

TEMA 9 – DERIVADAS. TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

Derivadas aplicando la definición

EJERCICIO 1 Calcular, aplicando la definición, las derivadas de las funciones que se citan a continuación en los puntos indicados:

a) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ en $x = -1$

b) $f(x) = \frac{x}{2-x}$ en $x = 1$

c) $f(x) = x^2 + x$ en $x = 0$

d) $f(x) = x^2 - 3x$ en $x = 1$

e) $f(x) = x^3 - x^2 + x$ en $x = 0$

f) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$ en $x = 3$

g) $f(x) = 2x^2 - x + 2$ en $x = 1$

EJERCICIO 2 :

a) Calcular la derivada de la función $f(x) = x^3 - 3$ en el punto $x = -1$

b) Ecuación de la recta tangente a esa función en el punto $x = -1$

EJERCICIO 3 :

a) Calcular la derivada de la función $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ aplicando la definición de derivada.

b) ¿ Cuándo vale $f'(1)$?

EJERCICIO 4 : Sea $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

a) Obtener su derivada en $x = 2$ utilizando la definición de derivada de una función en un punto.

b) Calcular su derivada directamente (sin utilizar la definición) y comprueba que se obtiene el mismo resultado que en el apartado a).

EJERCICIO 5 :

a) Calcular la derivada de la función $f(x) = x^2 + 3x$ aplicando la definición de derivada.

b) ¿ Cuándo vale $f'(1)$?

EJERCICIO 6 Calcular la función derivada, aplicando la definición, de :

a) $f(x) = x^2 - 2$ b) $f(x) = x^3 - 3x$ c) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ d) $f(x) = 9 - x^2$ e) $f(x) = \frac{2x}{x-2}$

Cálculo de derivadas

EJERCICIO 7 Calcular las siguientes derivadas:

1) $y = 5$

2) $y = x$

3) $y = 3x$

4) $y = x^5$

5) $y = 3 \cdot x^6$

6) $y = \frac{3}{5} \cdot x^{10}$

7) $y = \frac{3x^2}{4}$

8) $y = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 7$

9) $y = \frac{1}{x^4}$

10) $y = 5 \cdot \left(\frac{1}{x^3} + x^{-2} \right)$

11) $y = 6x^3 + 5x^2 - 1$

12) $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - 8x$

13) $y = \frac{1}{x^2} + x^{-3} + 2 \cdot x^{-1}$

14) $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)$

15) $y = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^3}$

16) $y = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{x}$

17) $y = (x^2 - 1) \cdot (x^3 + 3x)$

18) $y = (x^2 - 1) \cdot (x^3 + 3x)$

19) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 4}$

20) $y = \frac{1}{x}$

21) $y = \frac{x^2 - x + 3}{5}$

22) $y = x^2 - \frac{1}{x^3} + \frac{3x}{1+x} + \frac{4-x}{x}$

23) $y = (x^3 + 1) \cdot (x + 2)$

24) $y = (x^3 + 2) \cdot x^{-2}$

25) $y = \frac{2}{x^3 + 2}$

26) $y = \frac{x^3 - 3}{\frac{5}{2}}$

27) $y = \frac{1}{3x^2 + 1}$

28) $y = \frac{1}{1 - 3x^3}$

29) $y = \frac{x^2 - 2}{x^3 + 3x^2}$

30) $y = \frac{x^3}{x - 3}$

31) $y = (3x^3 - 2x + 7)^7$

32) $y = 3 \cdot (x^2 - x + 1)^3$

33) $y = (2x^4 - 4x^2 - 3)^5$

34) $y = (2x^3 + x)^4$

35) $y = 5 \cdot (x^3 - 3x)^4$

36) $y = \frac{(x^4 - 5x)^2}{(x^3 - 3x)^5}$

37) $y = \frac{(x^3 - 2x)^3 \cdot (2x^4 - x^2)^2}{(x^3 - 2x)^3}$

38) $y = \frac{(2x^4 - x^2)^2}{(2x^4 - x^2)^2}$

39) $y = \sqrt[3]{x}$

40) $y = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$

41) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

42) $y = \sqrt{\frac{x+2}{3}}$

43) $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

44) $y = \sqrt[5]{x^3 - 7x}$

45) $y = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$

46) $y = 5x^3 + \sqrt[3]{x} + 1$

47) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

48) $y = (x - \sqrt{1-x^2})^2$

49) $y = \frac{x^3}{\sqrt{x}}$

50) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

51) $y = 5 \cdot (x^3 - 2x^2 + x)^4$

52) $y = \frac{4-6x}{(2x^4-3)^6}$

53) $y = e^{\sqrt{x}}$

54) $y = \frac{1}{e^{2x}}$

55) $y = x^2 \cdot e^{3x}$

56) $y = \frac{x}{e^x}$

57) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

58) $y = \frac{x^2 - x}{e^x}$

59) $y = \log_3 x$

60) $y = \log_2 x^3$

61) $y = \log x$

62) $y = \text{Ln}(x^2 - 1)$

63) $y = \log_2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1}$

64) $y = \text{Ln} \frac{e^{3x}}{\sqrt{x}}$

65) $y = \log \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$

66) $y = \frac{\text{Lnx}}{x^5}$

67) $y = \text{Ln}[x^3 \cdot (x+2)]$

68) $y = \text{Ln} \sqrt[3]{1+x^2}$

69) $y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

70) $y = \text{Ln} \frac{x^2 + 3}{2x - 1}$

71) $y = (\log x + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

72) $y = \text{tag } 2x$

73) $y = \text{sen } 2x$

74) $y = \text{sen } x^2$

75) $y = \text{sen}^2 x$

76) $y = \text{sen}^2 2x$

77) $y = \text{sen}^2 x^2$

78) $y = \text{sen}^5 2x^3$

79) $y = 5 \cdot \text{sen}^3 2x^4$

80) $y = e^{\cos x}$

81) $y = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$

82) $y = \sqrt{\frac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x}}$

83) $y = \text{tag}(x+3)^2$

84) $y = \text{tag}^2(x+3)$

85) $y = \text{Ln} \left(\cos \frac{x^2}{2} \right)$

86) $y = \text{tag}(1-2x)$

87) $y = \text{tag} \left(x + \frac{1}{x} \right)$

88) $y = \frac{\cos \text{ecx}}{\sec x}$

89) $y = \text{sen} \sqrt{x}$

90) $y = \text{sen}(x + e^x)$

91) $y = \text{Ln} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$

92) $y = (\log x + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

93) $y = \cos x \cdot (1 - \cos x)$

94) $y = \frac{\text{sen } x + \cos x}{\text{sen } x - \cos x}$

95) $y = \text{Ln}(x^2 \cdot \text{sen} 2x)$

96) $y = \frac{x \cdot \text{sen}^2 x}{e^x - 1}$

97) $y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

98) $y = \frac{-\cos 2x}{2}$

99) $y = \text{Ln}(\text{tag } 2x)$

100) $y = \text{Ln}(\text{sen } x)$

101) $y = \text{sen}^3(x+1)$

102) $y = \sec^2 x$

103) $y = \sqrt{x} \text{sen} \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}$

104) $y = \text{sen}[\cos(\text{tag } x)]$

105) $y = \text{Ln} \sqrt{\frac{\cos x}{\text{sen } x}}$

106) $y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$

107) $y = \text{Ln}(\text{tag}^2 \sqrt{x})$

108) $y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

109) $y = \text{Ln} \frac{(x-1)^2}{2x-3}$

110) $y = \text{Ln}(\text{sen}^2 x)$

111) $y = e^{\cos 2x}$

112) $y = \text{Ln}(\text{sen}^2 x \cdot \cos^3 x)$

113) $y = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$

114) $y = \text{sen}(x+1)^3$

115) $y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1 + \text{tg}(x/2)}{1 - \text{tg}(x/2)}}$

116) $y = \arcsen \frac{x^2 - 1}{x^2}$

117) $y = x^{\cos(x)}$

118) $y = \frac{1 + \text{tg } x}{1 - \text{tg } x}$

119) $y = \arctg \frac{e^x + 1}{x}$

120) $y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1 + \text{sen } 2x}{1 - \text{sen } 2x}}$

121) $y = (\arcsen x)^{\text{tg} x}$

122) $y = \text{Ln} [(x+1)/(x-1)]^2$

123) $y = [\text{tg}(2x)]^{\text{sen } x}$

124) $y = (\arcsen 2x)^{\text{tg} x}$

125) $y = \text{Ln} \left[\sqrt{\frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}} \right]$

126) $y = \arctag \frac{2x}{1-x^2}$

127) $y = \text{Ln} \left(\frac{2x-1}{3x-1} \right)^3$

128) $y = \sqrt{\frac{\text{Lnx}}{\text{sen } x}}$

Continuidad y derivabilidad

EJERCICIO 8 :

a) Estudiar la continuidad de la siguiente función, indicando los tipos de discontinuidad que presenta en los puntos donde no sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 2 & \text{si } 3 < x < 5 \\ x-3 & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$$

b) Estudiar su derivabilidad

c) Representarla gráficamente.

EJERCICIO 9 :

a) Determinar los valores de a y b y el valor de f(0) para que la función f(x), que se define a continuación, pueda ser continua:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{ax^2} & \text{si } x < 0 \\ be^x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{x^2 - x}{x-1} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

b) ¿ Es derivable en $x = 1$?

EJERCICIO 10 :

a) Estudiar la continuidad de la siguiente función, indicando los tipos de discontinuidad que presenta en los puntos donde no sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2} & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ \frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{9x^2} & \text{si } 0 < x < \pi/6 \\ 1 - \operatorname{sen} x & \text{si } \pi/6 \leq x < \pi/2 \\ x - \frac{\pi}{2} & \text{si } \pi/2 \leq x < 3 \\ \frac{2}{e^x - 1} & \text{si } \pi/2 \leq x < 3 \end{cases}$$

b) Estudiar su derivabilidad

EJERCICIO 11 : Hallar “a” y “b” de modo que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot (x-1)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(b+x) & \text{si } 0 < x < \pi \\ \frac{\pi}{x} & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

EJERCICIO 12 : Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x+2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ -x^2 + 7x - 7 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$

y calcular una expresión de su derivada en los puntos donde sea derivable.