

Actividad 10: Calcula:

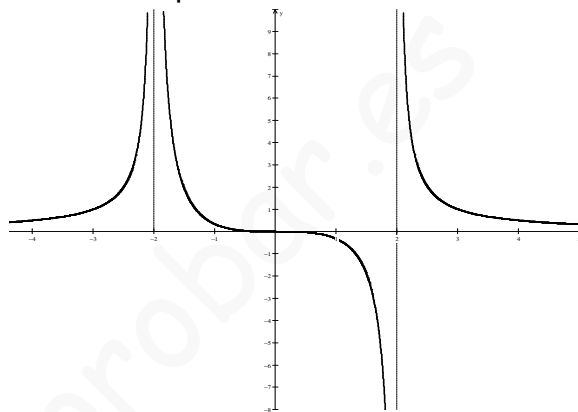
a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-5}{3}$ b) $\lim_{x \rightarrow -3} (x^3 - 2)$ c) $\lim_{x \rightarrow -2} |-x^2 + x + 3|$ d) $\lim_{x \rightarrow 1/2} e^{1-x}$

Actividad 11: Calcula los límites laterales de las funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x < 3 \\ 2x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ en $x=3$ b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x+2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $x=1$

Actividad 12: Determina los límites siguientes de la función representada a continuación:

a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$



d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ f) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Actividad 13: Determina razonadamente el valor de los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x}{(x+2)^3}$ b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x}{(x+2)^3}$ c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x}{(x+2)^3}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^4}$ e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2}{(x-3)^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-7x}{x-1}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5 - \sqrt{x} + 1)$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,5^x$ i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x$ j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4^x)$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3 + 1}$ l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ m) $\lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{1}{x-2}}$ n) $\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{1}{x-2}}$ ñ) $\lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{1}{x-2}}$

Actividad 14: Determina razonadamente el valor de los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 2x - 3}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2-x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x+1})$ f) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3))$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + x}$

Actividad 15: Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-2}{3x}\right)^{2x-1}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{1-3x}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{2}}$ d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$

Actividad 16: Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 5}$ b) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

Actividad 17: Determina el valor de a para el cual: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + ax + 1}) = 1$

Actividad 18: Calcula el valor de k , de modo que sean ciertas las siguientes igualdades:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2kx^2 - 7x + 5}{7x^2 - 3} = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{kx^2 - k}{x^2 + 3x + 2} = 4$

Actividad 19: Determina razonadamente las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

b) $g(x) = \frac{2x^3 + x}{x^2 - 3x}$

Actividad 20: Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2x^3 + 5x}{x^3 + 1}$

b) $g(x) = x^2 - \sqrt{x^4 - x^3}$

Actividad 21: Estudia las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

b) $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Actividad 22: Obtén las asíntotas de la función $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

Actividad 23: Calcula a y b para que la función: $f(x) = \frac{ax - 3}{x + b}$ tenga como asíntotas:
 $y = 2$ y $x = -2$

Actividad 24: (S) Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Actividad 25: Calcula el valor de a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ b & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Actividad 26: Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 1 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ -(x-1)^2 + 1 & \text{si } 1 < x \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$$

Actividad 27: Estudia la continuidad y halla los límites en el infinito de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases} . \text{ Representa, después, la función } y = f(x)$$

Actividad 28: Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0 \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ -2 & \text{si } x = -2 \end{cases} \quad \text{en } x = -2$$

Actividad 29: Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro a .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Actividad 30: Halla los valores de a y b para que sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^3 - 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Actividad 31: Halla los valores de los parámetros para que las siguientes funciones sean continuas:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2(x-3)^a}{x^2 - 6x + 9} & \text{si } x \neq 3 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 9 & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \text{ ó } x > 5 \end{cases}$$

Actividad 32: El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la

función: $P(t) = \frac{15 + t^2}{(t+1)^2}$, donde t se mide en años transcurridos desde $t = 0$. Calcula:

- La población inicial.
- El tamaño de la población a largo plazo.

Actividad 33: Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en

$$\text{días), obteniéndose que: } T(x) = \begin{cases} \frac{300}{x+30} & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ \frac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

- a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.
 b) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿Y en menos de 2?

Actividad 34: (2003) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x) - \operatorname{sen}x}{x \cdot \operatorname{sen}x} \right)$, siendo $\ln(1+x)$ la función logaritmo neperiano de $1+x$.

Actividad 35: (2003) Considera la función definida para $x \neq -2$ por $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x+2}$

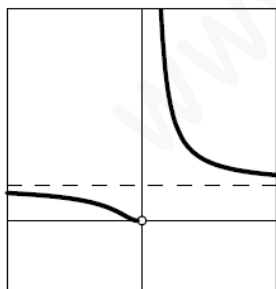
- a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.
 b) Estudia la posición relativa de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

Actividad 36: (2004) Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right)$ es finito. Determina el valor de a y calcula el límite.

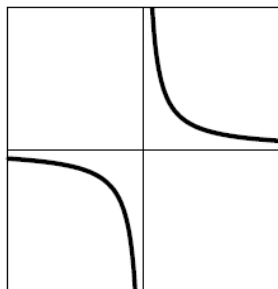
Actividad 37: (2005) Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \alpha \operatorname{sen}x}{x^2}$ es finito. Determina el valor de α y calcula el límite.

Actividad 38: (2005) Considera las tres funciones cuyas expresiones respectivas vienen dadas, para $x \neq 0$, por $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$, $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ y $h(x) = \ln|x|$.

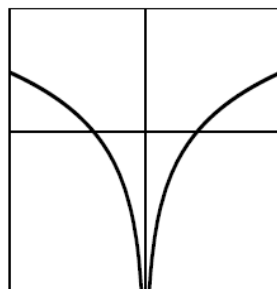
- a) Halla las ecuaciones de las asíntotas de las gráficas de f, g y h.
 b) Identifica, entre las que siguen, la gráfica de cada función, justificando la respuesta.



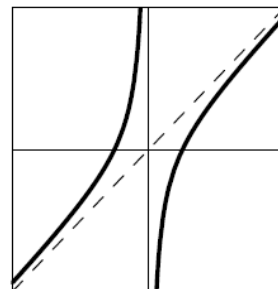
Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4

Actividad 39: (2006) Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$, siendo \ln la función logaritmo neperiano.

Actividad 40: (2006) Sea $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = \frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2}$, siendo

ln la función logaritmo neperiano. Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, hállala.

Actividad 41: (2008) Sea f la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$. Determina las asíntotas de la gráfica de f .

Actividad 42: (2008) Dada la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, determina las asíntotas de su gráfica.

Actividad 43: (2009) Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right)$, siendo \ln la función logaritmo neperiano.

Actividad 44: (2009) Se considera la función $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$. Determina la asíntota de la gráfica de f .

Actividad 45: (2009) Sea $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} -\frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

a) Sabiendo que f es continua, calcula a (ln denota logaritmo neperiano).

b) Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, determina su ecuación.

Actividad 46: (2010) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^2}$

SOLUCIONES

Actividad 1: $a = 5$

Actividad 2: a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$ b) $g^{-1}(x) = \frac{-x+4}{5}$

Actividad 3: $A(x) = x\sqrt{400-x^2}$, siendo $Dom(A) = [0,20]$

Actividad 4: a) $(f \circ g)(x) = \frac{2x+2}{2x-3}$ b) $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ c) $g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

Actividad 5:

a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2,3\}$ b) $Dom(g) = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$ c) $Dom(h) = \left(-2, \frac{1}{3}\right]$
d) $Dom(j) = \left[\frac{3}{2}, 4\right) \cup (4, +\infty)$ e) $Dom(k) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Actividad 6:

a)

1) Dominio y recorrido: $Dom(i) = \mathbb{R}$ e $Im(i) = [-3,3]$.

2) Puntos de corte con los ejes y signo: El único punto de corte con los ejes es $(0,0)$.

$$i(x) > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

$$i(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0)$$

3) Continuidad: i es continua en todo \mathbb{R} .

4) Asíntotas: i tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

5) Simetrías: i es impar.

6) Periodicidad: i no es periódica.

7) Monotonía:

i es estrictamente creciente en: $(-1,1)$

i es estrictamente decreciente en: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

8) Extremos relativos: i presenta un máximo relativo en $(1,3)$ y un mínimo relativo en $(-1,-3)$.

9) Acotación y extremos absolutos: i está acotada, presentando un máximo absoluto en $(1,3)$ y un mínimo absoluto en $(-1,-3)$.

10) Curvatura:

i es convexa en: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

i es cóncava en: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

11) Puntos de inflexión: i tiene tres puntos de inflexión en $\left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0,0)$ y $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

b)

1) Dominio y recorrido: $Dom(p) = \mathbb{R} - \{-1,1\}$ e $Im(p) = \mathbb{R}$.

2) Puntos de corte con los ejes y signo: El único punto de corte con los ejes es $(0,0)$.

$$p(x) > 0 \quad \forall x \in (-1,0) \cup (1, +\infty)$$

$$p(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0,1)$$

3) Continuidad: p es continua en $\mathbb{R} - \{-1,1\}$, presentando discontinuidades de salto infinito para $x = -1$ y $x = 1$

4) Asíntotas: p tiene dos asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$, y una oblicua en $y = x$.

5) Simetrías: p es impar.

6) Periodicidad: p no es periódica.

7) Monotonía:

p es estrictamente creciente en: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

p es estrictamente decreciente en: $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

8) Extremos relativos: p presenta un mínimo relativo en $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ y un máximo

relativo en $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

9) Acotación y extremos absolutos: p no está acotada inferior ni superiormente.

10) Curvatura:

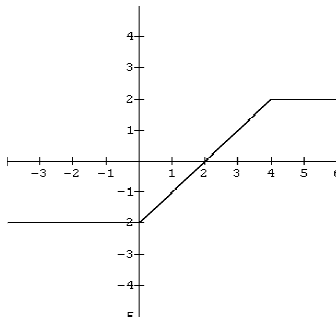
p es convexa en: $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

p es cóncava en: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

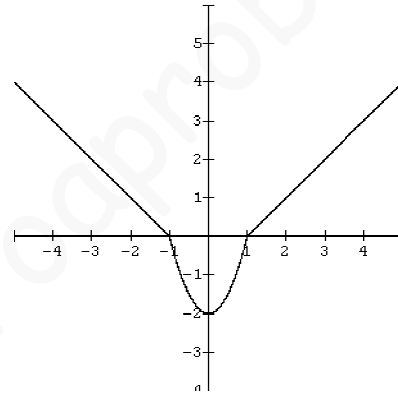
11) Puntos de inflexión: p tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

Actividad 7:

a)

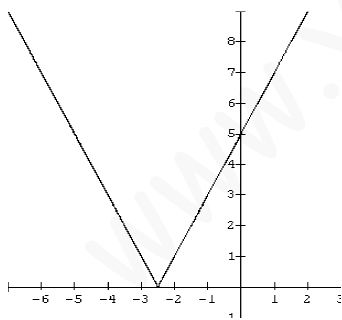


b)

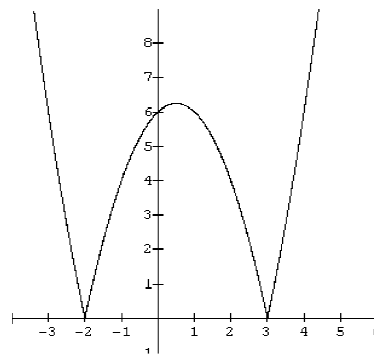


Actividad 8:

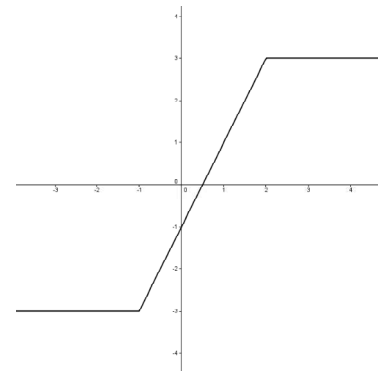
a)



b)



c)



Actividad 9:

a) -3

b) $3/2$

c) 0

d) 0

e) 1

f) \neq

g) 2

h) 1

i) \neq

Actividad 10:

a) $-4/3$

b) -29

c) -3

d) \sqrt{e}

Actividad 11:

a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$

Actividad 12:

a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) \nexists

Actividad 13:

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) \exists d) $+\infty$ e) $+\infty$

f) \nexists g) $+\infty$ h) $+\infty$ i) $+\infty$ j) 0

k) 0 l) $+\infty$ k) 0 l) $+\infty$ m) \nexists

Actividad 14:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 0 d) $\frac{3}{2}$ e) 0 f) 32 g) 3 h) 0

Actividad 15:

a) $+\infty$ b) 0 c) 0 d) $\frac{3}{2}$

Actividad 16:

a) 0 b) 1 c) 0

Actividad 17: $a = -4$

Actividad 18:

a) $k = \frac{-7}{2}$ b) $k = -2$

Actividad 19:

a) $x = -2$, $x = 2$, $y = 1$

b) $x = 3$, $y = 2x + 6$

Actividad 20:

a) $x = -1$; $y = 2$

b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$

Actividad 21:

a) $x = 2$; $x = -2$

b) $x = 0$

Actividad 22: $x=1$, $x=-1$, $y=x$

Actividad 23: $a=2$ y $b=2$

Actividad 24:

- a) f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, presentando en $x=1$ un salto finito
- b) f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, presentando en $x=0$ un salto infinito

Actividad 25: Debe ser $a=-9$ y $b=10$

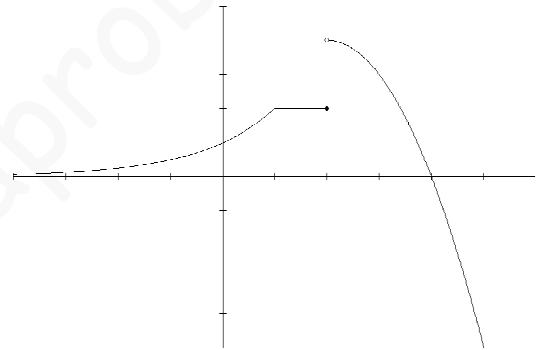
Actividad 26:

- a) f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, presentando una discontinuidad de salto finito en $x=1$.
- b) g es continua en $\mathbb{R} - \{-1,2\}$, presentando una discontinuidad de salto infinito en $x=-1$ y una evitable en $x=2$

Actividad 27: La función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$, presentando una discontinuidad de salto finito para $x=2$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



Actividad 28:

- a) Salto finito en $x=0$
- b) Salto finito en $x=-2$

Actividad 29:

a)

Caso 1: si $a=-8$, es continua en \mathbb{R}

Caso 2: si $a \neq -8$, es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$, presentando en $x=2$ una discontinuidad de salto finito.

b)

Caso 1: si $a=1/2$, es continua en \mathbb{R}

Caso 2: si $a \neq 1/2$, es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, presentando en $x=0$ una discontinuidad de salto finito.

Actividad 30: $a=2$ y $b=3$

Actividad 31:

- a) $a=2$
- b) $a=8$, $b=-11$

Actividad 32:

- a) 15 millones de individuos.
- b) 1 millón de individuos.

Actividad 33:

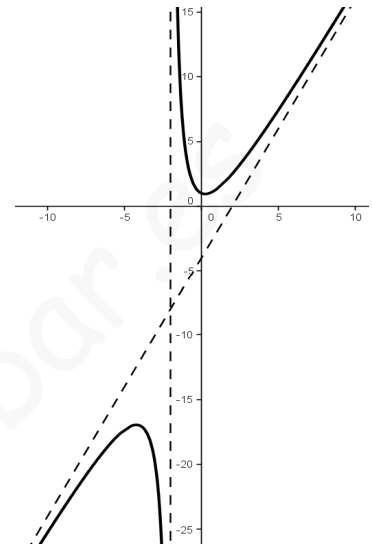
- a) Basta hacer los límites.
- b) No. Tampoco

Actividad 34: $-1/2$

Actividad 35:

a) $x = -2$; $y = 2x - 4$

b) En la asíntota vertical: la gráfica tiende a $-\infty$ por la izquierda y a $+\infty$ por la derecha. En la asíntota oblicua la gráfica está por encima de la asíntota en $-\infty$ y por debajo en $+\infty$.



Actividad 36: $a = 2$ y el límite es $-1/2$

Actividad 37: $\alpha = 1$ y el límite es 0

Actividad 38:

La gráfica de f tiene asíntotas $x = 0$ e $y = x$ y se corresponde con la gráfica 4.

La gráfica de g tiene $x = 0$ e $y = 1$ y se corresponde con la gráfica 1.

La gráfica de h tiene $x = 0$ y se corresponde con la gráfica 3.

Actividad 39: $1/2$

Actividad 40: $y = 0$

Actividad 41: $x = 0$ e $y = x$

Actividad 42: $x = 0$; $y = 1$ e $y = -1$

Actividad 43: 1

Actividad 44: $y = 2x - \frac{1}{2}$

Actividad 45:

- a) $a = -1$
- b) $y = 0$

Actividad 46: 0