EJERCICIOS RESULTOS DE SISTEMAS DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

Sistemas 2x3

1. $\begin{cases} 3x - y + az = 1 \\ x + y - z = a \end{cases}$
2. $\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ -4x - ay + 2z = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} ax + y + z = 3 \\ 2x + 3y + az = 6a \end{cases}$
4. $\begin{cases} x - ay + z = 1 \\ ax - 4y + 2z = a \end{cases}$
5. $\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -ax + ay - 9z = 0 \end{cases}$

Sistemas 3x2

6. $\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x - y = 3 \\ ax - 2y = 2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} -ax - 2y = 1 \\ -x + 2y = 2 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x - 2y = a \\ -ax + 4y = -4 \\ x - ay = 2 \end{cases}$
9. $\begin{cases} ax - y = a \\ -4x + ay = 1 \\ -ax + y = 3 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x + ay = 0 \\ -ax - 4y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases}$

Sistemas 3x3

11. $\begin{cases} ax + y - 2z = 1 \\ -2x - 2y + 4az = -2a \\ -x - ay + 2z = -a \end{cases}$
12. $\begin{cases} x - y + az = -2 \\ 2x + ay + z = -4 \\ -x + y - z = 2 \end{cases}$
13. $\begin{cases} (2a + 2)x + 3y + az = a + 4 \\ (4a - 1)x + (a + 1)y + (2a - 1)z = 2a + 2 \\ (5a - 4)x + (a + 1)y + (3a - 4)z = a - 1 \end{cases}$

Sistemas 3x4

14. $\begin{cases} 2x + ay - 3z + t = a \\ ax + 2y + z - t = 2 \\ x - ay - 4z + 2at = -1 \end{cases}$
15. $\begin{cases} ax + 3y - z - t = a \\ x - y + az + t = 1 \\ x + 4y - 3z - at = 1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+y+z-t=a \\ 2x-2y+z-at=0 \\ ax-y+z-t=2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+y+z+at=0 \\ x-ay+z-t=0 \\ -ax+3y+2z-3t=0 \end{cases}$

Sistemas 4x3

18. $\begin{cases} x+y-3z=1 \\ ax-y+z=-1 \\ x-ay+4z=-2 \\ ax+5y-13z=5 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x+y=1 \\ ax-y+z=2 \\ -ax+2y\ -3z=0 \\ ax-z=0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x+z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ 3x+ay+3z=0 \\ ay-z=0 \end{cases}$

Soluciones

Sistemas 2x3.

1. $\begin{cases} 3x-y+az=1 \\ x+y-z=a \end{cases}$

   Solución: Consideremos la matriz de los coeficientes A= $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & a \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & -1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$: rgA=rgA*< número de incógnitas: SCI, con 1 grado de libertad. Convierto en parámetro la incógnita que queda fuera del menor (z=λ), quedando el sistema: $\begin{cases} 3x-y=1-a\lambda \\ x+y=a+\lambda \end{cases}$, que se puede resolver por Cramer o por cualquiera de los métodos tradicionales. Solución: $\{\left(\frac{1+a+(1-a)\lambda}{4}, \frac{3a-1+(3+a)\lambda}{4}, \lambda\right) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

2. $\begin{cases} ax+y-z=1 \\ -4x-ay+2z=3 \end{cases}$

   Solución: Consideremos la matriz de los coeficientes A= $\begin{pmatrix} a & 1 & \mathbf{-1} \\ -4 & -a & 2 \end{pmatrix}$. Para estudiar el rgA, orlo desde el menor de orden 1 resaltado:

   Con 2ªfila y 2ª columna: $\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{-1} \\ -a & 2 \end{vmatrix} = 2-a.$

   Con 2ª fila y 1ª columna: $\begin{vmatrix} a & \mathbf{-1} \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2a-4.$

   Ambos menores se anulan en $a=2$. En consecuencia,:

   - si $a \neq 2$, rgA=2=rgA*< 3=nª de incógnitas: SCI, con 1º de libertad. Se procede haciendo x= λ, y resolviendo el sistema $\begin{cases} y-z=1-a\lambda \\ -ay+2z=3+4\lambda \end{cases}$. Por Cramer, da la solución $\{\left(\lambda, \frac{\begin{vmatrix} 1-a\lambda & -1 \\ 3+4\lambda & 2 \end{vmatrix}}{2-a}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-a\lambda \\ -a & 3+4\lambda \end{vmatrix}}{2-a}\right) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

- Queda por ver el caso en que a=2, del que sabemos que rgA=1, Tenemos que estudiar el rgA*. A*=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \mathbf{-1} & 1 \\ -4 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y, para averiguarlo, sólo tengo que orlar con la 2ª fila y la 4ª columna: $\begin{vmatrix} \mathbf{-1} & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$≠0. Luego rgA<rgA*=2: Sistema incompatible.

3. $\begin{cases} ax+y+z=3 \\ 2x+3y+az=6a \end{cases}$

Solución: Consideremos la matriz de los coeficientes A= $\begin{pmatrix} a & \mathbf{1} & 1 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$. Para estudiar el rgA, orlo desde el menor de orden 1 resaltado:

Con 2ªfila y 1ª columna: $\begin{vmatrix} a & \mathbf{1} \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a-2$.

Con 2ª fila y 3ª columna: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a-3$.

El primer menor se anula en a=$\frac{2}{3}$, y el segundo en a=3.

Es decir no hay ningún valor de a que anule simultáneamente ambos menores y, en todos los casos de a, se tiene rgA=2=rgA*< 3=nª de incógnitas: SCI, con 1º de libertad.

Resolvamos el sistema: Si a≠3, hago x= λ, quedando el sistema $\begin{cases} y+z=3-a\lambda \\ 3y+az=6a-2\lambda \end{cases}$.

Por Cramer, da la solución: $\{\left(\lambda, \frac{\begin{vmatrix} 3-a\lambda & 1 \\ 6a-2\lambda & a \end{vmatrix}}{a-3}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-a\lambda \\ 3 & 6a-2\lambda \end{vmatrix}}{a-3}\right) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Si a=3, hago z= λ, quedando el sistema $\begin{cases} 3x+y=3-\lambda \\ 2x+3z=18-3\lambda \end{cases}$ con solución

$\{\left(\frac{\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 18a-3\lambda & 3 \end{vmatrix}}{7}. \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3-\lambda \\ 2 & 18a-3\lambda \end{vmatrix}}{7}, \lambda\right) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

4. $\begin{cases} x-ay+z=1 \\ ax-4y+2z=a \end{cases}$

Solución: Consideremos la matriz de los coeficientes A= $\begin{pmatrix} 1 & -a & \mathbf{1} \\ a & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Para estudiar el rgA, orlo desde el menor de orden 1 resaltado:

Con 2ªfila y 2ª columna: $\begin{vmatrix} -a & \mathbf{1} \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -2a+4$

Con 2ª fila y 1ª columna: $\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1} \\ a & 2 \end{vmatrix} = 2-a$

Ambos menores se anulan en a=2.

En consecuencia:

- si $a \neq 2$, rgA=2=rgA*< 3=nª de incógnitas: SCI, con 1º de libertad. Se procede haciendo y= λ , y resolviendo el sistema $\begin{cases} x+z=1+a\lambda \\ ax+2z=a+4\lambda \end{cases}$. Por Cramer, obtenemos la solución: $\{\left(\frac{\begin{vmatrix} 1+a\lambda & 1 \\ a+4\lambda & 2 \end{vmatrix}}{2-a}, \lambda, \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+a\lambda \\ a & a+4\lambda \end{vmatrix}}{2-a},\right) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Queda por ver el caso en que a=2, del que sabemos que rgA=1, Tenemos que estudiar el rgA*. A*=$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \mathbf{1} & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y, para averiguarlo, sólo tengo que

orlar con la 2ª fila y la 4ª columna: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$=0. Luego rgA=rgA*=1< 3=nª de incógnitas: SCI, con 2 grados de libertad. Elimino la fila 2, y hago x= λ, y=μ, quedando la solución {(λ, μ, $1-\lambda+2\mu$): $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$}.

5. $\begin{cases} x-y+3z=0 \\ -ax+ay-9z=0 \end{cases}$

Por ser homogéneo, tendremos que rg A = rg A*, y siempre será compatible.

Estudiemos el rango de A =$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 \\ -a & a & -9 \end{pmatrix}$

Orlo con 2ªfila y 2ª columna: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -1 \\ -a & a \end{vmatrix}=0.$

Orlo con 2ª fila y 3ª columna: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 3 \\ -a & -9 \end{vmatrix}=-9+3a.$

- Si a ≠3, rgA=2=rgA*< 3=nª de incógnitas: SCI, con 1º de libertad. Estamos obligados a hacer y= λ , quedando el sistema $\begin{cases} x+3z=\lambda \\ -ax-9z=-a\lambda \end{cases}$. Por Cramer, da la solución: {$\left(\frac{\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ -a\lambda & -9 \end{vmatrix}}{-9+3a}, \lambda, \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -a & -a\lambda \end{vmatrix}}{-9+3a},\right)$: $\lambda \in \mathbb{R}$}.
- Si a=3, rg A = rg A* = 1: SCI, con dos grados de libertad, que se reduce a la 1ª ecuación. Hago y=λ , z= μ siendo la solución {($\lambda-3\mu$, λ, μ): $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$}.

Sistemas 3x2

6. $\begin{cases} ax+y=1 \\ 2x-y=3 \\ ax-2y=2 \end{cases}$

Para estudiar el rg de A*, calculamos su determinante: $|A^*| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ a & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8a - 8 = 0$, si a=1.

- En el caso de que a a≠1, rgA*=3>rgA: Sistema incompatible.
- Si a=1, A=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, el menor resaltado vale $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ =-1+2≠0. Luego rgA=2=rgA*=nº de incógnitas: SCD. Elimino la ecuación que queda fuera del menor, resultando el sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ de solución (4/3,-1/3)

7. $\begin{cases} -ax-2y=1 \\ -x+2y=2 \\ 3x-6y=3 \end{cases}$

Para estudiar el rg de A*, calculamos su determinante: $|A^*| = \begin{vmatrix} -a & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -18a - 18 = 0, si\ a=-1$. Se tiene que:

- Si a≠-1, rgA*=3>rgA: Sistema incompatible.

- Si a=-1, A=$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ que tiene rango 1, por ser todas sus dos columnas proporcionales. Falta estudiar el rango de A* porque puede valer 1 o 2:
  A*=$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ -1 & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ El menor resaltado es no nulo, luego rgA=1<2=rgA*: SI.

En definitiva, el sistema es siempre incompatible (Nótese que a esta conclusión podíamos haber llegado con la sola observación de la incompatibilidad de la 2ª y 3ª ecuaciones)

8. $\begin{cases} x-2y=a \\ -ax+4y=-4 \\ x-ay=2 \end{cases}$

Para estudiar el rg de A*, calculamos su determinante: $|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ -a & 4 & -4 \\ 1 & -a & 2 \end{vmatrix} = a^3 - 12a + 16 = (a-2)^2(a+4) = 0$, si a =-4, 2.

- Si a≠-4, 2, rgA*=3>rgA: Sistema incompatible.

Veamos los dos casos particulares:

- Si a=-4, A=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ el menor resaltado vale $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$=12≠0. Luego rgA=2=rgA*=nº de incógnitas: SCD. Elimino la ecuación que queda fuera del menor, resultando el sistema $\begin{cases} x-2y=-4 \\ 4x+4y=-4 \end{cases}$ de solución (-2,1)
- Si a=2. A=$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ que tiene rango 1 (las dos columnas son proporcionales). Ahora hay que ver el rango de A*=$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
  También se observa que tiene rango 1, por ser proporcionales las filas, luego rgA=rgA*=1<2=nª de incógnitas: SCI, con 1º de libertad. Elimino la 2ª y 3ª ecuaciones, hago y=λ, quedando la 1ª ecuación, que tiene por solución $\{(2+2\lambda,\ \lambda): \lambda \in \mathbb{R}\}$.

9. $\begin{cases} ax-y=a \\ -4x+ay=1 \\ -ax+y=3 \end{cases}$

Para estudiar el rg de A*, calculamos su determinante: $|A^*| = \begin{vmatrix} a & -1 & a \\ -4 & a & 1 \\ -a & 1 & 3 \end{vmatrix} = a^3 + 3a^2 - 4a - 12 = (a+3)(a+2)(a-2) = 0$, si a=-3, -2 y 2.

- En el caso de que a a≠-3,- 2 y 2, rgA*=3>rgA: Sistema incompatible.

Estudiemos ahora los tres casos particulares:

- Si a=-3: A= $\begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, el menor resaltado vale $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$=9-4≠0. Luego rgA=2=rgA*=nº de incógnitas: SCD. Elimino la ecuación que queda fuera del menor, quedando el sistema $\begin{cases} -3x-y=-3 \\ -4x-3y=1 \end{cases}$. De solución (2,-3).

- Si a=-2: A=$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$que tiene rango 1, por ser todas sus columnas proporcionales. Falta estudiar el rango de A*=$\begin{pmatrix} -2 & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \\ -4 & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ El menor resaltado es no nulo, luego rgA=1<2=rgA*: SI.
- Si a=2: A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$que tiene rango 1. A*=$\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ -4 & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ El menor resaltado es no nulo, luego rgA=1<2=rgA*: también queda SI.

10. $\begin{cases} x + ay = 0 \\ -ax - 4y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases}$

Al ser un sistema homogéneo, sólo hay que estudiar el rg A.

A=$\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & -4 \\ 3 & \mathbf{6} \end{pmatrix}$ Orlo el menor resaltado:

Con F_2 y C_1: $\begin{vmatrix} -a & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -6a + 12$, que se anula en a=2.

Con F_1 y C_1 : $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3a$, que se anula en a=2.

- Si a≠2, entonces rg A=2=rgA*=nº de incógnitas: SCD cuya única solución será, necesariamente, la solución nula (0, 0)
- Si a=2, entonces rgA=rgA*=1<2=nº de incógnitas: SCI, con 1º de libertad. Elimino F_1 y F_2, hago x= λ, quedando la solución $\{(\lambda, -\lambda/2\ ) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Sistemas 3x3

11. $\begin{cases} ax + y - 2z = 1 \\ -2x - 2y + 4az = -2a \\ -x - ay + 2z = -a \end{cases}$

Como A es una matriz cuadrada , lo mejor es comenzar estudiando su rango. Calculemos su determinante :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4a \\ -1 & -a & 2 \end{vmatrix} = 4a^3 - 12a + 8 = 4(a-1)^2(a+2)$$

- Si a≠-2,1, entonces rgA=rgA*=3=nº de incógnitas: SCD, cuya solución es $\left(\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2a & -2 & 4a \\ -a & -a & 2 \end{vmatrix}}{4(a-1)^2(a+2)}, \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ -2 & -2a & 4a \\ -1 & -a & 2 \end{vmatrix}}{4(a-1)^2(a+2)}, \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2a \\ -1 & -a & -a \end{vmatrix}}{4(a-1)^2(a+2)} \right)$= desarrollando los determinantes $\left(\frac{-4a^2+8a-4}{4(a-1)^2(a+2)}, \frac{4a^3-4a^2-4a+4}{4(a-1)^2(a+2)}, \frac{4-2+2a^2+2a-2}{4(a-1)^2(a+2)} \right)$= $\left(\frac{-4(a-1)^2}{4(a-1)^2(a+2)}, \frac{4(a+1)(a-1)^2}{4(a-1)^2(a+2)}, \frac{-2(a+1)(a-1)^2}{4(a-1)^2(a+2)} \right)$=$\left(\frac{-1}{a+2}, \frac{a+1}{a+2}, \frac{-a-1}{2\,a+4} \right)$
- Si a=-2, A*=$\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} & -2 & 1 \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-2} & -8 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ Para estudiar el rango de A* sólo queda orlar con F_3 y C_4 (puesto que si orlo con F_3 y C_3 obtendría el valor del determinante

de A, que ya sabemos que es nulo). Orlemos pues: $\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ -2 & -2 & 4\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}$=18≠0. Luego rgA<rgA*: SI.

Si a =1 , A*=$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ -2 & -2 & 4 & -2\\ -1 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ Las tres filas son proporcionales, luego rgA=rgA*=1:<3=nº de incógnitas: SCI con 2 grados de libertad. Para resolverlo, elimino la 2ª y la 3ª ecuación, y hago y=λ, z=μ, quedando la solución $\{(1-\lambda+2\mu,\lambda,\mu):\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.

12. $\begin{cases}x-y+az=-2\\ 2x+ay+z=-4\\ -x+y-z=2\end{cases}$

$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=a^2+a-2=(a+2)(a-1)$

- Si a≠-2,1, entonces rgA=rgA*=3=nº de incógnitas: SCD, cuya solución es $\left(\frac{\begin{vmatrix}-2 & -1 & a\\ -4 & a & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}}{(a+2)(a-1)},\frac{\begin{vmatrix}1 & -2 & a\\ 2 & -4 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}}{(a+2)(a-1)},\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & a & -4\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}}{(a+2)(a-1)}\right)$= desarrollando los determinantes $\left(\frac{-2a^2-2a+4}{(a+2)(a-1)},\frac{0}{(a+2)(a-1)},\frac{0}{(a+2)(a-1)}\right)$=$\left(\frac{-2(a+2)(a-1)}{(a+2)(a-1)},0,0\right)$=$(2,0,0)$ que, inusualmente, es independiente del valor de a.
- Si a=-2, tenemos A*=$\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & -2 & -2\\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & 1 & -4\\ -1 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ El menor no nulo resaltado garantiza que rg A =2. Para estudiar el rango de A* sólo queda orlar con F_3 y C_4: $\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -4\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$. Luego rgA<rgA*: SI.
- Si a=1, será A*=$\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & 1 & -2\\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & 1 & -4\\ -1 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ Como la 3ª fila es igual que la primera cambiada de signo, concluimos que rgA=rgA*=2. Elimino la 3ª ecuación, hago z=λ, quedando el sistema $\begin{cases}x-y=-2-\lambda\\ 2x+y=-4-\lambda\end{cases}$ cuya solución es $\{\left(\frac{-6-2\lambda}{3},\frac{\lambda}{3},\lambda,\right):\lambda\in\mathbb{R}\}$.

13. $\begin{cases}(2a+2)x+3y+az=a+4\\ (4a-1)x+(a+1)y+(2a-1)z=2a+2\\ (5a-4)x+(a+1)y+(3a-4)z=a-1\end{cases}$

$|A|=\begin{vmatrix}2a+2 & 3 & a\\ 4a-1 & a+1 & 2a-1\\ 5a-4 & a+1 & 3a-4\end{vmatrix}$ = ($F'_3=F_3-F_2$) $\begin{vmatrix}2a+2 & 3 & a\\ 4a-1 & a+1 & 2a-1\\ a-3 & 0 & a-3\end{vmatrix}$(saco factor común de la 3ª fila) $(a-3)\begin{vmatrix}2a+2 & 3 & a\\ 4a-1 & a+1 & 2a-1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$= ($C'_1=C_1-C_3$) = $(a-3)\begin{vmatrix}a+2 & 3 & a\\ 2a & a+1 & 2a-1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$= (desarrollo por los adjuntos de la 3ª fila) $(a-$

3) $\begin{vmatrix} a+2 & 3 \\ 2a & a+1 \end{vmatrix} = (a-3)(a^2+3a+2-6a) = (a-3)(a^2-3a+2) = (a-3)(a-2)(a-1)$

- Si a≠3, 2 y 1: rgA=rgA*=3=nº de incógnitas: SCD, con solución $\left(\frac{\begin{vmatrix} a+4 & 3 & a \\ 2a+2 & a+1 & 2a-1 \\ a-1 & a+1 & 3a-4 \end{vmatrix}}{(a-3)(a-2)(a-1)}, \frac{\begin{vmatrix} 2a+2 & a+4 & a \\ 4a-1 & 2a+2 & 2a-1 \\ 5a-4 & a-1 & 3a-4 \end{vmatrix}}{(a-3)(a-2)(a-1)}, \frac{\begin{vmatrix} 2a+2 & 3 & a+4 \\ 4a-1 & a+1 & 2a+2 \\ 5a-4 & a+1 & a-1 \end{vmatrix}}{(a-3)(a-2)(a-1)}\right)$= desarrollando los determinantes $\left(\frac{(a-1)(2a^2-4a-15)}{(a-3)(a-2)(a-1)}, \frac{(a-1)(a+18)}{(a-3)(a-2)(a-1)}, \frac{-3(a-1)(a^2-a-7)}{(a-3)(a-2)(a-1)}\right)=$ $\left(\frac{2a^2-4a-15}{a^2-5a+6}, \frac{a+18}{a^2-5a+6}, \frac{-3a^2+3a+21)}{a^2-5a+6}\right)$
- <u>Si a=1</u>, A*=$\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} & 1 & 5 \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ El menor resaltado nos indica que rgA=2, para ver el rgA*, sólo hay que orlar con la 3ª fila y 4ª columna: $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$ Luego rgA=rgA*=2<3=nº de incógnitas: SCI con 1º de libertad, para resolverlo elimino la 3ª ecuación y hago z=λ, quedando el sistema $\begin{cases} 4x+3y=5-\lambda \\ 3x+2y=4-\lambda \end{cases}$ con solución $\{(\lambda-2, -\lambda-1, \lambda);\ \lambda€\mathbb{R}\}$
- <u>Si a=2</u>, A*=$\begin{pmatrix} \mathbf{6} & 3 & 2 & 6 \\ \mathbf{7} & \mathbf{3} & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si orlamos el menor resaltado con la 3ª fila y 4ª columna, obtengo $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 7 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$≠0 . Luego rgA=2<rgA*: SI (En realidad, la incompatibilidad del sistema se deducía fácilmente observando la 1º y 3ª ecuaciones, correspondientes a la 1ª y 3ª fila de A*)
- <u>Si a = 3</u>, A*=$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 & 7 \\ 11 & 4 & -5 & 8 \\ 11 & 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ que, con la sola observación de la "ª y 3ª ecuaciones, deducimos que también es incompatible.

Sistemas 3x4

14. $\begin{cases} 2x+ay-3z+2t=a \\ ax+2y+z-t=2 \\ x+y-2z-at=2 \end{cases}$

Comencemos estudiando el rango de A=$\begin{pmatrix} 2 & a & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ a & 2 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ 1 & 1 & -2 & -a \end{pmatrix}$. Para ello orlamos desde el menor no nulo que hemos resaltado.

Con F_3 y C_2: $\begin{vmatrix} a & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} = -a^2-8a-7 = -(a+7)(a+1)$

Con F_3 y C_1: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} = -3(a+1)^2$

El único valor que anula ambos determinantes es a=-1.

- Si a≠-1, rgA=3=rgA*<4=nº de incógnitas: SCI, con un grado de libertad.
  Para calcular las soluciones lo más práctico es hacer y= λ (si se hiciese x= λ, habría que considerar el caso particular $a=-7$), quedando el sistema
  $\begin{cases} 2x-3z+2t=a-a\lambda \\ ax+z-t=2-2\lambda \\ x-2z-at=2-\lambda \end{cases}$ cuya solución, por Cramer, es
  $\{\left(\frac{\begin{vmatrix} a-a\lambda & -3 & 2 \\ 2-2\lambda & 1 & -1 \\ 2-\lambda & -2 & -a \end{vmatrix}}{-3(a+1)^2}, \lambda, \frac{\begin{vmatrix} a & a-a\lambda & 2 \\ 2 & 2-2\lambda & -1 \\ -a & 2-\lambda & -a \end{vmatrix}}{-3(a+1)^2}, \frac{\begin{vmatrix} a & -3 & a-a\lambda \\ 2 & 1 & 2-2\lambda \\ -a & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}}{-3(a+1)^2}\right): \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Falta estudiar el caso a=-1, para el que hay que calcular el rango de
  A*=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & -1 \\ -1 & 2 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Para este fin, sólo me queda orlar con F_3 y
  C_5:$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$=1≠0. Luego rgA=2<rgA*=3: SI.

15. $\begin{cases} ax+3y-z-t=a \\ x-y+az+t=1 \\ x+4y-3z-at=1 \end{cases}$

Comencemos estudiando el rango de A=$\begin{pmatrix} a & 3 & -1 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & a & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & -3 & -a \end{pmatrix}$. Para ello orlamos desde el menor no nulo que hemos resaltado.

Con F_1 y C_3:$\begin{vmatrix} a & 3 & -1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -4a^2+6a+4 = 2\left(a+\frac{1}{2}\right)(a-2)$

Con F_1 y C_4: $\begin{vmatrix} a & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -a \end{vmatrix} = a^2-a-2 = (a+1)(a-2)$

El único valor que anula ambos determinantes es a=2.

- Si a≠2, rgA=3=rgA*<4=nº de incógnitas: SCI, con un grado de libertad. Para calcular las soluciones, en el caso de que a no sea -1, hago z= λ, quedando el sistema $\begin{cases} ax+3y-t=a+\lambda \\ x-y+t=1-a\lambda \\ x+4y-at=1+3\lambda \end{cases}$ cuya solución, por Cramer, es
  $\{\left(\frac{\begin{vmatrix} a+\lambda & 3 & -1 \\ 1-a\lambda & -1 & 1 \\ 1+3\lambda & 4 & -a \end{vmatrix}}{(a+1)(a-2)}, \frac{\begin{vmatrix} a & a+\lambda & -1 \\ 1 & 1-a\lambda & 1 \\ 1 & 1+3\lambda & -a \end{vmatrix}}{(a+1)(a-2)}, \lambda, \frac{\begin{vmatrix} a & 3 & a+\lambda \\ 1 & -1 & 1-a\lambda \\ 1 & 4 & 1+3\lambda \end{vmatrix}}{(a+1)(a-2)}\right): \lambda \in \mathbb{R}\}$.

  Si a fuese -1, entonces tendría que hacer t= λ, quedándome el sistema
  $\begin{cases} -x+3y-z=-1+\lambda \\ x-y-z=1-\lambda \\ x+4y-3z=1-\lambda \end{cases}$ que tiene por solución
  $\left(\frac{\begin{vmatrix} -1+\lambda & 3 & -1 \\ 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1-\lambda & 4 & -3 \end{vmatrix}}{2}, \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1+\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda & -3 \end{vmatrix}}{2}, \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1+\lambda \\ 1 & -1 & 1-\lambda \\ 1 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}}{2}, \lambda\right): \lambda \in \mathbb{R}$

- <u>Falta estudiar el caso a=2,</u> para el que rgA=2, y hay que calcular el de A*=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 2 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Para este objetivo, sólo queda orlar el menor con F_1 y C_5:$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$=0. Luego rgA=2=rgA*=2<4=nº de incógnitas, queda un SCI con dos grados de libertad. Elimino la 1ª ecuación, que es la queda fuera del menor, y hago z= λ, t=μ, quedando el sistema $\begin{cases} x-y=1-2\lambda-\mu \\ x+4y=1+3\lambda+2\mu \end{cases}$ que, utilizando tiene por solución $\{\left(\frac{5-5\lambda-2\mu}{5},\ \frac{5\lambda+3\mu}{5}, \lambda,\ \mu\right) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

16. $\begin{cases} x+y+z-t=a \\ 2x-2y+z-at=0 \\ ax-y+z-t=2 \end{cases}$

A=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & -1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & 1 & -a \\ a & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Estudiemos su rango:

Orlo el menor con F_3 y C_3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3a-5, \text{que se anula en } \frac{5}{3}$.

Orlo con F_3 y C_4 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -a \\ a & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2-a^2+2-2a+2-a=-a^2-3a+6$, que se anula en $\frac{3\pm\sqrt{33}}{-2}$.

<u>Es decir, para cualquier valor de a se tiene rgA=rgA*=3</u> y el sistema será compatible e indeterminado con 1º de libertad. Veamos cómo se hallaría la solución:

<u>Si a ≠ $\frac{5}{3}$</u>, se hace t= λ, y se aplica la regla de Cramer en el sistema $\begin{cases} x+y+z=a+\lambda \\ 2x-2y+z=a\lambda \\ ax-y+z=2+\lambda \end{cases}$

<u>Si a=$\frac{5}{3}$</u>, se hace z= λ y se resuelve por Cramer $\begin{cases} x+y-t=\frac{5}{3}-\lambda \\ 2x-2y-\frac{5}{3}t=-\lambda \\ \frac{5}{3}x-y-t=2-\lambda \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+y+z+at=0 \\ x-ay+z-t=0 \\ -ax+3y+2z-3t=0 \end{cases}$

El sistema es homogéneo, luego será compatible por ser rgA=rgA*.

A=$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & a \\ 1 & -a & 1 & -1 \\ -a & \mathbf{3} & \mathbf{2} & -3 \end{pmatrix}$ Estudiemos su rango Orlando desde el menor resaltado:

Con F_2 y C_1 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ -a & 3 & 2 \end{vmatrix} = -a^2-3a-2=-(a+2)(a+1)$

Con F_2 y C_4 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$=-2$a^2-6a-4=-2(a-1)(a+2)$

El único valor que anula ambos menores es a=-2.

- Si a≠-2, tendremos rgA=rgA*=3<4=nº de incógnitas: SCI con 1º de libertad. Hacemos t= λ, en el caso de a no valga -1, y nos queda el sistema $\begin{cases} x+y+z=-a\lambda \\ x-ay+z=\lambda \\ -ax+3y+2z=3\lambda \end{cases}$ que se puede resolver por Cramer. En el caso de que a=-1, se hace z= λ, y quedaría el sistema $\begin{cases} x+y-t=-\lambda \\ x+y-t=-\lambda \\ x+3y-3t=-2\lambda \end{cases}$ que también se puede resolver por ese método.
- Si a=-2, tendremos rgA=rgA*=2<4=nº de incógnitas: SCI con 2º de libertad. Elimino la segunda ecuación y hago x= λ, t=µ, quedando el sistema $\begin{cases} y+z=-\lambda+2\mu \\ 3y+2z=-2\lambda+3\mu \end{cases}$ que se resuelve fácilmente..

Sistemas 4x3

18. $\begin{cases} x+y-3z=1 \\ ax-y+z=-1 \\ x-ay+4z=-2 \\ ax+5y-13z=5 \end{cases}$

Como A* es cuadrada, es mejor comenzar calculando su determinante:
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 4 & -2 \\ a & 5 & -13 & 5 \end{vmatrix}$ = (Conviene hacer ceros en la cuarta columna por no tiene ninguna a. Así hacemos F'$_2$=F$_2$+F$_1$, F'$_3$=F$_3$+2F$_1$, F'$_4$=F$_4$-5F$_1$) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ a+1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -a+2 & -2 & 0 \\ a-5 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ =
$-\begin{vmatrix} a+1 & 0 & -2 \\ 3 & -a+2 & -2 \\ a-5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$= (desarrollo por los adjuntos de F$_2$) −(−a+2) $\begin{vmatrix} a+1 & -2 \\ a-5 & 2 \end{vmatrix} = (a-2)(4a-8) = 4(a-2)^2$, que se anula para a=2. En consecuencia:

- Si a≠2, rg A*=4>rg A: SI.
- Veamos lo que ocurre cuando a=2: A= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & -3 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -13 \end{pmatrix}$. Para estudiar su rango, orlo desde el menor no nulo que está resaltado.

  Con F$_3$ y C$_3$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$=0

  Con F$_4$ y C$_3$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -13 \end{vmatrix}$=0

Como ambos son nulos. Tenemos que rg A=2, pero de A* sólo sabemos que su rango no es 4, y desconocemos si vale 2 o 3. Vamos a verlo:

A*=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & -3 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -13 & 5 \end{pmatrix}$ Sólo me falta orlar con F_3 y C_4, y también con F_4 y C_4:

F_3 y C_4 $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=0$

F_4 y C_4 $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & -1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}=0$

Así pues rgA=rgA*=2<3=nº incógnitas: SCI, con 1º de libertad. Elimino la 3ª y la 4ª ecuación, y hago z=λ, quedando el sistema

$\begin{cases} x+y=1+3\lambda \\ 2x-y=-1-\lambda \end{cases}$ que tiene por solución { ($\frac{\begin{vmatrix} 1+3\lambda & 1 \\ -1-\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-3}$, $\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+3\lambda \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}}{-3}$ $,\lambda)$: $\lambda \in \mathbb{R}$}.

19. $\begin{cases} x+y=1 \\ ax-y+z=2 \\ -ax+2y-3z=0 \\ ax-z=0 \end{cases}$

Como antes, comenzaremos calculando el determinante de A* para estudiar su rango.

$|A^*|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 & 2 \\ -a & 2 & -3 & 0 \\ a & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$= (F’$_2$=F$_2$+F$_1$, F’$_3$=F$_3$-2F$_1$) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a+1 & 0 & 1 & 3 \\ -a-2 & 0 & -3 & -2 \\ a & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$= (desarrollo por los adjuntos de C_2) $-\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 3 \\ -a-2 & -3 & -2 \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(-2a+3a+6+9a-2a-2) = -(8a+4)$, que se anula en a = -0.5.

- Si a≠-0.5, será rgA*=4>rgA: SI
- Veamos el caso a= -0.5: A=$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -0.5 & -1 & 1 \\ 0.5 & 2 & -3 \\ -0.5 & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ Orlo el menor:

Con F_2 y C_1: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -0.5 & -1 & 1 \\ -0.5 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$

Con F_3 y C_1: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0.5 & 2 & -3 \\ -0.5 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$

Concluimos que rg A=2. Hay que estudiar el rg A*, porque sólo sabemos que no es 4, pero desconocemos si vale 2 o 3.

A*=$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 \\ -0.5 & -1 & 1 & 2 \\ 0.5 & 2 & -3 & 0 \\ -0.5 & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 0 \end{pmatrix}$ Únicamente nos queda orlar con F_2 y C_4, y también con F_3 y C_4:

Con F_2 y C_4: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$=3≠0. No hace falta ya orlar con F_3 y C_4 porque ya tenemos rg A*=3>rgA=2: SI.

Podemos concluir que el sistema no tiene solución para ningún valor de a.

20. $\begin{cases} x+z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ 3x+ay+3z=0 \\ ay-z=0 \end{cases}$

Como rgA=rgA*, sólo tenemos que estudia el rango de A=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & 2 \\ 3 & a & 3 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$

Orlo con F_3 y C_3: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & 2 \\ 3 & a & 3 \end{vmatrix}$=0 por tener iguales las columnas 1ª y 3ª.

Orlo con F_4 y C_3 $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = -1+2a-2a=-1 \neq 0.$

<u>Luego, para cualquier valor de a, será rgA=rgA*=3=nº de incógnitas: SCD, cuya única solución será, por ser homogéneo, la (0,0,0).</u>