

TEMA 9 – DERIVADAS

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO, APLICANDO LA DEFINICIÓN

EJERCICIO 1 : Halla la derivada de la siguiente función en $x = 1$, aplicando la definición de derivada:

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$\text{Solución: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

EJERCICIO 2 : Calcula, utilizando la definición de derivada, $f'(1)$ para la función $f(x) = \frac{x-1}{3}$.

$$\text{Solución: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{3} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

EJERCICIO 3 : Halla la derivada de la función $f(x) = (x - 1)^2$ en $x = 2$, aplicando la definición de derivada

$$\text{Solución: } f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

EJERCICIO 4 : Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(1)$, siendo $f(x) = \frac{2}{x}$.

$$\text{Solución: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2 - 2x}{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 2x}{(x - 1)x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1 - x)}{(x - 1)x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{x} = -2$$

FUNCIÓN DERIVADA, APLICANDO LA DEFINICIÓN

EJERCICIO 5 : Halla $f'(x)$, aplicando la definición de derivada:

a) $f(x) = x^2 + 1$ b) $f(x) = \frac{x+1}{3}$ c) $f(x) = 2x^2$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e) $f(x) = \frac{2x}{3}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh + 1 - x^2 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x) = 2x \end{aligned}$$

$$\text{b) } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h+1}{3} - \frac{x+1}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h+1-x-1}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x^2 + h^2 + 2xh) - 2x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2h^2 + 4xh - 2x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 4xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2h + 4x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 4x) = 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{e) } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2(x+h)}{3} - \frac{2x}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2x+2h-2x}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2h}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{3h} = \frac{2}{3}$$

CÁLCULO DE DERIVADAS INMEDIATAS

EJERCICIO 6 : Halla la función derivada de:

- | | | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--|
| a) $f(x) = 3x^4 - 2x + 5$ | b) $f(x) = e^x$ | c) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ | d) $f(x) = \ln x$ |
| e) $f(x) = 2x^5 + \frac{x}{3}$ | f) $f(x) = \operatorname{sen} x$ | g) $f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{5}$ | h) $f(x) = \cos x$ |
| i) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ | j) $f(x) = \operatorname{tg} x$ | k) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x + 1}$ | l) $f(x) = xe^x$ |
| m) $f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - 2}$ | n) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ | ñ) $f(x) = \frac{1 - x^2}{x - 3}$ | o) $f(x) = x \ln x$ |
| p) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x}$ | q) $f(x) = \frac{3x + 1}{e^x}$ | r) $f(x) = \frac{3x^2}{2x + 3}$ | s) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{sen} x$ |

Solución:

- | | | | |
|--|--|--|------------------------------------|
| a) $f'(x) = 12x^3 - 2$ | b) $f'(x) = e^x$ | c) $f'(x) = 6x^2 - 2x$ | d) $f'(x) = \frac{1}{x}$ |
| e) $f'(x) = 10x^4 + \frac{1}{3}$ | f) $f'(x) = \cos x$ | g) $f'(x) = 3x^2 - 6x$ | h) $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ |
| i) $f'(x) = 12x^2 - 6x$ | j) $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | | |
| k) $f'(x) = \frac{2x(2x+1) - (x^2+2) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2 + 2x - 2x^2 - 4}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x+1)^2}$ | | l) $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$ | |
| m) $f'(x) = \frac{3(x^2-2) - (3x-1)2x}{(x^2-2)^2} = \frac{3x^2 - 6 - 6x^2 + 2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-3x^2 + 2x - 6}{(x^2-2)^2}$ | | n) $f'(x) = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$ | |
| ñ) $f'(x) = \frac{-2x(x-3) - (1-x^2) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{-2x^2 + 6x - 1 + x^2}{(x-3)^2} = \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x-3)^2}$ | | o) $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$ | |
| p) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$ | q) $f'(x) = \frac{3e^x - (3x+1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(3-3x-1)}{(e^x)^2} = \frac{2-3x}{e^x}$ | | |
| r) $f'(x) = \frac{6x(2x+3) - 3x^2 \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{12x^2 + 18x - 6x^2}{(2x+3)^2} = \frac{6x^2 + 18x}{(2x+3)^2}$ | | | |
| s) $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} \operatorname{sen} x + x^{1/3} \cdot \cos x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen} x + \sqrt[3]{x} \cdot \cos x$ | | | |

CÁLCULO DE DERIVADAS

EJERCICIO 7 : Halla la función derivada de:

- | | | | |
|---|---|--|---|
| a) $f(x) = (3x^2 + x)^4$ | b) $f(x) = \sqrt{4x^3 + 1}$ | c) $f(x) = e^{4x^3 - 2x}$ | d) $f(x) = \ln(3x^4 - 2x)$ |
| e) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$ | f) $f(x) = 3x^4 - \frac{9x^2}{3}$ | g) $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1}$ | h) $f(x) = xe^x$ |
| i) $f(x) = 8x^5 - 2x^3 + \frac{1}{3}$ | j) $f(x) = (x^4 - 3x)e^x$ | k) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)$ | l) $f(x) = \frac{3x^4}{2} - \frac{6x^3}{5}$ |
| m) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x^3 + 1}$ | n) $f(x) = \ln(x^4 - 2x)$ | ñ) $f(x) = \frac{-2x^4 + 3x^2}{5}$ | o) $f(x) = \frac{3x - 4}{x^2 + 3x}$ |
| p) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 3}$ | q) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{5}x^7$ | r) $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x$ | s) $f(x) = \cos\left(\frac{3x}{x^2 + 2}\right)$ |
| t) $f(x) = 4x^5 - \frac{2x}{3}$ | u) $f(x) = (x^2 - 3x)e^x$ | v) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x-1}{x^2 + 1}\right)$ | |

$$w) f(x) = -x^7 + \frac{3}{4}x - 1$$

$$x) f(x) = \frac{4x^3 - 3}{x^2 - 1}$$

$$y) f(x) = e^{7x^4 - 3}$$

$$z) f(x) = 9x^2 - 3x^4 + \frac{1}{3}$$

$$1) f(x) = \frac{3x^3}{4 - x^2}$$

$$2) f(x) = \ln(2x^5 + 3x)$$

$$3) f(x) = \frac{-3x^5 + 2x}{7}$$

$$4) f(x) = x^4 \cos x$$

$$5) f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$$

$$6) f(x) = \frac{4x^6}{3} - 2x + 5$$

$$7) f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$8) f(x) = \sqrt{2x - 3x^4}$$

Solución:

$$a) f'(x) = 4(3x^2 + x)^3 \cdot (6x + 1)$$

$$b) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x^3 + 1}} \cdot 12x^2 = \frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3 + 1}} = \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3 + 1}}$$

$$c) f'(x) = e^{4x^3 - 2x} \cdot (12x^2 - 2)$$

$$d) f'(x) = \frac{1}{3x^4 - 2x} \cdot (12x^3 - 2) = \frac{12x^3 - 2}{3x^4 - 2x}$$

$$e) f'(x) = \cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) \cdot \frac{(2x-3) - (x+1)2}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3-2x-2}{(2x-3)^2} \cdot \cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) = \frac{-5}{(2x-3)^2} \cdot \cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$$

$$f) f'(x) = 12x^3 - \frac{18x}{3}$$

$$g) f'(x) = \frac{6x(x^2 - 1) - (3x^2 - 2) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{6x^3 - 6x - 6x^3 + 4x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$h) f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x) \quad i) f'(x) = 40x^4 - 6x^2$$

$$j) f'(x) = (4x^3 - 3)e^x + (x^4 - 3x)e^x = (4x^3 - 3 + x^4 - 3x)e^x = (x^4 + 4x^3 - 3x - 3)e^x$$

$$k) f'(x) = \cos\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) \cdot \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \cos\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) \cdot \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \cdot \cos\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)$$

$$l) f'(x) = \frac{12x^3}{2} - \frac{18x^2}{5} = 6x^3 - \frac{18x^2}{5}$$

$$m) f'(x) = \frac{2x(2x^3 + 1) - (x^2 - 3) \cdot 6x^2}{(2x^3 + 1)^2} = \frac{4x^4 + 2x - 6x^4 + 18x^2}{(2x^3 + 1)^2} = \frac{-2x^4 + 18x^2 + 2x}{(2x^3 + 1)^2}$$

$$n) f'(x) = \frac{1}{x^4 - 2x} \cdot (4x^3 - 2) = \frac{4x^3 - 2}{x^4 - 2x}$$

$$ñ) f'(x) = \frac{-8x^3 + 6x}{5}$$

$$o) f'(x) = \frac{3(x^2 + 3x) - (3x - 4)(2x + 3)}{(x^2 + 3x)^2} = \frac{3x^2 + 9x - 6x^2 - 9x + 8x + 12}{(x^2 + 3x)^2} = \frac{-3x^2 + 8x + 12}{(x^2 + 3x)^2}$$

$$p) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^3 - 3}} \cdot 6x^2 = \frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3 - 3}} = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 - 3}}$$

$$q) f'(x) = 2x^3 - \frac{21}{5}x^6$$

$$r) f'(x) = e^x \cdot \text{sen}x + e^x \cdot \text{cos}x = (\text{sen}x + \text{cos}x)e^x$$

$$\begin{aligned} \text{s) } f'(x) &= -\text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right) \cdot \frac{3(x^2+2) - 3x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = -\left(\frac{3x^2+6-6x^2}{(x^2+2)^2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right) = \\ &= -\frac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2} \cdot \text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right) = \frac{3x^2-6}{(x^2+2)^2} \cdot \text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{t) } f'(x) = 20x^4 - \frac{2}{3}$$

$$\text{u) } f'(x) = (2x-3)e^x + (x^2-3x)e^x = e^x(2x-3+x^2-3x) = e^x(x^2-x-3)$$

$$\begin{aligned} \text{v) } f'(x) &= \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) \cdot \frac{x^2+1-(x-1)2x}{(x^2+1)^2} = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) \cdot \frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) \cdot \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} \cdot \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) \end{aligned}$$

$$\text{w) } f'(x) = -7x^6 + \frac{3}{4}$$

$$\text{x) } f'(x) = \frac{12x^2(x^2-1) - (4x^3-3)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{12x^4-12x^2-8x^4+6x}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^4-12x^2+6x}{(x^2-1)^2}$$

$$\text{y) } f'(x) = e^{7x^4-3} \cdot (28x^3) = 28x^3 \cdot e^{7x^4-3}$$

$$\text{z) } f'(x) = 18x - 12x^3$$

$$1) f'(x) = \frac{9x^2(4-x^2) - 3x^3(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{36x^2-9x^4+6x^4}{(4-x^2)^2} = \frac{36x^2-3x^4}{(4-x^2)^2}$$

$$2) f'(x) = \frac{1}{2x^5+3x} \cdot (10x^4+3) = \frac{10x^4+3}{2x^5+3x}$$

$$3) f'(x) = \frac{-15x^4+2}{7}$$

$$4) f'(x) = 4x^3 \cos x + x^4(-\text{sen} x) = 4x^3 \cos x - x^4 \text{sen} x$$

$$5) f'(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}} \cdot \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = e^{\frac{x^2+1}{x-1}} \cdot \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} = e^{\frac{x^2+1}{x-1}} \cdot \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

$$6) f'(x) = \frac{24x^5}{3} - 2 = 8x^5 - 2$$

$$7) f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$8) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-3x^4}} \cdot (-12x^3) = \frac{-12x^3}{2\sqrt{2x-3x^4}} = \frac{-6x^3}{\sqrt{2x-3x^4}}$$

EJERCICIO 8 : Halla la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = (e^x + x^5)^3$

b) $f(x) = \frac{2x}{(x+2)^2}$

c) $f(x) = (x^2 + \sqrt{x}) \cdot \ln x$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

e) $y = e^{2x+1} \cdot \text{sen} x$

f) $y = \ln\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)$

g) $y = \frac{3x+1}{(x-1)^2}$

h) $y = \cos^2(x^4 - 2)$

i) $f(x) = (x^2 - 2) \cdot e^x$

j) $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{4x+2}}$

Solución:

a) $f'(x) = 3(e^x + x^5)^2 \cdot (e^x + 5x^4)$

b) $f'(x) = \frac{2(x+2)^2 - 2x \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{(x+2)[2(x+2)-4x]}{(x+2)^4} = \frac{2x+4-4x}{(x+2)^3} = \frac{-2x+4}{(x+2)^3}$

c) $f'(x) = \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot \ln x + \left(x^2 + \sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \ln x + x + \frac{\sqrt{x}}{x}$

d) $f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x+2}} \cdot \frac{x+2-(x-1)}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)}{(x-1)} \cdot \frac{(x+2-x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{3}{x^2+x-2}$

e) $y' = e^{2x+1} \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} x + e^{2x+1} \cdot \cos x = 2e^{2x+1} \cdot \operatorname{sen} x + e^{2x+1} \cdot \cos x = e^{2x+1} (2\operatorname{sen} x + \cos x)$

f) $y' = \frac{1}{\frac{x+3}{2x+1}} \cdot \frac{2x+1-(x+3) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{(2x+1)}{(x+3)} \cdot \frac{(2x+1-2x-6)}{(2x+1)^2} = \frac{-5}{(x+3)(2x+1)} = \frac{-5}{2x^2+7x+3}$

g) $y' = \frac{3(x-1)^2 - (3x+1) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[3(x-1)-2(3x+1)]}{(x-1)^4} = \frac{3x-3-6x-2}{(x-1)^3} = \frac{-3x-5}{(x-1)^3}$

h) $y' = 2\cos(x^4-2) \cdot [-\operatorname{sen}(x^4-2)] \cdot 4x^3 = -8x^3 \cos(x^4-2) \cdot \operatorname{sen}(x^4-2)$

i) $f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2-2) \cdot e^x = (2x+x^2-2)e^x = (x^2+2x-2)e^x$

j) $f(x) = \left(\frac{3x-1}{4x+2}\right)^{1/2}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{3x-1}{4x+2}\right)^{-1/2} \cdot \frac{3(4x+2) - (3x-1) \cdot 4}{(4x+2)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{4x+2}{3x-1}\right)^{1/2} \cdot \frac{12x+6-12x+4}{(4x+2)^2} =$
 $= \frac{1}{2} \frac{(4x+2)^{1/2}}{(3x-1)^{1/2}} \cdot \frac{10}{(4x+2)^2} = \frac{5}{(3x-1)^{1/2} \cdot (4x+2)^{3/2}} = \frac{5}{\sqrt{(3x-1)(4x+2)^3}}$

EJERCICIO 9 : Halla la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = \operatorname{tg}^2(2x^4-1)$

b) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{x+1}$

c) $5x^2 + 5y^2 = 4xy$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

e) $f(x) = x^{x+2}$

f) $3x^4 - 2y^3 + xy = 1$

g) $y = e^{2x+1} \cdot \operatorname{sen}(x-1)$

h) $y = (3x^2+1)^{2x}$

i) $x^2 - y^2 + xy = 5$

j) $y = \cos^2(x^4-2)$

k) $y = (\cos x)^{2x}$

l) $2x^2y^2 + 3x^2 + y^2 = 2$

m) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{4x^2}{3x-2}}$

n) $f(x) = (2x+1)^x$

ñ) $x^2 + 3xy + y^2 = 0$

Solución:

a) $f'(x) = 2\operatorname{tg}(2x^4-1) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2(2x^4-1)) \cdot 8x^3 = 16x^3 \operatorname{tg}(2x^4-1) + 16x^3 \operatorname{tg}^3(2x^4-1)$

b) $y = (\operatorname{sen} x)^{x+1} \rightarrow \ln y = \ln(\operatorname{sen} x)^{x+1} \rightarrow \ln y = (x+1) \cdot \ln(\operatorname{sen} x) \Rightarrow$

$\frac{y'}{y} = \ln(\operatorname{sen} x) + (x+1) \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow y' = (\operatorname{sen} x)^{x+1} [\ln(\operatorname{sen} x) + (x+1) \operatorname{cotg} x]$

c) $10x + 10y \cdot y' = 4y + 4x \cdot y' \Rightarrow 10y \cdot y' - 4x \cdot y' = 4y - 10x \Rightarrow y'(10y - 4x) = 4y - 10x$

$y' = \frac{4y - 10x}{10y - 4x} \rightarrow y' = \frac{2y - 5x}{5y - 2x}$

d) $f(x) = \ln(x-1) - \ln(x+2) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{3}{x^2+x-2}$

e) $y = x^{x+2} \rightarrow \ln y = \ln x^{x+2} \rightarrow \ln y = (x+2) \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + (x+2) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = x^{x+2} \cdot \left[\ln x + \frac{x+2}{x}\right]$

$$f) 12x^3 - 6y^2 \cdot y' + y + x \cdot y' = 0 \Rightarrow y'(x - 6y^2) = -12x^3 - y \Rightarrow y' = \frac{-12x^3 - y}{x - 6y^2}$$

$$g) y' = e^{2x+1} \cdot 2 \cdot \text{sen}(x-1) + e^{2x+1} \cdot \cos(x-1) = e^{2x+1} [2 \text{sen}(x-1) + \cos(x-1)]$$

$$h) y = (3x^2 + 1)^{2x} \rightarrow \ln y = \ln (3x^2 + 1)^{2x} \rightarrow \ln y = 2x \ln (3x^2 + 1) \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = 2 \ln x (3x^2 + 1) + 2x \cdot \frac{6x}{3x^2 + 1} \Rightarrow y' = (3x^2 + 1)^{2x} \cdot \left[2 \ln (3x^2 + 1) + \frac{12x^2}{3x^2 + 1} \right]$$

$$i) 2x - 2y \cdot y' + y + x \cdot y' = 0 \Rightarrow -2y \cdot y' + x \cdot y' = -2x - y \Rightarrow y'(x - 2y) = -2x - y$$

$$y' = \frac{-2x - y}{x - 2y}$$

$$j) y' = 2 \cos(x^4 - 2) \cdot (-\text{sen}(x^4 - 2)) \cdot 4x^3 = -8x^3 \cos(x^4 - 2) \cdot \text{sen}(x^4 - 2)$$

$$k) y = (\cos x)^{2x} \rightarrow \ln y = \ln (\cos x)^{2x} \rightarrow \ln y = 2x \ln (\cos x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2 \ln (\cos x) + 2x \cdot \left(\frac{-\text{sen } x}{\cos x} \right)$$

$$y' = (\cos x)^{2x} \cdot [2 \ln (\cos x) - 2x \text{tg } x]$$

$$l) 4xy^2 + 2x^2 \cdot 2y \cdot y' + 6x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow 4x^2 yy' + 2yy' = -6x - 4xy^2 \Rightarrow y'(4x^2 y + 2y) = -6x - 4xy^2$$

$$y' = \frac{-6x - 4xy^2}{4x^2 y + 2y}$$

$$m) f(x) = \left(\frac{4x^2}{3x-2} \right)^{1/3} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{4x^2}{3x-2} \right)^{-2/3} \cdot \frac{8x(3x-2) - 4x^2 \cdot 3}{(3x-2)^2} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\left(\frac{3x-2}{4x^2} \right)^2} \cdot \frac{24x^2 - 16x - 12x^2}{(3x-2)^2} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\left(\frac{3x-2}{4x^2} \right)^2} \cdot \frac{12x^2 - 16x}{(3x-2)^2}$$

$$n) y = (2x + 1)^x \rightarrow \ln y = \ln (2x + 1)^x \rightarrow \ln y = x \ln (2x + 1) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln (2x + 1) + x \cdot \frac{2}{2x + 1}$$

$$y' = (2x + 1)^x \cdot \left[\ln (2x + 1) + \frac{2x}{2x + 1} \right]$$

$$ñ) 2x + 3y + 3x \cdot y' + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow 3x \cdot y' + 2y \cdot y' = -2x - 3y \Rightarrow y'(3x + 2y) = -2x - 3y \Rightarrow y' = \frac{-2x - 3y}{3x + 2y}$$

ESTUDIO DE LA DERIVABILIDAD

EJERCICIO 10 : Estudia la derivabilidad de esta función, según los valores de a y b :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ bx + \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

• Continuidad:

- En $x \neq 0$ y $x \neq 1$: $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 + 1) = 1$$

- En $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + ax^2) = 0$

$$f(0) = 0$$

} $f(x)$ no es continua en $x = 0$.

$$- \text{ En } x = 1: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + ax) = 1 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (bx + \ln x) = b \\ f(1) = b \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser $b = 1 + a$.

• Derivabilidad:

$$- \text{ Si } x \neq 0 \text{ y } x \neq 1: f(x) \text{ es derivable, y su derivada es: } f'(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 2ax & \text{si } 0 < x < 1 \\ b + \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- En $x = 0$: $f(x)$ no es derivable, pues no es continua en $x = 0$.

- En $x = 1$: Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$, han de ser iguales las derivadas laterales:

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 3 + 2a \\ f'(1^+) &= b + 1 \end{aligned} \right\} 3 + 2a = b + 1$$

- Por tanto, $f(x)$ será derivable en $\mathbf{R} - \{0\}$ cuando y solo cuando: $\left. \begin{aligned} b &= 1 + a \\ 3 + 2a &= b + 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &= -1 \\ b &= 0 \end{aligned}$

- En $x = 0$ no es derivable, cualesquiera que sean a y b .

EJERCICIO 11 : Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo \mathbf{R} :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{a}{x} & \text{si } x < -1 \\ -bx^2 + 2x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Solución:

• Continuidad:

- En $x \neq -1$: $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

$$- \text{ En } x = -1: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(x^2 + \frac{a}{x} \right) = 1 - a \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-bx^2 + 2x) = -b - 2 \\ f(-1) = -b - 2 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$, ha de ser $1 - a = -b - 2$.

• Derivabilidad:

$$- \text{ Si } x \neq -1: f(x) \text{ es derivable, y su derivada es: } f'(x) = \begin{cases} 2x - \frac{a}{x^2} & \text{si } x < -1 \\ -2bx + 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

- En $x = -1$: Como $f'(-1^-) = -2 - a$ y $f'(-1^+) = 2b + 2$, para que $f(x)$ sea derivable en $x = -1$, ha de ser $-2 - a = 2b + 2$.

• Uniendo las dos condiciones anteriores, $f(x)$ será derivable en todo \mathbf{R} cuando:

$$\left. \begin{aligned} 1 - a &= -b - 2 \\ -2 - a &= 2b + 2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a - b &= 3 \\ a + 2b &= -4 \end{aligned} \left. \right\} \begin{aligned} a &= \frac{2}{3} \\ b &= \frac{-7}{3} \end{aligned}$$

EJERCICIO 12 : Estudia la derivabilidad de la función: $f(x) = \begin{cases} -x^4 + 3x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x^2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x^2 + 4x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Solución:

• Continuidad:

- En $x \neq 1$ y $x \neq 2$: $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^4 + 3x^2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 4x - 4) = 8 \\ f(2) = 8 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

• Derivabilidad:

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 0$: $f(x)$ es derivable, y su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} -4x^3 + 6x & \text{si } x < 1 \\ 4x & \text{si } 1 < x < 2 \\ 2x + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- En $x = 1$: Como $f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 4$, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

- En $x = 2$: Como $f'(2^-) = 8 = f'(2^+)$, $f(x)$ es derivable en $x = 2$, y su derivada es $f'(2) = 8$.

EJERCICIO 13 : Halla los valores de a y b para que la siguiente función sea derivable:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - ax + b & \text{si } x < 1 \\ ax^3 - bx + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

• Continuidad:

- Si $x \neq 1$: $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - ax + b) = 3 - a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^3 - bx + 2) = a - b + 2 \\ f(1) = a - b + 2 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser $3 - a + b = a - b + 2$; es decir, $2a - 2b = 1$.

• Derivabilidad:

- Si $x \neq 1$: $f(x)$ es derivable, y su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 6x - a & \text{si } x < 1 \\ 3ax^2 - b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- En $x = 1$: Para que sea derivable en $x = 1$, las derivadas laterales han de ser iguales: $\left. \begin{matrix} f'(-) = 6 - a \\ f'(+) = 3a - b \end{matrix} \right\} 6 - a = 3a - b$

• Uniendo las dos condiciones anteriores, $f(x)$ será derivable si: $\left. \begin{matrix} 2a - 2b = 1 \\ 6 - a = 3a - b \end{matrix} \right\} a = \frac{11}{6}; b = \frac{4}{3}$

EJERCICIO 14 : Estudia la derivabilidad de la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 4 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 2^x - x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Solución:

• Continuidad:

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 0 \rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x^2 - 2x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 4) = 5 \\ f(-1) = 5 \end{cases} \left. \right\} f(x) \text{ es continua en } x = -1$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 4) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2^x - x + 3) = 4 \\ f(0) = 4 \end{cases} \left. \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0$$

• Derivabilidad:

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 0 \rightarrow f(x)$ es derivable, y su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 6x - 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } -1 < x < 0 \\ 2^x \ln 2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- En $x = -1$: Como $f'(-1^-) = -8 \neq f'(-1^+) = -2$; $f(x)$ no es derivable en $x = -1$.

- En $x = 0$: Como $f'(0^-) = 0 \neq f'(0^+) = (\ln 2) - 1$; $f(x)$ tampoco es derivable en $x = 0$.