Problemas de limites, continuidad y derivabilidad

Calcula los siguientes límites de funciones racionales, irracionales y exponenciales

$$\boldsymbol{a)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{2x^2+x}}{\mathbf{x^2-3}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2/x^2+x/x^2}{x^2/x^2-3/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+1/x}{1-3/x^2}=\frac{2}{1}=2$$

$$\boldsymbol{b)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{x^3+5}}{\mathbf{x^2-x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3/x^3+5/x^3}{x^2/x^3-x/x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+5/x^3}{1/x-1/x^2}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$\boldsymbol{c)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x^4+2x+2x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x/x^4+1/x^4}{x^4/x^4+2\,x/x^4+\frac{2}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}+1/x^4}{1+2/x^3+\frac{2}{x^4}}=\frac{0}{1}=0$$

$$\boldsymbol{d)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{5x^5-2}}{\mathbf{2x^5+x^3-1}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{5\,x^5/x^5-2/x^5}{2x^5/x^5+x^3/x^5-\frac{1}{x^5}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-2/x^5}{2+1/2-\frac{1}{x^5}}=\frac{5}{2}$$

$$\boldsymbol{e)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{3x+2}}{\mathbf{x^2+7x+1}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x/x^2+2/x^2}{x^2/x^2+7\,x/x^2+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+2/x^2}{1+7/x+\frac{1}{x}}=\frac{0}{1}=0$$

$$f)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-5}{x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2/x^2+x/x^2-5/x^2}{x/x^2+3x^2/x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+1/x-5/x^2}{1/x+3}=\frac{2}{3}$$

$$g)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2}{\sqrt{(x^4+1)}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4/x^4-2/x^4}{\sqrt{\left(\frac{x^4}{x^8}+\frac{1}{x^8}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2/x^4}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^8}\right)}}=$$

$$=\frac{1}{0}=\infty$$

$$h)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sqrt{x}}{1-x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^4}}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x^2}-1}$$

$$=\frac{0}{-1}=0$$

$$i)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{(4x^3-1)}}{x+2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\left(\frac{4x^3}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)}}{x/x+2/x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{(4-1/x^2)}}{1+2/x}=\frac{2}{0}=\infty$$

$$j)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^3+2x-1}}{\sqrt{x-4}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^3/x^3+2x/x^3-1/x^3}}{\sqrt{x/x^3-4/x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3+2/x^2-1/x^3}}{\sqrt{1/x^2-4/x^3}}=\frac{\sqrt{3}}{0}=\infty$$

$$\boldsymbol{k)}\ \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x-1}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+x-1}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2+x-1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+x-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+x-1}\right)^2}{\left(x+\sqrt{x^2+x-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-x+1}{x+\sqrt{x^2+x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x/x+1/x}{x/x+\sqrt{x^2/x^2+x/x^2-1/x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+1/x}{1+\sqrt{1+1/x-1/x^2}}=\frac{-1}{1+\sqrt{1}}=\ -\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{l)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3-1}{x+2}-\frac{2x^3+x+1}{x}\right)=\frac{\infty}{\infty}-\frac{\infty}{\infty}=\text{Doble indeterminacion}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^3-1)\cdot x-(2x^3+x+1)\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-x-2x^4-4x^3-x^2-2x-x-2}{x^2-2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x^3-x^2-4x-2}{x^2-2x}=\frac{\infty}{\infty}=\ \lim_{x\to\infty}\frac{-4x^3/x^3-x^2/x^3-4x/x^3-2/x^3}{x^2/x^3-2x/x^3}=\ \frac{-4}{0}=-\infty$$

$$\boldsymbol{m)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-\sqrt{2x^2-2x+1}\right)=\infty-\infty=$$

$$=\ \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2-3}-\sqrt{2x^2-2x+1}\right)\cdot\left(\sqrt{2x^2-3}+\sqrt{2x^2-2x+1}\right)}{\sqrt{2x^2-3}+\sqrt{2x^2-2x+1}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2-3}\right)^2-\left(\sqrt{2x^2-2x+1}\right)^2}{\sqrt{2x^2-3}+\sqrt{2x^2-2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3-2x^2+2x-1}{\sqrt{2x^2-3}+\sqrt{2x^2-2x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-4}{\sqrt{2x^2-3}+\sqrt{2x^2-2x+1}}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-4/x}{\sqrt{2-3/x^2}+\sqrt{2-2/x+1/x^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-1}{2x+3}-\frac{2x^3+5}{x}\right)=\infty-\infty$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^3-1)\cdot x-(2x^3+5)\cdot(2x+3)}{(2x+3)\cdot x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4-x-4x^4-6x^3-10x-15}{2x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x^3-11x-15}{2x^2+3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-6-11/x^2-15/x^3}{2/x+3/x^2}=\frac{-6}{0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3-2x^2+1}-\sqrt{x}\right)=\infty-\infty$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^3-2x^2+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x^3-2x^2+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x^3-2x^2+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+1-x}{\sqrt{x^3-2x^2+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\sqrt{\frac{x^3}{x^6}-\frac{2x^2}{x^6}+\frac{1}{x^6}}+\sqrt{\frac{x}{x^6}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\sqrt{\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^6}}+\sqrt{\frac{1}{x^5}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-0-0+0}{\sqrt{0-0+0}+\sqrt{0}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{2x^2+1}\right)=\infty-\infty$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{2x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{2x^2+1}\right)}{\left(x+\sqrt{2x^2+1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x^2-1}{x+\sqrt{2x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2-1}{x+\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\sqrt{\frac{2x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-0}{0+\sqrt{0+0}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\boldsymbol{2x^3-2}}{\boldsymbol{x+3}}-\frac{\boldsymbol{x^2+1}}{\boldsymbol{x}}\right)=[\infty-\infty]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^3-2)\cdot x-(x^2+1)(x+3)}{x(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-2x-x^3-3x^2-x-3}{x^2+3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x-x^3-3x^2-3}{x^2+3x}=\frac{2}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\boldsymbol{x^2-1}}-\sqrt{\boldsymbol{x^2+1}}\right)=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-x^2-1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{-2}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\boldsymbol{x^3-2x}}{\boldsymbol{x^2-1}}-\frac{\boldsymbol{x^2+3}}{\boldsymbol{x+1}}\right)=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3-2x)-(x^2+3)(x-1)}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x-x^3+x^2-3x+3}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+3}{x^2-1}=1$$

$$\mathbf{lim}_{x\to\infty}\left(\sqrt{\boldsymbol{2x^2+1}}\ \text{-}\ \sqrt{\boldsymbol{x^2-3}}\right)=\ [\infty-\infty]=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-3}\right)\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-3}\right)}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1-x^2+3}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-3}}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x^2+3}\times\frac{2x^3-2}{x}\right)=0\times\infty$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4-4x-2x^3+2}{x^3+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^4}{x^4}-\frac{4x}{x^4}-\frac{2x^3}{x^4}+\frac{2}{x^4}}{\frac{x^3}{x^4}+\frac{3x}{x^4}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-0-0+0}{0+0}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{0}=\infty$$

$$\mathbf{\lim_{x\to\infty}}\left(\frac{4x^2}{x^3+2}\,.\,\frac{3x^2-1}{x+3}\right)=[0\;.\;\infty]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^4-4x^2-3x^2+1}{x^4-3x^3-2x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^4-7x^2+1}{x^4-3x^3-2x+6}=12$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+1}}{x}=\frac{[\infty-\infty]}{x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+1})\,(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1})}{x\,(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1})}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{2x-1})^2-(\sqrt{2x+1})^2}{x\sqrt{2x-1)}+x\sqrt{2x+1)}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x}-1-\cancel{2x}-1}{x\sqrt{2x-1)}+x\sqrt{2x+1)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x\sqrt{2x-1)}+x\sqrt{2x+1)}}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3-x+1}{2x^3+3x}\right)^{x^2-1}=[1^\infty]=e^p$$

$$\text{p}=\lim_{x\to\infty}(x^2-1).\left[\frac{2x^3-x+1}{2x^3+3x}-1\right]=\lim_{x\to\infty}(x^2-1)\cdot\left(\frac{2x^3-x+1-2x^3-3x}{2x^3+3x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)(1-4x)}{2x^3+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x^3-1+4x}{2x^3+3x}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3-x+1}{2x^3+3x}\right)^{x^2-1}=e^p=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-3}{4x^2+3}\right)^{2x^2-1} = [1^{\infty}] = e^p$$

$$p= \lim_{x\to\infty}(2x^2-1)\,.\left[\frac{4x^2-3}{4x^2+3} -1\right] = \lim_{x\to\infty}(2x^2-1)\,.\left(\frac{\cancel{4x^2}-3-\cancel{4x^2}-3}{4x^2+3}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2-1)(-6)}{4x^2+3} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-12x^2+6}{4x^2+3} = -3$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-3}{4x^2+3}\right)^{x^2-1} = e^p = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-x}\right)^{4x+1} = 1^{\infty} = e^{p}$$

$$p = \lim_{x\to\infty}(4x+1)\left[\frac{x^2+3}{x^2-x} - 1\right] = \lim_{x\to\infty}(4x+1)\cdot\frac{x^2+3-x^2+x}{x^2-x} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(4x+1)\cdot(3+x)}{x^2-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+13x+3}{x^2-x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{4+13/x+3/x^2}{1-1/x} = 4$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-x}\right)^{4x+1} = e^{p} = e^{4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x^2}{x^3-1}\right)^{3x2+1} = 1^{\infty} = e^{p}$$

$$p = \lim_{x\to\infty}(3x^2+1)\cdot\left(\frac{x^3+2x^2}{x^3-1}-1\right) = \lim_{x\to\infty}(3x^2+1)\cdot\frac{x^3+2x^2-x^3+1}{x^3-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+1)\cdot(2x^2+1)}{x^3-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x^4+5x^2+1}{x^3-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{6+5/x^2+1/x^4}{1/x-1/x^4} =$$

$$= \frac{6}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x^2}{x^3-1}\right)^{3x2+1} = e^{p} = e^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x}\right)^{x^2} = 1^{\infty} = e^{p}$$

$$p = \lim_{x\to\infty}x^2\cdot\left(\frac{3x+1}{3x}-1\right) = \lim_{x\to\infty}x^2\cdot\left(\frac{3x+1-3x}{3x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3/x} = \frac{1}{0} = \infty$$

.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3\,x}\right)^{x^2} = e^{\infty} = \infty$$

Calcular los siguientes límites:

a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\infty}{\sqrt{\infty}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0}} = \frac{1}{1} = 1$$

Dividimos numerador y denominador por la mayor potencia de x es decir por x.

b) $$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^3-8}}{x^2-4} = \frac{\sqrt{8-8}}{4-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{(x-2)(x^2+2x+4)}}{(x+2)(x-2)}\ ;$$

Descomponemos en factores el radicando y el denominador y luego simplificamos términos

$x^3-8=0$

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	0

$x^2+2x+4=0\ ;\ \ x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}\ \nexists$

$x^2-4=0\ ;\ \ x=\pm 2\ ;\ \ x^2-4=(x+2)(x-2)$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^3-8}}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{1/2}\sqrt{x^2+2x+4}}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{(x-2)^{1/2}(x+2)} = \frac{\sqrt{4+4+4}}{0\cdot 4} =$$

$$= \frac{\sqrt{12}}{0} = \infty$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^3-1}-\sqrt{x^3}\right) = \sqrt{\infty}-\sqrt{\infty} = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{2x^3-1}-\sqrt{x^3}\right)\left(\sqrt{2x^3-1}+\sqrt{x^3}\right)}{\sqrt{2x^3-1}+\sqrt{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\cancel{\sqrt{\ }}2x^3-1\right)^{\cancel{2}} - \left(\cancel{\sqrt{\ }}x^3\right)^{\cancel{2}}}{\sqrt{2x^3-1}+\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-1-x^3}{\sqrt{2x^3-1}+\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-1}{\sqrt{2x^3-1}+\sqrt{x^3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^3-1}{x^3}}{\dfrac{\sqrt{2x^3-1}+\sqrt{x^3}}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^3}}{\sqrt{\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^6}}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\textbf{d)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+3x+2}{\sqrt{x^3+x^4}}=\frac{\infty}{\sqrt{\infty}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8x^2+3x+2}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^3+x^4}{x^4}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+3/x+2/x^2}{\sqrt{1/x+1}}=\frac{8}{\sqrt{1}}=\mathbf{8}$$

Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+4x-1})=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+4x-1}).(x+\sqrt{x^2+4x-1})}{(x+\sqrt{x^2+4x-1})}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(\sqrt{x^2+4x-1})^2}{x+\sqrt{x^2+4x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-4x-1}{x+\sqrt{x^2+4x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{x+\sqrt{x^2+4x-1}}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x+1}{x}}{\frac{x-\sqrt{x^2+4x-1}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}}=\frac{-4}{1+1}=-2$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x+31}-3x)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x+31}-3x).(\sqrt{4x^2+x+31}+3x)}{\sqrt{4x^2+x+31}+3x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x-1})^2-(3x)^2}{\sqrt{4x^2+x+31}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+x+31-9x^2}{\sqrt{4x^2+x+31}+3x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2+x+31}{\sqrt{4x^2+x+31}+3x}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{1}{x}+\frac{31}{x^2}}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{31}{x^4}}+\frac{3}{x}}=\frac{-5}{0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(4x-\sqrt{16x^2+2})=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x-\sqrt{16x^2+2}).(4x+\sqrt{16x^2+2})}{(4x+\sqrt{16x^2+2})}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(4x)^2-(\sqrt{16x^2+2})^2}{4x+\sqrt{16x^2+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2-16x^2-2}{4x+\sqrt{16x^2+2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{4x+\sqrt{16x^2+2}}=\frac{-2}{\infty+\infty}=\frac{-2}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-x+1}{\sqrt{x+4}-\sqrt{5}}=\frac{-1+1}{\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(-x+1)(\sqrt{x+4}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x+4}-\sqrt{5})(\sqrt{x+4}+\sqrt{5})}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(-x+1)(\sqrt{x+4}+\sqrt{5})}{x+4-5}=\lim_{x\to 1}\frac{(-x+1)(\sqrt{x+4}+\sqrt{5})}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-(x+1)(\sqrt{x+4}+\sqrt{5})}{x-1}=-(\sqrt{5}+\sqrt{5})=-2\sqrt{5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{(x^3-1)}}{x^2+3}=\frac{\sqrt{\infty}}{\infty}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{(x^3-1)}}{x^2}}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{(x^3-1)}{x^4}}}{\frac{x^2+3}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1/x-1/x^4}}{1+3/x^2}=\frac{\sqrt{0}}{1}=\frac{0}{1}=0$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{---} \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - 3^2}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+6-9}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(\cancel{x-3})}{(\cancel{x-3})\cdot(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{(\sqrt{x+6}+3)} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 1/3} \frac{3x^3-7x^2+5x-1}{3x^3+2x^2-7x+2} = \frac{3\cdot 1/27 - 7\cdot 1/9 + 5\cdot 1/3 - 1}{3\cdot 1/27 + 2\cdot 1/9 - 7\cdot 1/3 + 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{-----} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Factorización

$\underline{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -7 & 5 & -1 \\ 1/3 & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 3 & -6 & 3 & 0 \end{array} \longrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0; \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{6} = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$$

$3x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 3(x-1)^2 \cdot (x-1/3)$

$\underline{3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 2 & -7 & 2 \\ 1/3 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 3 & 3 & -6 & 0 \end{array} \longrightarrow 3x^2 + 3x - 6 = 0; \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{6} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 3(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-1/3)$

$$\lim_{x\to 1/3} \frac{\cancel{3}(x-1)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{(x-1/3)}}{\cancel{3(x-1)}\cdot(x+2)\cdot\cancel{(x-1/3)}} = \lim_{x\to 1/3} \frac{(x-1)}{(x+2)} = \frac{1/3-1}{1/3+2} = \frac{-2/3}{7/3} = \frac{-2}{7}$$

d) $\lim \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}\right) = \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty} = [\infty - \infty] =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})\cdot(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\cancel{\sqrt{x+3}})^{\cancel{2}} - (\cancel{\sqrt{x-3}})^{\cancel{2}}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x + 3 - (x-3)}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}} = \frac{6}{\infty + \infty} = \frac{6}{\infty} = 0$$

Calcular los siguientes limites

1)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+x}{x-3} - \frac{x^2+2}{x-1}\right) = [\infty\text{-}\infty]$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(5x^2+x)\cdot(x-1)-(x^2+2)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-5x^2+x^2-x-x^3+3x^2-2x+6}{x^2-x-3x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-x^2-3x+6}{x^2-4x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{4-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+6x^3}{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{4}{0} = \infty]$$

2)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+x)\cdot(x-1)-(x^2+2)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x-1)} = [\infty\text{-}\infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-3x+2)\cdot(x+3)-x^2\cdot 3x}{3x(x+3)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2-3x^2-9x+2x+6-3x^3}{3x^2+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3-7x+6}{3x^2+3x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2-\frac{7}{x^2}+\frac{6}{x^3}}{\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}} = \frac{-2}{0} = -\infty]$$

3)

$$\lim_{x\to\infty} \left(2x - \frac{4x^2-2x+7}{2x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x\,(2x+1)-(4x^2-2x+7)}{2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+2x-4x^2+2x-7}{2x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x-7}{2x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{4-\frac{7}{x}}{2+\frac{1}{4}} = \frac{4}{2} = 2]$$

4)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{6x^2+1}{2x+4} - \frac{9x^2-5}{3x+6}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(6x^2+1)-(3x+6)-(9x^2-5)\cdot(2x+4)}{(2x+4)\cdot(3x+6)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{18x^2+36x^2+3x+6-18x^3-36x^2+10x+20}{6x^2+12x+12x+24} = \lim_{x\to\infty} \frac{13x+26}{6x^2+24x+24} =$$

$$= [\frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{13}{x}+\frac{26}{x}}{6+\frac{24}{x}+\frac{24}{x^2}} = \frac{0}{6} = 0]$$

Contesta a las siguientes cuestiones:

a) Si una función es continua en un punto, ¿es derivable en dicho punto? Razona la respuesta.
b) Estudia la continuidad y derivabilidad de f (x) en x = 1

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 5 & \text{si } x \le 1 \\ -2x^2 + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

PAU.

a) Si f (x) es continua en x_0 no implica que sea derivable en dicho punto ya que para que sea derivable es necesario que f' (x) sea continua en x_0

b) ¿Continua en x = 1?

$f(1) = -4 \cdot 1 + 5 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} (-2x^2 + 3) = -2 + 3 = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (-4x + 5) = -4 + 5 = 1 \end{array}\right\} \quad l_1 = l_2 \quad \exists \lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$$

continua en x = 1

¿Derivable en x = 1?

$$f'(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x \le 1 \\ -4x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f'(x) = -4$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} (-4x) = -4 \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (-4) = -4 \end{array}\right\} \quad l_1 = l_2 \quad \exists \lim_{x \to 1} f'(x) = -4 = f'(1)$$

f '(x) continua en x = 1 →
→ f (x) es derivable en x = 1

Contesta a las siguientes cuestiones:

1.-¿En qué punto de la curva de ecuación $F(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ tiene una tangente horizontal?.

2.- ¿Es posible que dicha curva tenga una tangente paralela a la recta $3x - 3y + 7 = 0$ en algún punto de la abscisa negativa?.

1.- ¿ x_0?.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+4)-(x^2-4)2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^3+8x-2x^3+8x}{(x^2+4)^2} = \frac{16x}{(x^2+4)^2} \rightarrow$$

$f'(x_0) = 0;\ 16\,x_0 = 0\,;$ $\underline{\boldsymbol{x_0 = 0}}$ tg horizontal

2.-

$-3y + 7 = 0\,; 3y = 3x + 7; y = x + \frac{7}{3} \rightarrow m_r = 1$

$$m_t = m_r = 1 \rightarrow \frac{16x_0}{({x_0}^2+4)^2} = 1\,; 16x_0 = ({x_0}^2 + 4)^2$$

$\nexists\ x_0\ cuya\ tg\ sea\ paralela\ a\ la\ recta$

Dada $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+2}, & x < -2 \\ 2 & x = -2 \\ 2x+6, & x > 2 \end{cases}$ **a) ¿ $f(x)$ es continua en toda la recta real? b) dibujar la grafica**

(-∞, -2) $f(x) = -\frac{1}{x+2}$ Dominio: $\forall x \ni (-\infty, -2) \cup (-2, \infty) \to (-\infty, -2)CD$
$\to f(x)$ está definida en $(-\infty, -2) \to f(x)$ es continua en $(-\infty, -2)$

x = - 2 $\begin{cases} f(-2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to (-2)^-} -\frac{1}{x+2} = \frac{-1}{0} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to (-2)^+} 2x+6 = 2 \end{cases}$ $L_1 \neq L_2 = f(-1) \to \nexists \lim_{x \to (-2)} f(x) \to$
$f(x)$ es discontinua en X= - 2 Discontinua no evitable de 2ª especie

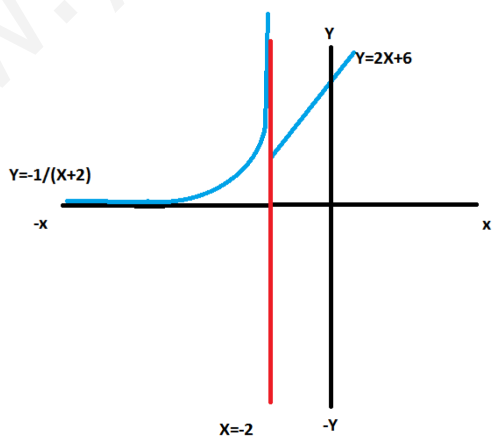
(-2,∞) $f(x) = 2x + 6$ Dominio: $\forall x \ni (-\infty, \infty) \to (-2, \infty)CD$
$\to f(x)$ está definida en $(-2, \infty) \to f(x)$ es continua en $(-2, \infty)$

$(-\infty, -2)$ $y = -\frac{1}{x+2}$

X	Y
-∞	0
-4	½
-3	1
-2	±∞

$(-2, \infty)$ $y = 2x + 6$

X	Y
0	6
-2	2
2	10



$$\boldsymbol{Dada\ f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^2 - 9} & \boldsymbol{x < -3} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3 \leq x < 0} \\ \boldsymbol{\frac{1}{x-1}} & \boldsymbol{x \geq 0} \end{cases}$$ **¿$f(x)$ es continua en toda la recta real?**

(-∞, -3) $\quad f(x) = x^2 - 9$ Dominio: $\forall x \in R \rightarrow (-\infty, -3) \subset$ D
$\rightarrow f(x)$está definida en $(-\infty, -3) \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, -3)$

x = - 3 $\begin{cases} f(-3) = 1 \\ \lim_{x \to (-3)^-} x^2 - 9 = 9 - 9 = 0 \\ \lim_{x \to (-3)^+} 1 = 1 \end{cases}$ $\quad$ L1 $\neq$ L2 $= f(-3) \rightarrow \nexists \lim_{x \to (-3)} f(x) \rightarrow$

$f(x)$es discontinua en X = - 3. $\quad$ Discontinua no evitable de 1ª especie

(-3,0) $\quad f(x) = 1$ $\quad$ Dominio: $\forall x \in R \rightarrow (-3, 0) \subset$ D
$\rightarrow f(x)$está definida en $(-3, 0) \rightarrow f(x)$ es continua en $(-3, 0)$

x = 0 $\begin{cases} f(0) = \frac{1}{-1} = -1 \\ \lim_{x \to (0)^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \to (0)^+} \frac{1}{x-1} = -1 \end{cases}$ $\quad$ L1 $\neq$ L2 $= f(0) \rightarrow \nexists \lim_{x \to (0)} f(x) \rightarrow$

$f(x)$es discontinua en X=-0 $\quad$ Discontinua no evitable de 1ª especie

(0,∞) $\quad f(x) = \frac{1}{x-1}$ Dominio: $\forall x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ No $\subset$ D

$f(x)$es discontinua en $(-2, \infty)$ $\quad$ ya que en X = 1 $\begin{cases} f(1) = \frac{1}{0} = no\ est\acute{a}\ definido \\ \lim_{x \to (1)^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = -\infty \\ \lim_{x \to (1)^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = +\infty \end{cases}$

$$\nexists \lim_{x \to (1)} f(x) \rightarrow$$

$f(x)$es discontinua en x = 1. Discontinua no evitable de 2ª especie

Dada la función $\mathbf{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ ax^3 + bx & \text{si } -1 < x < 2 \\ 11x - 16 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}}$ **Se pide:**

a) Hallar a y b para que la función sea continua en todo x real.
b) Analizar su derivabilidad.
c) Representar la gráfica.

a) En $(-\infty, -1]$ $y = 0$ es f. constante => continua en R
En $(-1, 2)$ $y = ax^3 + bx$ es f. polinómica $\forall a, b$ => continua en R
En $(2, \infty)$ $y = 11x - 16$ es una recta continua en R

$$x = -1 \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^+} (ax^3 + bx) = -a - b \\ \lim\limits_{x \to -1^-} 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow l_1 = l_2 \Rightarrow -a - b = 0$$

$$x = 2 \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} (11x - 16) = 22 - 16 = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (ax^3 + bx) = 8a + 2b \end{cases} \Rightarrow l_1 = l_2 \Rightarrow 8a + 2b = 6 \Rightarrow 4a + b = 3$$

$$\begin{cases} -a - b = 0 \\ 4a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow 3a = 3\ ;\ a = 1 \quad y \quad b = -a \Rightarrow b = -1$$

Para $a = 1$ y $b = -1$ la $f(x)$ es continua en R

b) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 - x & \text{si } -1 < x < 2 \\ 11x - 16 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x^2 - 1 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 11 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

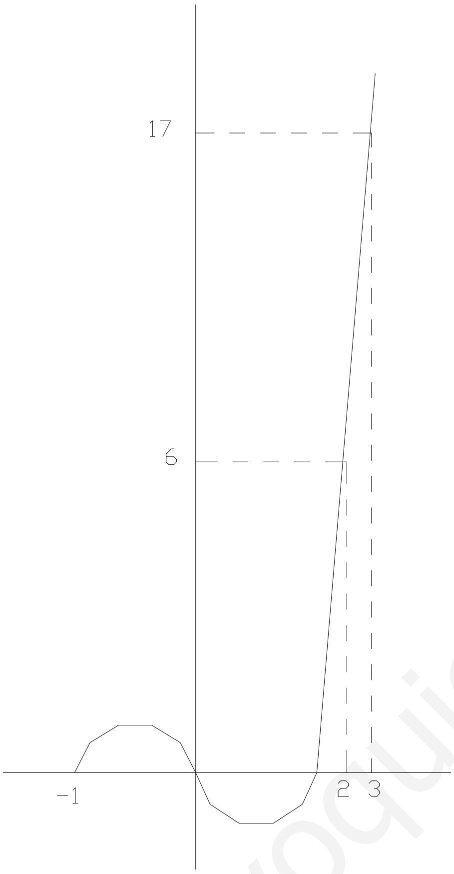
Las tres funciones f '(x) en cada intervalo son continuas ya que dos son funciones continuas y la otra un polinomio de 2º grado.

$$\text{En } x = -1 \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^+} 3x^2 - 1 = 3 - 1 = 2 \\ \lim\limits_{x \to -1^-} 0 = 0 \end{cases} \quad l_1 = l_2 \ \nexists \lim_{x \to -1} f'(x) \Rightarrow f'(x) \text{ no es continua} \Rightarrow f(x) \text{ no es derivable}$$

En $x = 2$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} 11 = 11 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (3x^2 - 1) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11 \end{cases}$ $l_1 = l_2 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to 2} f'(x) = f'(2) = 11$

$f'(x)$ es continua $\Rightarrow$ $f(x)$ es derivable

c)



$y = x^3 - x$ $\quad y' = 3x^2 - 1$; $y' = 0$; $3x^2 - 1 = 0$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{max y min}$$

x	y
-1	0
0	0
1	0
2	6

$y = 11x - 16$

x	y
2	6
3	17

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x-3 & x \le 0 \\ -ax+b & 0 < x \le 1 \\ 5 & x > 1 \end{cases}$

a) **Determinar a y b para que f(x) sea continua**
b) **Para dichos valores estudiar su derivabilidad**

Como las f(x) son $\forall a, b$ perteneciente a todo R, funciones polinomicas de grado 1 o 0 podemos decir que f(x) es continua en $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$

$$x = 0 \begin{cases} f(0) = 0 - 3 = -3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (-ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (x - 3) = -3 \end{cases}$$

$b = -3$ existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ f(x) es continua en x=0

$$x = 1 \begin{cases} f(1) = -a + b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (5) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (-ax + b) = -a + b \end{cases}$$

$5 = -a + b$; $5 = -a - 3$; $a = -8$ existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

f(x) es continua en x = 1

si $f(x) = \begin{cases} x - 3 & x \le 0 \\ 8x - 3 & 0 < x \le 1 \\ 5 & x > 1 \end{cases} \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ 8 & 0 < x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$

$$x = 0 \begin{cases} f'(0) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 8 = 8 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1 \end{cases}$$

$L_1 \neq L_2 \rightarrow$ f'(x) no es continua $\rightarrow$ f(x) no es derivable en x = 0

no existe $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$

$$x = 1 \begin{cases} f'(1) = 8 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} 8 = 8 \end{cases}$$

$L_1 \neq L_2 \rightarrow$ f'(x) no es continua $\rightarrow$ f(x) no es derivable en x = 1

no existe $\lim\limits_{x \to 1} f'(x)$

Derivar las siguientes funciones y calcular la ecuación de la recta tangente e ellas en el punto de abcisa x = 0

1) $f(x) = e^{2x} \Rightarrow \quad y' = 2\cdot e^{2x}$; $y_0 = e^0 = 1 \quad y'(0) = 2\cdot e^0 = 2$

$y - 1 = 2\cdot(x - 0)$

2) $f(x) = \ln(x + 2) \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{x + 2}$; $y_0 = \ln 2 \quad y'(0) = ½$

$y - \text{Ln } 2 = ½\,(x - 0)$

3) $f(x) = \dfrac{7}{x - 7} \Rightarrow y' = \dfrac{-7}{(x - 7)^2}$; $y_0 = -1 \quad y'(0) = -1/7$

$y + 1 = -\dfrac{1}{7}(x - 0)$

4) $f(x) = e^x \cdot (x + 1) \Rightarrow \quad y' = e^x \cdot (x + 1) + e^x = e^x \cdot (x + 2)$

$y_0 = e^0 \cdot(0+1) = 1 \qquad y'(0) = e^0 \cdot(0+2) = 2$

$y - 1 = 2(x - 0)$

5) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \dfrac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$

$y_0 = 0 \qquad y'(0) = -1 \qquad y - 0 = -1\cdot(x - 0)$

6) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x} \Rightarrow \quad y' = \dfrac{2x \cdot x - (x^2 + 4)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$

$y_0 = 4 / 0$ No existe.

Estudia la continuidad de las funciones :

a) $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ **b)** $\dfrac{5x-5}{x^2-1}$

Para que sea continua , basta con que este definida.

a) El cociente esta definido en R excepto las x que anulan el denominador, que en este caso es <u>x = -1</u>

La función será continua en D = ¥ x $\epsilon(-\infty,-1) \cup (-1, \infty)$

En x = - 1 la f (x) es discontinua de segunda especie por ser sus limites laterales $\pm\infty$

b) Aquí el dominio es R excepto las x que hagan $x^2 - 1 = 0$, es decir, $x = \pm 1$

La $y = \dfrac{5x-5}{x^2-1}$ será continua en D : ¥ x $\epsilon(-\infty,-1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

En x = -1 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5x-5}{x^2-1} = \dfrac{-10}{0} = -\infty$ discontinua de segunda especie pues no existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

En x = 1 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x-5}{x^2-1} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{5}{2}$

Discontinua evitable pues existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ pero $f(1) = \dfrac{0}{0}$ no esta definida

Estudia razonadamente la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 \le x < 4 \\ 5 & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$

$$x = 2 \begin{cases} f(2) = 2(2) - 1 = 3 \\ \lim_{x \to 2^+}(2x-1) = 3 \\ \lim_{x \to 2^-}(x^2+1) = 5 \end{cases}$$

L1 ≠ L2 ; NO EXISTE $\lim_{x \to 2} f(x)$
f(x) no es continua en x = 2

$$x = 4 \begin{cases} f(4) = 5 \\ \lim_{x \to 4^+}(5) = 5 \\ \lim_{x \to 4^-}(2x-1) = 7 \end{cases}$$

L1 ≠ L2 ; NO EXISTE $\lim_{x \to 4} f(x)$
f(x) no es continua en x = 4

En x ε (- ω, 2) $y = x^2 + 1$ es continua por ser una parabola.
En x ε (2, 4) $y = 2x - 1$ es continua por ser una recta.
En x ε (4, ω) $y = 5$ es continua por ser una función <u>constante.</u>

Estudia la derivabilidad de la función

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{en } x = 0}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \text{sen } x = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0) \quad \Rightarrow \quad \text{continua en } x = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y'(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1 \\ y'(0^-) &= \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \end{aligned}$$

No coinciden las derivadas laterales en x = 0 luego la f(x) no es derivable en x = 0

Aunque si sea continua en x = 0

Estudia la derivabilidad de la función

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} -1 & \text{Si } x = 0 \\ \dfrac{2x \cdot (x-3)}{3x^2 - 9x} & \text{Si } 0 < x < 3 \\ 2/3 & \text{Si } x = 3 \end{cases}}$$

Para que una función sea derivable es necesario que primero sea continua.

La función para todo x distinto de 0 y de 3 es continua por ser cociente de dos polinomios que solo se anulan en estos dos valores 0 y 3.

Estudiemos la continuidad en x = 3 calculando los limites laterales y f(3).

$$f(3) = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x \cdot (x - 3)}{3x \cdot (x - 3)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 3} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = f(3)$$

La función es continua en x = 3. Para ver si es derivable deberemos calcular su derivada y ver si es continua en x = 3

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(4x - 6) \cdot (3x^2 - 9x) - (2x^2 - 6x) \,.\, (6x - 9)}{(3x^2-9x)^2} = 0 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$f'(3) = 0$; $\lim_{x \to 3} f'(x) = 0 = f'(3)$ Como la f ´ (x) si es continua en x = 3 esto nos dice que la f (x) si es derivable en x = 3

Estudiemos la continuidad de f (x) en x = 0 , f (0) = - 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot (x - 3)}{3x \cdot (x - 3)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \neq f(0)$$

La f(x) no es continua en x = 0, por lo que tampoco será derivable para x = 0.

Estudiar la continuidad de $f(x)$ en toda la recta real:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2x+1} & x\le -1\\ x^2+2 & x>-1\end{cases}$$

(-∞, -1) $f(x)=\frac{x^2}{2x+1}$ Dominio: $\forall x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\ \infty\right) \to (-\infty,-1) \subset D$
$\to f(x)$está definida en $(-\infty,-1) \to f(x)$es continua en $(-\infty,-1)$

x = - 1 $\begin{cases} f(-1)=\frac{(-1)^2}{2(-2)+1}=-1 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{x^2}{2x+1}=-1 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} x^2+2=-1\end{cases}$ $\mathrm{L1}=\mathrm{L2}=f(-1) \to \exists \lim_{x\to(-1)} f(x)=-1 \to$

$f(x)$ es continua en x = - 1

(-1,∞) $f(x)=x^2+2$ Dominio: $\forall x \ni (-\infty,\infty) \to (-1,\infty)\mathrm{CD}$
$\to f(x)$está definida en $(-1,\infty) \to f(x)$es continua en $(-1,\infty)$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x \leq -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x^2-3x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$(-\infty,-1)$ f. polinómica de grado 1 ➔ f(x) continua en R

$(-1,1)$ f. constante ➔ f(x) continua en R

$(1, \infty)$ f. polinómica de grado 2 ➔ f(x) continua en R

En $x = -1$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^+} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to -1^-} (3x+5) = -3+5 = 2 \end{cases}$ $L_1 = L_2$ ➔ existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$ ➔ f(x) es continua en x = - 1

En $x = 1$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2-3x+1) = 1-3+1 = -1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} 2 = 2 \end{cases}$ $L_1 \neq L_2$ ➔ No existe lim f(x) ➔ f(x) no es continua en x = 1

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2x-3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En los 3 intervalos la f '(x) es continua en R por ser 2 f. continuas y una f. polinómica de grado 1 ➔ f(x) es derivable.

En $x = -1$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^+} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^-} 3 = 3 \end{cases}$ $L_1 \neq L_2$ ➔ No existe $\lim\limits_{x \to -1} f'(x)$

f '(x) no es continua ➔ f(x) no es derivable

En x = 1 f(x) no es derivable por no ser continua

Estudiar las discontinuidades si existen de la f(x)

$$
\mathbf{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2 + 2} & \mathbf{x > 1} \\ \mathbf{3x} & \mathbf{0 \le x \le 1} \\ \mathbf{½\, x} & \mathbf{-1 < x < 0} \\ \mathbf{3x} & \mathbf{x = -1} \\ \mathbf{x^2 - 3/2} & \mathbf{x < -1} \end{cases}
$$

Los puntos conflictivos son: x= -1, x= 0 y x= 1

$$
x = -1 \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+} ½\, x = -1/2 \end{cases}
$$

$$
\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} x^2 - 3/2 = (-1)^2 - 3/2 = -1/2 \qquad l_1 = l_2
$$

Los limites laterales coinciden luego como f(-1) = - 3 la discontinuidad es evitable con solo definir el valor -1/2 para x = - 1

$$
x = 0 \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 3x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} ½\, x = 1/0 = \infty \end{cases}
$$

Falta um limite lateral al no exitir luego hay una discontinuidad de 2º espécie com salto infinito único pues f(0)= 0 coincide com el otro limite lateral.

$$
x = 1 \begin{cases} \operatorname{Lim}\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 + 2 = 1+2 = 3 \\ \operatorname{Lim}\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 3x = 3 \end{cases}
$$

Los limites laterales coinciden y además coinciden con f(1) = 3 luego f(x) es continua en x= 1

Halla a y b para que la función f(x) sea continua y derivable para todo x real.

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x \le 1} \\ \mathbf{-x^2 + ax + b} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x > 1} \end{cases}$$

$(-\infty, 1)$ $y = x^2$ es continua en R por ser una función polinómica de grado 2 ➔ continua en $(-\infty, 1)$ C R.

$(1, \infty)$ $y = -x^2 + ax + b$ $\forall$ a, b $\in$ R, f(x) es continua en R por ser una función polinómica de grado 2 ➔ continua en $(1, \infty)$ C R.

$$x = 1 \quad \begin{cases} f(1) = 1^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (-x^2 + ax + b) = -1 + a + b \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 + a + b = 1 \\ \underline{a + b = 2} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2x + a & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$(-\infty, 1)$ f '(x) = 2x es continua en R por ser una función polinómica de grado 1 ➔ continua en $(-\infty, 1)$ C R ➔ f (x) derivable en $(-\infty, 1)$

$(1, \infty)$ f '(x) = - 2x + a $\forall$ a $\in$ R, f '(x) es continua en R por ser una función polinómica de grado 1 ➔ continua en $(1, \infty)$ C R ➔ f'(x) derivable en $(1, \infty)$

$$x = 1 \quad \begin{cases} f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (-2x + a) = -2 + a \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (2x) = 2 \end{cases} \quad -2 + a = 2 \,;\ \underline{a = 4}$$

$a + b = 2; \quad 4 + b = 2; \quad \underline{b = -2}$

Hallar los valores de a y b para que la función sea continua:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2 + 3} & \textbf{si} \quad \mathbf{x < 0} \\ \mathbf{ax + b} & \textbf{si} \quad \mathbf{0 \le x \le 2} \\ \mathbf{x^3 - 1} & \textbf{si} \quad \mathbf{2 < x} \end{cases}$$

$(-\infty, 0)$ $y = x^2 + 3$ es continua en R por ser un polinomio de grado 2 ➔ f(x) es continua en $(-\infty, 0)$

$(0,2)$ $y = ax + b$ es continua en R $\forall$ a ,b ε R por ser un polinomio de grado 1 o de grado 0 ➔f(x) es continua en $(0,2)$

$(2, \infty)$ $y = x^3 - 1$ es continua en R por ser un polinomio de grado 3 ➔ f(x) es continua en $(2, \infty)$

$$x = 0 \begin{cases} f(0) = a \cdot 0 + b = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 + \mathbf{3} = 3 \end{cases} \quad \left\{ l_1 = l_2 \qquad \mathbf{b=3} \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 3 = f(0) \text{ es continua en } x = 0 \right.$$

$$x = 2 \begin{cases} f(2) = 2a + b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x^3 - 1) = 7 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (ax + b) = 2a + b \end{cases} \quad \begin{cases} l_1 = l_2 \qquad 7 = 2a + 3;\ 4 = 2a : \ \mathbf{a = 2} \\ \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 7 = f(2) \text{ es continua en } x = 2 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica y = Ln x , en los puntos a) x = 1; b) x = e

La recta tangente es $y - yo = m_t\ (x - xo)$

a) $x_o = 1 \quad y_o = \text{Ln}1 = 0 \ ; \ m_t = y'(0) = \dfrac{1}{0} = \infty$

tag : $y - 0 = \dfrac{1}{0}\ (x - 1)\ ; \quad x - 1 = 0\ ; \quad x = 1$

b) $x_o = e\ ; \ y_o = \text{Ln}\ e = 1\ ; \ m_t = y'(e) = \dfrac{1}{e}\ ;$

tag : $y - 1 = \dfrac{1}{e}(x - e)\ ; \quad y = \dfrac{1}{e} \cdot x - 1 + 1\ ; \ y = \dfrac{1}{e} \cdot x$

La $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \forall\, x \neq 3 \\ a & x = 3 \end{cases}$ **Hallar el valor de a para que f(x) sea continua en x = 3.**

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 3} \frac{(x + 3)\cancel{(x - 3)}}{\cancel{x - 3}} = 6$$

Si obligo a que f(3) = 6 la f(x) será continua, luego para a = 6 ➔ mi f(x) será continua $\forall x \in R$

La función definida por $f(x) = \begin{cases} x^3 - ax^2 - 2 & \text{si } x < 3 \\ x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ **es continua en R. Hallar el valor de a**

Si queremos que $f(x)$ sea continua en R es necesario que **:**

En $(-\infty,3)$ y= $x^3 - ax^2 - 2$ es continua ∀ a por ser función polinómica

En $(3,\infty)$ y = x + 4 es continua ∀ a por ser función polinómica

$$\text{En } x = 3 \begin{cases} \lim_{x \to 3^+} x + 4 = 7 \\ \\ \lim_{x \to 3} (x^3 - ax^2 - 2) = 27 - 9a^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \text{ Para que sea continua } l_1 = l_2$$

$$\Rightarrow \quad 7 = 27 - 9a^2 - 2; \quad 9a^2 = 18; \quad a^2 = 2; \quad a = \pm\sqrt{2}$$

Solo para $a = \pm\sqrt{2}$ podemos asegurar que $f(x)$ es continua en R , para los demás valores de a , los limites laterales de $f(x)$ en x= 3 seran distintos y existiran discontinuidades de primera especie

Probar que la ecuación: $x^3 + 2x^2 - x - 4 = 0$ tiene al menos una raíz real en el intervalo (1,2)

Si llamamos $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$, lo que nos esta pidiendo es que aseguremos que existe al menos un xo (1,2) tal que f(xo) = 0 es decir que f(x) corte al eje OX en al menos un punto del intervalo.

Esto es la tesis del Teorema de Bolzano y para que se verifique, se deben cumplir las dos hipótesis del Teorema.

a) Que f(x) sea continua en [1,2].

Por ser f(x) una función continua en R ya que es una f.polinómica de grado 3, se puede asegurar que es continua en [1,2] C R.

b) Que signo f(b) ≠ signo f(a)

$f(1) = 1^3 + 2.1^2 - 1 - 4 = -2 < 0$
$f(2) = 2^3 + 2.3^2 - 2 - 4 = 10 > 0$ signo f(1) ≠ signo f(2)

Al verificar las hipótesis, Bolzano asegura que f(xo) = 0 para al menos un xo $\in(1,2)$ → $x^3 + 2x^2 - x - 4 = 0$ tiene al menos una raíz real en (1,2).

$$\textbf{Sea la f(x) =}\begin{cases} \sin x & \textbf{si} \geq {}^{n}/_{2}\,\mathbf{x} \leq {}^{-n}/_{2} \\ \mathbf{m.}\ \sin x + n & \textbf{si}\ \ {}^{-n}/_{2} < x < {}^{n}/_{2} \\ 2\cos x & \textbf{si}\ \ \mathbf{x} \end{cases}$$

Hallar m y n para que f(x) sea continua $\forall x \in R$

En ($-\infty, -{}^{n}/_{2}$) y = sin x es continua por ser sinusoidal.

En (${}^{-n}/_{2}$, ${}^{n}/_{2}$) y = m sin x + n por ser suma de una sinusoidal y una constante, será continua $\forall m, n$.

En (${}^{n}/_{2}$,∞) y = cos x es continua por ser función sinusoidal.

En x = ${}^{-n}/_{2}$
$$\begin{cases} f({}^{-n}/_{2}) = \sin {}^{-n}/_{2}) = -1 \\ \lim_{x\to -{}^{n}/_{2+}} f(x) = \lim_{x\to -{}^{n}/_{2}} (m\, sinx + n) = \text{m.sin}(\frac{-n}{2}) + n = -m + n \\ \lim_{x\to -{}^{n}/_{2-}} f(x) = \lim_{x\to -{}^{n}/_{2-}} \sin x) = \sin({}^{-n}/_{2}) = -1 \end{cases}$$

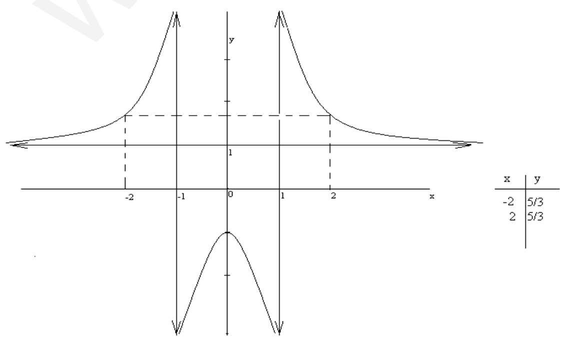
Para que sea continua $L_1 = L_2 = f({}^{-n}/_{2})$ => **- m + n = - 1**

En x = ${}^{n}/_{2}$
$$\begin{cases} f({}^{n}/_{2}) = 2\cos\frac{n}{2} = 2.0 = 0 \\ \lim_{x\to {}^{n}/_{2+}} f(x) = \lim_{x\to {}^{n}/_{2+}} (2\cos x) = 2\cos\frac{n}{2} = 0 \\ \lim_{x\to {}^{n}/_{2-}} f(x) = \lim_{x\to {}^{n}/_{2-}} (m\sin x + n) = m\sin\frac{n}{2} + n = m + n \end{cases}$$

Para que sea continua $L_1 = L_2 = f(\frac{n}{2})$ => **0 = m + n**

$$\begin{matrix} -m + n = -1 \\ m + n = 0 \end{matrix} \begin{cases} 2n = -1 ; \quad n = \frac{-1}{2} \\ m - \frac{1}{2} = 0; \quad m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

La función f(x) = $\begin{cases} \sin x & x \leq {}^{-n}/_{2} \\ \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} & {}^{-n}/_{2} < x < {}^{n}/_{2} \\ 2\cos x & x \geq {}^{n}/_{2} \end{cases}$ ES CONTINUA $\forall X \in R$



Sea la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si } 2 < x \leq 2 \end{cases}$

a) ¿Es continua? ¿En que puntos? Dibuja la grafica.
b) Comprueba que existe un punto c ε [0, 3] tal que f(c) = 0.
¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

De [0, 2] $y = -x^2 + 1$ es continua por ser una parábola.
De (2, 3] $y = x - 1$ es continua por ser una recta.

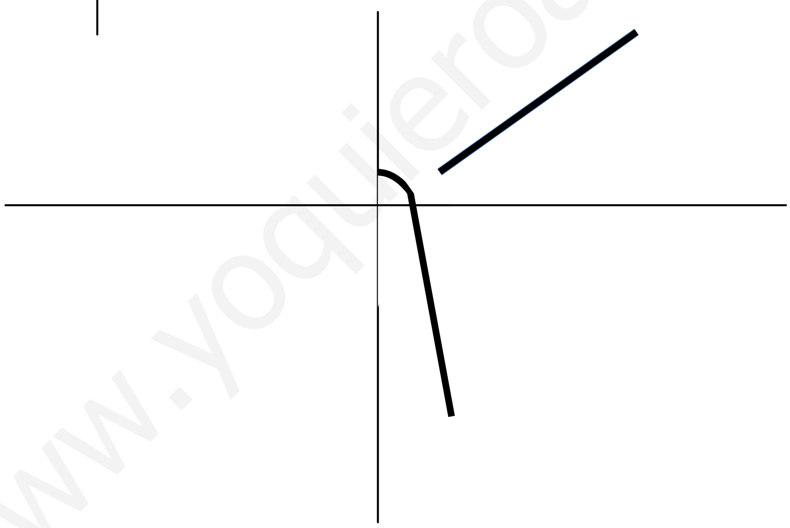
En x = 2 $\left\{ \begin{array}{l} f(2) = -2^2 + 1 = -3 \\ \lim_{x\to 2^+}(x-1) = 2-1 = 1 \\ \lim_{x\to 2^-}(-x^2+1) = -3 \end{array} \right\}$ L1 ≠ L2 ; NO EXISTE $\lim_{x\to 2} f(x)$; f(x) no es

$y = -x^2 + 1$

x	y
0	1
1	0
2	-3

$y = x - 1$

x	y
2	1
3	2



EXISTE x = 1 ε [0, 3] / f(1) = 0 , pero no se verifica Bolzano porque f(x) no es continua en [0, 3] pues falla en x = 2 ⟹ no se puede asegurar que EXISTA x_0 **ε** (a, b) / $f(x_0) = 0$ pero no lo puede negar.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^3 - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Estudiar si es derivable en x=1.
¿En qué puntos es derivable?
Hallar f´(x) .

$$f'_{(x)} = \begin{cases} -2 & x \leq 1 \\ 9x^2 & x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to1^+} 9x^2 = 9 \\ \lim_{x\to1^-} (-2) = -2 \end{array}\right\} \quad L_1 \neq L_2 \quad \nexists \lim_{x\to1} f'_{(x)}$$

La $f'_{(x)}$ no es continua en $x = 1$ $\Rightarrow$ $f_{(x)}$ no es derivable en $x = 1$

Si será derivable para $\forall x \in (-\infty,1)$ donde $f'_{(x)} = 2$ si es continua por ser constante.

También será derivable para $\forall x \in (1, \infty)$ donde $f'_{(x)} = 9x^2$ si es continua por ser una función polinómica.

Se sabe que la función f(x) = $\begin{cases} \mathbf{b}x^2 + \mathbf{ax} & \textbf{si } \mathbf{0} \le x \le 2 \\ \mathbf{c} + \sqrt{x-1} & \textbf{si } \mathbf{2} < x \le 5 \end{cases}$

Es derivable en (0,5) y además verifica que f(0) = f(5). ¿Cuánto valen a, b y c?

Para que sea derivable, antes debe ser continua:

Continua en x=2

F(x) = $\begin{cases} bx^2 + ax & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ c + \sqrt{x-1} & \text{si } 2 < x \le 5 \end{cases}$

x = 2

$\lim_{x\to 2+} c + \sqrt{x-1} = c + 1$

$\lim_{x\to 2-} bx^2 + ax = 4b + 2a$

=> **c + 1 = 4b + 2a**

Derivable en x = 2

F'(x) = $\begin{cases} 2bx + a & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } 2 < x \le 5 \end{cases}$

x = 2

$\lim_{x\to 2+} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}$ L$_1$ =

L$_2$

$\text{Lim}_{x\to 2-} 2bx + b = 4b + a$

=> **4b + a =** $\frac{1}{2}$

Además f(0) = f(5) => $\begin{cases} f(0) = b \cdot 0^2 + a \cdot 0 = 0 \\ f(5) = c + \sqrt{5-1} = c + 2 \end{cases}$

c + 2 = 0 **c = - 2**

$\begin{cases} -1 = 4b + 2a \\ \frac{1}{2} = 4b + a \end{cases}$ $\frac{3}{2}$ **= a**

b = - $\frac{1}{4}$

Una función f (x) viene definida de la siguiente manera :

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad 1 < x \\ 1/2 & \text{si} \quad x = 1 \\ -(x-1)^2 + 1 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}}$$

¿Es continua en R?

$(-\infty, 1)$ $y = x - 1$ es continua en R por ser un polinomio de grado 1 ➔ f (x) es continua en $(-\infty, 1)$

$(1, \infty)$ $y = -x + 2x$ es continua en R p $x_{\to 1}$ por ser un polinomio de grado 2 ➔ f (x) es continua en $(1, \infty)$

$$x = 1 \begin{cases} f(1) = 1/2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} [-(x-1)^2 + 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (x - 1) = 0 \end{cases} \quad \Big\{ \quad l_1 \neq l_2 \quad \text{no existe} \lim\limits_{x \to 1} f(x)$$

Discontinua de 1 ª especie con doble salto finito

$$\boldsymbol{Sea\ f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^2 + 2x} & \boldsymbol{x \leq 0} \\ \boldsymbol{\frac{1}{x}} & \boldsymbol{0} < x < 1 \\ \boldsymbol{Ln\ x} & \boldsymbol{x} \geq 1 \end{cases} \quad , \boldsymbol{a)\ Repres\acute{e}ntala\ gr\acute{a}ficamente} \ ,$$

$b)$ *Estudia la continuidad y* derivabilidad de f(x) en los puntos x = 0 y x = 1.

a)

$(-\infty, 0)$; $y = x^2 + 2x$

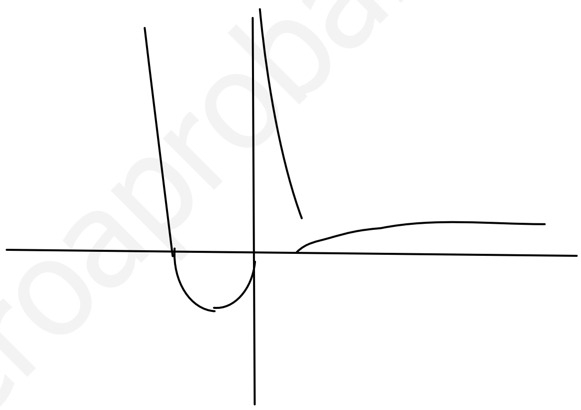
x	y
0	0
-1	-1
-2	0
-3	3

$(0, 1)$; $y = \frac{1}{x}$

x	y
0	∞
½	2
1	1

$(1, \infty)$; y = L x

x	y
1	0
2	0'67
.	.
∞	∞



b)

$$x = 0 \begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2 + 2x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{0} = \infty \end{cases} \Rightarrow L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

f(x) discontinua no evitable de 2ª especie

$$x = 1 \begin{cases} f(1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (Ln\ x) = Ln\ 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

f(x) discontinua no evitable de 1ª especie

c) $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x \leq 0 \\ -\frac{1}{x^2} & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$ Como en x = 0 y en x = 1 , la f)x) no es continua, podemos asegurar que tampoco es derivable en x = 0 ni en x = 1

$a)$ ***Hallar la ecuacion de la recta tangente a*** $y = \frac{x}{1-x^2}$ ***, que es paralela a la recta*** $3x - 3y - 2 = 0$; $b)$ ***Hallar la ecuacion de la recta tangente a*** $y = L(2x+1)$ ***en el punto de abcisa*** $x = \frac{1}{2}$ ***,*** $c)$ ***calcular asindotas y cortes con los ejes de*** $y = \frac{x}{1-x^2}$

a) $y = \frac{x}{1-x^2}$ *Como la tangente es paralela a* $3y = 3x - 2 \Rightarrow y = x - \frac{2}{3}$

$$m_r = 1 = m_t$$

$$y' = \frac{1 - x^2 - x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} \Rightarrow y'(x_0) = m_t$$

$$\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} = 1 \ ; \ x^2 + 1 = (1-x^2)^2 \ ; \ x^2 + 1 = 1 - 2x^2 + x^4 \ ; \ x^4 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x^2-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \ ; \ x_o = 0 \Rightarrow y_o = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \ ; \ x_o = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y_o = \mp\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Hay tres tangentes $\begin{cases} y - 0 = 1\cdot(x-0) \\ y + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot(x-\sqrt{3}) \\ y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot(x+\sqrt{3}) \end{cases}$

b) $y = Ln(2x+1)$ en $x_o = \frac{1}{2}$; $y_o = Ln\,2$

$$y' = \frac{2}{2x+1} \ ; \ m_t = y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y - Ln\,2 = 1\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$c)$ *Como* $1 - x^2 = 0$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1$

$$AV: \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$AH: \ y = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow y = 0$$

AO: $\nexists$ *Asindota oblicua, la* $m = 0$

$$\textit{Corte eje OX} \begin{cases} y = \frac{x}{1-x^2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \ \ \textit{corte en } (0,0)$$

$$\textit{Corte eje OY} \begin{cases} y = \frac{x}{1-x^2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \ \ \textit{corte en } (0,0)$$

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{sen\,x} & \mathbf{x \leq 0} \\ \mathbf{ax + b} & \mathbf{x > 0} \end{cases}$$ **. Hallar a y b para que sea derivable en x = 0**

$$x = 0 \ : \begin{cases} f'(0) = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} (\text{sen x}) = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} (ax + b) = b \end{cases} \quad L_1 = L_2 \quad b = 0 \ ; \ \exists \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

Es continua para x = 0

Escriba aquí la ecuación.

$$f'(x) \begin{cases} \text{Cosx} & x \leq 0 \\ a & x > 0 \end{cases}$$

x=0
$$\begin{cases} f'(0) = 1 \\ \lim_{x\to 0}(cosx) = 1 \\ \lim_{x\to 0}(a) = a \end{cases} \quad L1=L2 \quad \exists\lim_{x\to 0} f'(x) \rightarrow f'(0) \quad a=1$$

$f'(x)$ Es continua en x=0 y f(x) derivable en x=0

F(x)= $\begin{cases} \mathbf{ax^2 + 1} & \mathbf{x<1} \\ \mathbf{x^2 + bx + 3} & \mathbf{x\geq 1} \end{cases}$ **Determina a y b para que sea derivable en x=1**

x=1
$$\begin{cases} f(1) = 1+b+3 = b+4 \\ \lim_{x\to 1} ax^2 + 1 = a + 1 \\ \lim_{x\to 1}(x^2 + bx + 3) = b + 4 \end{cases} \quad L1=L2 \quad \exists\lim_{x\to 1} f(x) \rightarrow f(1) \quad a+1= b+4$$

f(x) es continua en x=1

(-∞, 1) f(x)= $ax^2 + 1$ D: (-∞, ∞); (-∞, 1) C D f(x) es continua en (-∞,1)
(1, ∞) f(x)= x^2+bx+3 D: (-∞, ∞); (1, ∞) C D f(x) es continua en (1, ∞)

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x<1 \\ 2x+b & x\geq 1 \end{cases}$$

(-∞, 1) f(x)= 2ax D: (-∞, ∞) ; (-∞, 1) C D f'(x) Esta definida y es continua en (-∞, 1)
(1, ∞) f(x)= 2x+b D: (-∞, ∞); (1, ∞) C D f'(x) Esta definida y es continua en (1, ∞)

X=1
$$\begin{cases} f'(1) = 2 + b \\ \lim_{x\to 1}(2a) \end{cases} \quad L1=L2$$

f'(x) es continua y f(x) es

$\lim_{x\to 1}(2+b)^n$ $2^a = 2+b$ $3\lim_{x\to 1} f'(x) = f'(1)$ derivable en x=1

$\left.\begin{array}{l} a+1= b+4 \\ 2^a= 2+b \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} a-b= 3 \\ 2^a-b= 2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} a-b= 3 \\ -2a+b= -2 \\ \hline -a= 1;\ a=1 \end{array}$ 1-b= 3; -b=2; b= -2

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $4x^2 - 9y^2 -36= 0$ en el punto de abscisa 4 y ordenada positiva.

$4x^2 - 9y^2 -36= 0$; $9y^2= 4x^2 - 36$; $y^2= \frac{4x^2-36}{9}$; $y= \sqrt{\frac{4x^2-36}{9}}$

$y_0 = \frac{64-36}{9} = \frac{\sqrt{32}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$y' = \frac{1/9 * 8x}{2\sqrt{\frac{4x^2-36}{9}}} = \frac{4x}{3\sqrt{4x^2-36}}$

$m= y'(4)= \frac{32/9}{2\sqrt{32/9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0{,}94$ y- 1,88= 0,94 (x-4)