+i & 0 & 2+3i \\ 1+2i & 2-3i & 0 \end{vmatrix}$= (abro por la primera columna)

$=\begin{vmatrix} 0 & 1-i & 1-2i \\ 1 & 0 & 2+3i \\ 1 & 2-3i & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1-i & 1-2i \\ i & 0 & 2+3i \\ 2i & 2-3i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-i & 1-2i \\ 1 & 0 & 2+3i \\ 1 & 2-3i & 0 \end{vmatrix}$

$+\ i.\begin{vmatrix} 0 & 1-i & 1-2i \\ 1 & 0 & 2+3i \\ 2 & 2-3i & 0 \end{vmatrix}$ = (hago ceros mediante $F'_3=F_3-F_2$ en el primer determinante, y $F'_3=F_3-2F_2$ en el segundo)

$\begin{vmatrix} 0 & 1-i & 1-2i \\ 1 & 0 & 2+3i \\ 0 & 2-3i & -2-3i \end{vmatrix} + i.\begin{vmatrix} 0 & 1-i & 1-2i \\ 1 & 0 & 2+3i \\ 0 & 2-3i & -4-6i \end{vmatrix}$ Ahora desarrollo por la primera columna: $-\begin{vmatrix} 1-i & 1-2i \\ 2-3i & -2-3i \end{vmatrix} - i.\begin{vmatrix} 1-i & 1-2i \\ 2-3i & -4-6i \end{vmatrix} =$

$-[(1-i)(-2-3i)-(1-2i)(2-3i)] - i[(1-i)(-4-6i) -$
$(1-2i)(2-3i)] = -[-2-3i+2i-3-(2-3i-4i-6)] -$

$i[-4-6i+4i-6-(2-3i-4i-6)]=-1+6i-i[-6+5i]=$
$-1+6i+6i+5=4+12i$

b. $\begin{vmatrix}1 & \text{sena} & \text{cosa}\\ 1 & \text{senb} & \text{cosb}\\ 1 & \text{senc} & \text{cosc}\end{vmatrix}=\text{senb cosc}+\text{sena cosb}+\text{senc cosa}-$
$\text{senb cos a}-\text{sena cosc}-\text{senc cosb}=$(transformo productos en sumas) $\frac{1}{2}[\text{sen}(b+c)+\text{sen}(b-c)+\text{sen}(a+b)+\text{sen}(a-b)+\text{sen}(c+a)+\text{sen}(c-a)-\text{sen}(b+a)-\text{sen}(b-a)-\text{sen}(a+c)-\text{sen}(a-c)-\text{sen}(c+b)-\text{sen}(c-b)]=\frac{1}{2}[\text{sen}(b-c)+\text{sen}(a-b)+\text{sen}(c-a)-\text{sen}(b-a)-\text{sen}(a-c)-\text{sen}(c-b)]=$
(teniendo en cuenta que $\text{senx}=-\text{sen}(-x)$, será $-\text{sen}(b-a)=\text{sen}(a-b)$, etc.) $\frac{1}{2}[2\text{sen}(b-c)+2\text{sen}(a-b)+2\text{sen}(c-a)]=\text{sen}(b-c)+\text{sen}(a-b)+\text{sen}(c-a)$

c. $\begin{vmatrix}1 & \text{cosx} & \text{cos3x}\\ \text{cos3x} & \text{cos5x} & \text{cos7x}\\ \text{cos5x} & \text{cos7x} & \text{cos9x}\end{vmatrix}=\text{cos5xcos9x}+\text{cosxcos5xcos7x}+$
$\cos^2 3x\cos 7x-\cos 3x\cos^2 5x-\cos x\cos 3x\cos 9x-\cos^2 7x=$
$\cos x(\cos 5x\cos 7x-\cos 3x\cos 9x)+\cos 3x(\cos 3x\cos 7x-\cos^2 5x)+$
$\cos 5x\cos 9x-\cos^2 7x=$ (Ahora transformo los productos en sumas)
$=\frac{1}{2}[\cos x(\cos 12x+\cos 2x-\cos 12x-\cos 6x)+\cos 3x(\cos 10x+\cos 4x-\cos 10x-\cos 0x)+\cos 14x+\cos 4x-\cos 14x-\cos 0]=$
(elimino los términos opuestos y considero que $\cos 0=1$)
$\frac{1}{2}[\cos x(\cos 2x-\cos 6x)+\cos 3x(\cos 4x-1)+\cos 4x-1]=$
$\frac{1}{2}[\cos x\cos 2x-\cos x\cos 6x+\cos 3x\cos 4x-\cos 3x+\cos 4x-1]=$
(Volvemos a proceder como antes) $\frac{1}{2}\left[\frac{\cos 3x+\cos x}{2}-\frac{\cos 7x+\cos 5x}{2}+\frac{\cos 7x+\cos x}{2}-\cos 3x+\cos 4x-1\right]=-\frac{1}{2}+\frac{\cos x}{2}-\frac{\cos 3x}{4}+\frac{\cos 4x}{2}-\frac{\cos 5x}{4}$

17.

a. $\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & x & c\\ a & b & x\end{vmatrix}=0$. Si cambio x por b, resultan iguales la 1ª y 2ª filas, luego su valor es cero. Si cambio x por c, serán iguales la 1ª y 3ª. Como el determinante es un polinomio de grado 2, no puede haber más soluciones que las citadas x=b y x=c.

b. $\begin{vmatrix}a & b & c\\ 2a & x & 2c\\ a^2 & ab & x\end{vmatrix}=0$. Si hago x=2b, queda $\begin{vmatrix}a & b & c\\ 2a & 2b & 2c\\ a^2 & ab & 2b\end{vmatrix}=$ (saco a factor común de la 1ª columna y b de la 2ª) ab. $\begin{vmatrix}1 & 1 & c\\ 2 & 2 & 2c\\ a & a & x\end{vmatrix}=0$, por tener iguales las dos primeras columnas. Si hago x=ac, queda

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & ac & 2c \\ a^2 & ab & ac \end{vmatrix} = ac.\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 2 & x & 2 \\ a & ab & a \end{vmatrix} = 0$. Soluciones: x=2b y x=ac.

c. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & x & 2c \\ x & -b & -c \end{vmatrix} = 0$. Si hago x=2b, quedan proporcionales la primera y segunda filas, resultando nulo el valor del determinante. Si hago x=-a, serán proporcionales las filas 1ª y 3ª. Soluciones: x=2b y x=-a.

18.

$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} =$ (multiplico por abc la primera columna y compenso dividiendo fuera) $\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} =$ (saco factor común, a, b y c, de la 1ª, 2ª y 3ª filas, respectivamente)

$\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$

19.

$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ x+y & y+z & z+x \\ r+s & s+t & t+r \end{vmatrix} =$ (comienzo abriendo por la primera columna)

$\begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ x & y+z & z+x \\ r & s+t & t+r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ y & y+z & z+x \\ s & s+t & t+r \end{vmatrix} =$(abro por las segundas columnas)

$\begin{vmatrix} a & b & c+a \\ x & y & z+x \\ r & s & t+r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & c+a \\ x & z & z+x \\ r & t & t+r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & c+a \\ y & y & z+x \\ s & s & t+r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c+a \\ y & z & z+x \\ s & t & t+r \end{vmatrix} =$ el tercer determinante es nulo, por tener dos columnas iguales, los demás los abro por la tercera columna:

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & a \\ x & y & x \\ r & s & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & c \\ x & z & z \\ r & t & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & a \\ x & z & x \\ r & t & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c \\ y & z & z \\ s & t & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ y & z & x \\ s & t & r \end{vmatrix} =$

(El 2º, 3º, 4º y 5º determinantes son nulos por repetir columnas)

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ y & z & x \\ s & t & r \end{vmatrix}$ en el último determinante hago dos cambios con la tercera columna y, al permanecer igual el signo, quedará: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} +$

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix}$.

Otra forma de resolver el ejercicio es: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = (C_1' = C_1 + C_2;\ C_2' = C_2 + C_3) \begin{vmatrix} a+b & b+c & c \\ x+y & y+z & z \\ r+s & s+t & t \end{vmatrix} = (C_3' = 2C_3 + C_1 - C_2,) =$ $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ x+y & y+z & z+x \\ r+s & s+t & t+r \end{vmatrix} =$ (teniendo en cuenta que, si multiplico una columna por2, también queda multiplicado el determinante) $2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix}$

20.

$\begin{vmatrix} x & y & z+t \\ x & z & y+t \\ x & t & y+z \end{vmatrix} =$ (sumo a la primera columna las demás)

$\begin{vmatrix} x+y+z+t & y & z+t \\ x+y+z+t & z & y+t \\ x+y+z+t & t & y+z \end{vmatrix} =$ (saco factor común de la primera columna)

$(x+y+z+t)\begin{vmatrix} 1 & y & z+t \\ 1 & z & y+t \\ 1 & t & y+z \end{vmatrix} =$ (A la tercera columna le sumo la segunda) $=$

$(x+y+z+t)\begin{vmatrix} 1 & y & y+z+t \\ 1 & z & y+z+t \\ 1 & t & y+z+t \end{vmatrix} =$ (saco factor común de la tercera columna) $(x+y+z+t)(y+z+t)\begin{vmatrix} 1 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix} = 0$ por tener dos columnas iguales el determinante.

21.

$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} =$ (a la primera fila le sumo las otras)

$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} =$ (saco factor común a+b+c de la 1ª fila)=

(a+b+c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} =$ (a las columnas 2ª y 3ª les quito la 1ª) $=$

(a+b+c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix} =$ (el determinante es triangular superior)

(a+b+c)(-a-b-c)(-a-b-c)=$(a+b+c)^3$.

22.

Si hacemos $C'_3=C_3+10C_2+100C_1$, el determinante queda como $\begin{vmatrix} a & b & "abc" \\ d & e & "def" \\ g & h & "ghi" \end{vmatrix}$ y, al ser la última columna múltiplo de tres, también lo será el determinante.

23.

a. $\begin{vmatrix} x+y & x & x & x \\ x & x+y & x & x \\ x & x & x+y & x \\ x & x & x & x+y \end{vmatrix}$ =(Sumo el resto de columnas a la primera) $\begin{vmatrix} 4x+y & x & x & x \\ 4x+y & x+y & x & x \\ 4x+y & x & x+y & x \\ 4x+y & x & x & x+y \end{vmatrix}$ = (saco factor común de la primera columna) $(4x+y)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & x+y & x & x \\ 1 & x & x+y & x \\ 1 & x & x & x+y \end{vmatrix}$= (le resto la primera fila a las demás)

$(4x+y)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{vmatrix}$ =(el determinante es triangular) $(4x+y)y^3$

b. $\begin{vmatrix} ab & b^2 & a^2 & ab \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ a^2 & ab & ab & b^2 \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$ = (a la primera columna le sumo las demás)

$\begin{vmatrix} 2ab+a^2+b^2 & b^2 & a^2 & ab \\ 2ab+a^2+b^2 & a^2 & b^2 & ab \\ 2ab+a^2+b^2 & ab & ab & b^2 \\ 2ab+a^2+b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$ =(saco factor común de la 1ª columna)

$(a+b)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & b^2 & a^2 & ab \\ 1 & a^2 & b^2 & ab \\ 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$ = (a cada fila le quito la primera)

$(a+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & b^2 & a^2 & ab \\ 0 & a^2-b^2 & b^2-a^2 & 0 \\ 0 & ab-b^2 & ab-a^2 & b^2-ab \\ 0 & ab-b^2 & ab-a^2 & a^2-ab \end{vmatrix}$ = (desarrollo por C_1) =

$(a+b)^2 \begin{vmatrix} a^2-b^2 & b^2-a^2 & 0 \\ ab-b^2 & ab-a^2 & b^2-ab \\ ab-b^2 & ab-a^2 & a^2-ab \end{vmatrix}$ = ($F'_3=F_3-F_2$) $(a+b)^2 \begin{vmatrix} a^2-b^2 & b^2-a^2 & 0 \\ ab-b^2 & ab-a^2 & b^2-ab \\ 0 & 0 & a^2-b^2 \end{vmatrix}$ = (desarrollo por la fila3)

$(a+b)^2\,(a^2-b^2)\begin{vmatrix} a^2-b^2 & b^2-a^2 \\ ab-b^2 & ab-a^2 \end{vmatrix}$ = ($C'_2=C_2-C_1$) $(a+b)^2\,(a^2-b^2)\begin{vmatrix} a^2-b^2 & 0 \\ ab-b^2 & -a^2-b^2+2ab \end{vmatrix}$ =$(a+b)^2\,(a^2-b^2)(a^2-b^2)(-a^2-b^2+2ab) = -(a+b)^2\,(a-b)^2(a^2-b^2)(a^2-b^2)$ =$-(a-b)^4$

c. $\begin{vmatrix} 1 & a & 5 & c+b+d \\ 2 & 2b & 6 & 2a+2c+2d \\ 3 & 3c & 7 & 3a+3b+3d \\ 4 & 4d & 8 & 4a+4b+4c \end{vmatrix}$ = (a la cuarta columna le sumo la segunda, y saco factor común)

$\begin{vmatrix} 1 & a & 5 & a+c+b+d \\ 2 & 2b & 6 & 2(a+c+b+d) \\ 3 & 3c & 7 & 3(a+c+b+d) \\ 4 & 4d & 8 & 4(a+c+b+d) \end{vmatrix}$ = saco fuera el factor a+b+c+d de la cuarta columna $(a+c+b+d)\begin{vmatrix} 1 & a & 5 & 1 \\ 2 & 2b & 6 & 2 \\ 3 & 3c & 7 & 3 \\ 4 & 4d & 8 & 4 \end{vmatrix}$=0, por tener dos columnas iguales.

d. $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 5^2 & 6^2 & 7^2 & 8^2 \\ 9^2 & 10^2 & 11^2 & 12^2 \\ 13^2 & 14^2 & 15^2 & 16^2 \end{vmatrix}$ = (a cada fila le resto la anterior)

$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 5^2-1^2 & 6^2-2^2 & 7^2-3^2 & 8^2-4^2 \\ 9^2-5^2 & 10^2-6^2 & 11^2-7^2 & 12^2-8^2 \\ 13^2-9^2 & 14^2-10^2 & 15^2-11^2 & 16^2-12^2 \end{vmatrix}$ = (hago suma por diferencia) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 6.4 & 8.4 & 10.4 & 12.4 \\ 14.4 & 16.4 & 18.4 & 20.4 \\ 22.4 & 24.4 & 26.4 & 28.4 \end{vmatrix}$ = (saco el 4 factor común)

$4^3\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 & 20 \\ 22 & 24 & 26 & 28 \end{vmatrix}$ = (F'$_3$=F$_3$-F$_2$ yF'$_4$=F$_4$-F$_3$) $4^3\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{vmatrix}$ = 0, por tener dos filas iguales.

e. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ (a cada fila se le resta la anterior multiplicada por a) =

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ba & c^2-ca & d^2-da \\ 0 & b^3-b^2a & c^3-c^2a & d^3-d^2a \end{vmatrix}$ (desarrollo por la primera columna y extraigo factor común)

$=\begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} =$

(le resto a cada fila la anterior multiplicada por b) $= (b-a)(c-a)(d-a)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c(c-b) & b(d-b) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)$$

$\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c(c-b) & d(d-b) \end{vmatrix} = \quad (b-a)(c-a)(d-a)\ (c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)\ (c-b)(d-b)(d-c)$

f. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t & r \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 & r^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 & r^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 & t^4 & r^4 \end{vmatrix}$ También es, como el anterior, un determinante de Vandermonde. Procediendo de manera similar, obtenemos el resultado

$(r-x)(t-x)(z-x)(y-x)(r-y)(t-y)(z-y)(r-z)(t-z)(r-t)$

g. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 & t^4 \end{vmatrix}$ =(Como el determinante es parecido al de Vandermonde, procederemos de manera similar: $F'_2=F_2-xF_1$; $F'_3=F_3-xF_2$; $F'_4=F_4-x^2F3$) $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x & t-x \\ 0 & y^2-yx & z^2-zx & t^2-tx \\ 0 & y^4-y^2x^2 & z^4-z^2x^2 & t^4-t^2x^2 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x & t-x \\ 0 & y(y-x) & z(z-x) & t(t-x) \\ 0 & y^2(y^2-x^2) & z^2(z^2-x^2) & t^2(t^2-x^2) \end{vmatrix} =$$

$\begin{vmatrix} y-x & z-x & t-x \\ y(y-x) & z(z-x) & t(t-x) \\ y^2(y+x)(y-x) & z^2(z+x)(z-x) & t^2(t+x)(t-x) \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \\ y^2(y+x) & z^2(z+x) & t^2(t+x) \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \\ y^3+y^2x & z^3+z^2x & t^3+t^2x \end{vmatrix}$ = (abro en suma de dos determinantes, por la tercera fila) =

$$(y-x)(z-x)(t-x)\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \\ y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \\ y^2x & z^2x & t^2x \end{vmatrix}\right) =$$

$$(y-x)(z-x)(t-x)\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \\ y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \\ y^2 & z^2 & t^2 \end{vmatrix}\right) =$$

Si en el primer determinante del paréntesis, hago $F'_2=F_2-yF_1$, $F'_3=F_3-y^2F_2$,

queda $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z-y & t-y \\ 0 & z(z^2-y^2) & t(t^2-y^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z-y & t-y \\ z(z+y)(z-y) & t(t+y)(t-y) \end{vmatrix} =$

$(z-y)(t-y)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z(z+y) & t(t+y) \end{vmatrix} = (z-y)(t-y)[t(t+y)-z(z+y)]$

EL segundo determinante del paréntesis es de tipo Vandermonde, su valor será $x[(z-y)(t-y)(t-z)]$

$(y-x)(z-x)(t-x)(z-y)\{(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{y})[t(t+y)-z(z+y)] + x[(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{y})(t-z)]\}= (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(z-y)(t-y)[t(t+y)-z(z+y)+x(t-z)]= (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(z-y)(t-y)[\,t^2+\boldsymbol{ty}-z^2-\boldsymbol{zy}+x(t-z)]= (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(z-y)(t-y)[\,t^2-z^2+y(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{z})+x(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{z})]= (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(z-y)(t-y)[\,(t+z)(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{z})(y+x)]= (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(z-y)(t-y)(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{z})+(x+y+z+t)$

h. $\begin{vmatrix} \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} \\ \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} \\ \binom{8}{0} & \binom{8}{1} & \binom{8}{2} & \binom{8}{3} & \binom{8}{4} \\ \binom{9}{0} & \binom{9}{1} & \binom{9}{2} & \binom{9}{3} & \binom{9}{4} \end{vmatrix}$ Como es obvio, para resolver el determinante, conviene conocer las propiedades de los números combinatorios. En particular, utilizaremos la propiedad siguiente: $\binom{n}{k}-\binom{n-1}{k}=\binom{n-1}{k-1}$

Demostración: $\binom{n}{k}-\binom{n-1}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}-\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}=$

$\frac{n!}{k!(n-k)!}-\frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)![n-(n-k)]}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}=\binom{n-1}{k-1}$

Si en el determinante restamos a cada columna la anterior, consideramos la propiedad anterior, y que $\binom{n}{0}=1$, quedará:

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} \\ 0 & \binom{6}{1}-\binom{5}{1} & \binom{6}{2}-\binom{5}{2} & \binom{6}{3}-\binom{5}{3} & \binom{6}{4}-\binom{5}{4} \\ 0 & \binom{7}{1}-\binom{6}{1} & \binom{7}{2}-\binom{6}{2} & \binom{7}{3}-\binom{6}{3} & \binom{7}{4}-\binom{6}{4} \\ 0 & \binom{8}{1}-\binom{7}{1} & \binom{8}{2}-\binom{7}{2} & \binom{8}{3}-\binom{7}{3} & \binom{8}{4}-\binom{7}{4} \\ 0 & \binom{9}{1}-\binom{8}{1} & \binom{9}{2}-\binom{8}{2} & \binom{9}{3}-\binom{8}{3} & \binom{9}{4}-\binom{8}{4} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} \\ 0 & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} \\ 0 & \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} \\ 0 & \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} \\ 0 & \binom{8}{0} & \binom{8}{1} & \binom{8}{2} & \binom{8}{3} \end{vmatrix} = \text{(desarrollando por la primera columna)}$$

$$\begin{vmatrix} \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} \\ \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} \\ \binom{8}{0} & \binom{8}{1} & \binom{8}{2} & \binom{8}{3} \end{vmatrix}$$ que es el determinante original, al que se le ha suprimido la última fila y la última columna. Si procedemos sucesivamente, de la misma manera, llegaremos a que $\begin{vmatrix} \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} \\ \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} \\ \binom{8}{0} & \binom{8}{1} & \binom{8}{2} & \binom{8}{3} & \binom{8}{4} \\ \binom{9}{0} & \binom{9}{1} & \binom{9}{2} & \binom{9}{3} & \binom{9}{4} \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} \\ \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} \\ \binom{8}{0} & \binom{8}{1} & \binom{8}{2} & \binom{8}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} \\ \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{5}{0} & \binom{5}{1} \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{1} \end{vmatrix} = \left|\binom{5}{0}\right| = 1.$$

i. $\begin{vmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$ =(desarrollo por los adjuntos de la primera columna)

$a_4 \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$ = (el primer determinante es triangular)

$a_4x^4 + \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$ Éste determinante es semejante al primero, si procedo de manera análoga, obtendré un resultado igual a

$a_4x^4 + a_3x^3 + \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$. Reiterando el proceso, se obtiene que

$\begin{vmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = a_4x^4 + a_3x^3 + 2x^2 + a_1x + a_0$ que nos permite interpretar un polinomio como un determinante.

24.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix}$=(a cada fila le resto la primera) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1-x \end{vmatrix}$$=-x(1-x)(2-x)(3-x)\ldots.(n-1-x)$.

b. $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$= (a cada fila le resto la primera)

$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$=n!

c. $\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_3 & S_3 & \cdots & S_3 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_4 & \cdots & S_4 & S_4 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & \cdots & S_5 & S_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & \cdots & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & \cdots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 & 6 & \cdots & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 10 & \cdots & 10 & 10 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \cdots & 15 & 15 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \cdots & \frac{(n-1)n}{2} & \frac{(n-1)n}{2} \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \cdots & \frac{(n-1)n}{2} & \frac{n(n+1)}{2} \end{vmatrix} =$ (A cada fila le quito la anterior) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \cdots & 5 & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} =$ ¡También obtenemos n!!

d. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} =$(a cada columna le resto la última)

$\begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1-n & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} =$ (desarrollo por los adjuntos de la última fila) n(1-n)(2-n)(3-n)....(-2)(-1) = (si cambio de signo a todos los factores, menos el primero, y compenso los n-1 cambios, me queda, ¡como no!:) $(-1)^n . n(n-1(n-2) \ldots .2.1 =$ $(-1)^{n-1} . n!$

e. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ = (A la primera columna le sumo todas las demás) $\begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ =(saco factor común de la primera columna) (n-1).$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ = (A cada fila le resto la primera) $(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$ = $(-1)^{n-1}$.(n-1)

f. $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$ = (La mejor opción es desarrollar por la primera columna, porque nos quedan dos determinantes triangulares) = a $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$ + $(-1)^{n+1}.b.\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$ $=a^n + (-1)^{n+1}.b^n$

g. $\left||i-j|\right|_{\substack{i=1\ldots n\\ j=1\ldots n}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1\\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2\\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3\\ 3 & 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ = (a cada fila le resto la anterior) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1\\ 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & 1 & 1 & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} =$

$(F_i' = F_i - F_{i-1};\ i = 3 \ldots. n) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1\\ 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix}$

=(desarrollo por los adjuntos de C_1)

$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1\\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix}$ = (desarrollo por los adjuntos de la última columna) – $(-1)^n (n-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} (n-1) 2^{n-2}$

h.

i. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = (desarrollo por la primera fila) 2.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$. El primero de los determinantes que me han quedado, es similar al determinante original, pero de un orden menor, los denominaremos respectivamente como D_n y D_{n-1}. Si vuelvo a desarrollar el segundo determinante por la primera fila, queda: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$, siendo el primero D_{n-2}, y el segundo 0, por tener la primera columna de ceros. Obtenemos así la siguiente ley de recurrencia: $D_n=2\,D_{n-1}-D_{n-2}$. Si observamos los primeros determinantes, vemos que

$D_1=|2|=2$, $D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3$. $D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4=2D_2-D_1$. La sucesión de determinantes es,por lo tanto: 2, 3, 4, 5, ...: siendo $D_n = n+1$

j. $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=$ (desarrollo por los adjuntos de C_1)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

El primer determinante es triangular superior, y vale 2^{n-1}, el segundo es semejante a D_n, pero de un orden menor. Tenemos así la ley de recurrencia $D_n=2^{n-1}+D_{n-1}$.

Como $D_1=1$, será:

$D_2=2^1+D_1=2^1+1$;

$D_3=2^2+D_2=2^2+2^1+1$

$D_4=2^3+D_3=2^3+2^2+2^1+1$

En general, $D_n=1+2^1+2^2+2^3+....+2^{n-1}$, que es la suma de los n primeros términos de la progresión geométrica de primer término 1 y razón 2. En consecuencia $D_n=2^n-1$.

25.

Si a todas las filas les sumo la primera, en éstas sólo habrá 0, 2 o -2, luego desarrollo por los adjuntos de la primera fila y obtengo un resultado par.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1. \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} +$

$1. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 1. \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} + 1. \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$ suma de pares = par.

26.

Una matriz es antisimétrica si es igual a la opuesta de su traspuesta. Como $A = -A^t$, tenemos que $|A| = |-A^t| = (-1)^n|-A^t| = (-1)^n|A| = -|A|$. En consecuencia, el determinante vale 0.

Una matriz es idempotente si es igual a su cuadrado. Como A^2=A, será $|A^2| = |A|$. De otro lado $|\mathrm{A}^2| = |\mathrm{A}|^2$, quedando $|\mathrm{A}| = |\mathrm{A}|^2$, luego $|\mathrm{A}| = \pm 1$.

Una matriz A se dice que es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$. Tendremos que $|A^k| = |A|^k = |0| = 0$: Su determinante será nulo.

Una matriz A es ortogonal si su inversa coincide con su traspuesta. Tomando determinantes, se tiene que $|A|^{-1} = |A^{-1}| = |A^t| = |A|$. De ahí que su determinante sea 1.