UNIDAD 10.- **DERIVADAS**

1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. DERIVADAS LATERALES

Definición.- Se llama **derivada** de una función $y = f(x)$ en un punto de abscisa x_0 al siguiente límite si existe:

$f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Se suele representar por $f'(x_0) = D[f(x_0)] = y'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ y todas significan lo mismo.

También se puede usar otro límite equivalente si a uno le gusta más y es:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ejemplo: Dada la función $y = x^2 - x$, calcular la derivada en el punto de abscisa $x_0 = 3$

Aplicamos la definición usando el primer límite (practicad usando el otro y ver que sale lo mismo)

$y'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{y(3+h) - y(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\left[(3+h)^2 - (3+h)\right] - \left[3^2 - 3\right]}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\left[9 + 6h + h^2 - (3+h)\right] - 6}{h} =$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{6 + 5h + h^2 - 6}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{5h + h^2}{h} =$(ahora nos sale una indeterminación $\frac{0}{0}$, que la resolvemos sacando factor común) = $\lim\limits_{h\to 0} \frac{h\cdot(5+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(5+h) = 5$. Así la derivada de la función $y = x^2 - x$ en $x_0 = 3$ vale 5

Ejemplo: Dada $f(x) = \sqrt{x}$, calcular la derivada en $x_0 = 5$

Ahora vamos a aplicar el otro límite equivalente:

$f'(5) = \lim\limits_{x\to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5} =$ (ahora nos sale una indeterminación $\frac{0}{0}$, que la resolvemos multiplicando por el conjugado) = $\lim\limits_{x\to 5} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{5})}{(x-5)} \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{5})}{(\sqrt{x} + \sqrt{5})} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2}{(x-5)\left(\sqrt{x} + \sqrt{5}\right)} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x} + \sqrt{5}\right)} =$

(simplificamos) = $\lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{5}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$. Así la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 5$ vale $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

[*Nota*: No hacía falta multiplicar por el conjugado si nos damos cuenta que $(x-5) = (\sqrt{x} - \sqrt{5})\cdot(\sqrt{x} + \sqrt{5})$ y simplificar]

Definición.- La **derivada lateral por la derecha** de una función $y = f(x)$ en un punto de abscisa x_0 al siguiente límite si existe:

$$f'(x_0^+) = D\left[f(x_0^+)\right] = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definición.- La **derivada lateral por la izquierda** de una función $y = f(x)$ en un punto de abscisa x_0 al siguiente límite si existe:

$$f'(x_0^-) = D\left[f(x_0^-)\right] = \underset{h\to 0^-}{lím} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \underset{x\to x_0^-}{lím} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Consecuencia: Una función $y = f(x)$ tiene derivada en un punto de abscisa x_0 si y solo si existen las derivadas laterales y coinciden. Es decir,

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f'(x_0^+) \text{ y } \exists f'(x_0^-) \\ f'(x_0^+) = f'(x_0^-) \end{cases}$$

Nota: las derivadas laterales se usarán sobre todo en las funciones definidas por partes o a trozos, de manera similar a como se hacía en el estudio de la continuidad

2. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

Propiedad: Si una función es derivable en un punto x_0, entonces es continua en x_0. Lo contrario no es cierto, es decir, hay funciones continuas en un punto x_0 que no son derivables en ese punto x_0

Resumiendo: $\begin{array}{l} \text{Derivable} \Rightarrow \text{Continua} \\ \text{Continua} \Rightarrow \text{ Derivable o no derivable} \end{array}$

Propiedad: Si una función es continua en x_0, la derivada existe si y sólo si existen las derivadas laterales y estas coinciden.

Esta propiedad la utilizaremos para calcular la derivada en puntos donde la función cambia de definición.

Ejemplo: Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x \le 0 \\ x^2-1 & si \quad 0 < x < 2 \\ 4x-5 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$, estudiar si es derivable en $x_0 = 0$ y en $x_0 = 2$

Veamos en $x_0 = 0$

Primero por ser una función por partes vamos a estudiar la continuidad en $x_0 = 0$, como ya sabemos

a) Límites laterales

$$\underset{x\to 0^-}{lím} f(x) = \underset{x\to 0^-}{lím}(2x+1) = 1$$

$\underset{x\to 0^+}{lím} f(x) = \underset{x\to 0^+}{lím}(x^2-1) = -1$ Como podemos apreciar son distintos, luego la función presenta una discontinuidad no evitable de salto finito y amplitud 2. Por tanto, según la propiedad al no ser continua sabemos que no es derivable $x_0 = 0$, y no hace falta calcular las derivadas laterales.

Veamos ahora en $x_0 = 2$

Vamos primero a estudiar la continuidad en $x_0 = 2$

a) Límites laterales

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2-1) = 3$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(4x-5) = 3$$ Como los límites laterales coinciden, entonces $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

b) $\exists f(2) = 4\cdot 2 - 5 = 3$

c) Como $\lim_{x\to 2} f(x) = 3 = f(2)$, entonces la función es continua en $x_0 = 2$

Con esto no sabemos si es derivable o no, pero puede que lo sea. Para verificarlo hemos de usar las derivadas laterales

$$f'(2^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\left[(2+h)^2-1\right]-3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(4+h)}{h} = 4$$
$$f'(2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\left[4(2+h)-5\right]-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{4h}{h} = 4$$

Como son iguales podemos afirmar que la función es derivable en $x_0 = 2$ y que $f'(2) = 4$

NOTA: Como vemos, en los puntos x_0 donde la función cambia de definición, hemos de estudiar primero la continuidad y si nos sale continua realizar después el estudio con derivadas laterales

3. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

La derivada de una función en un punto x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$

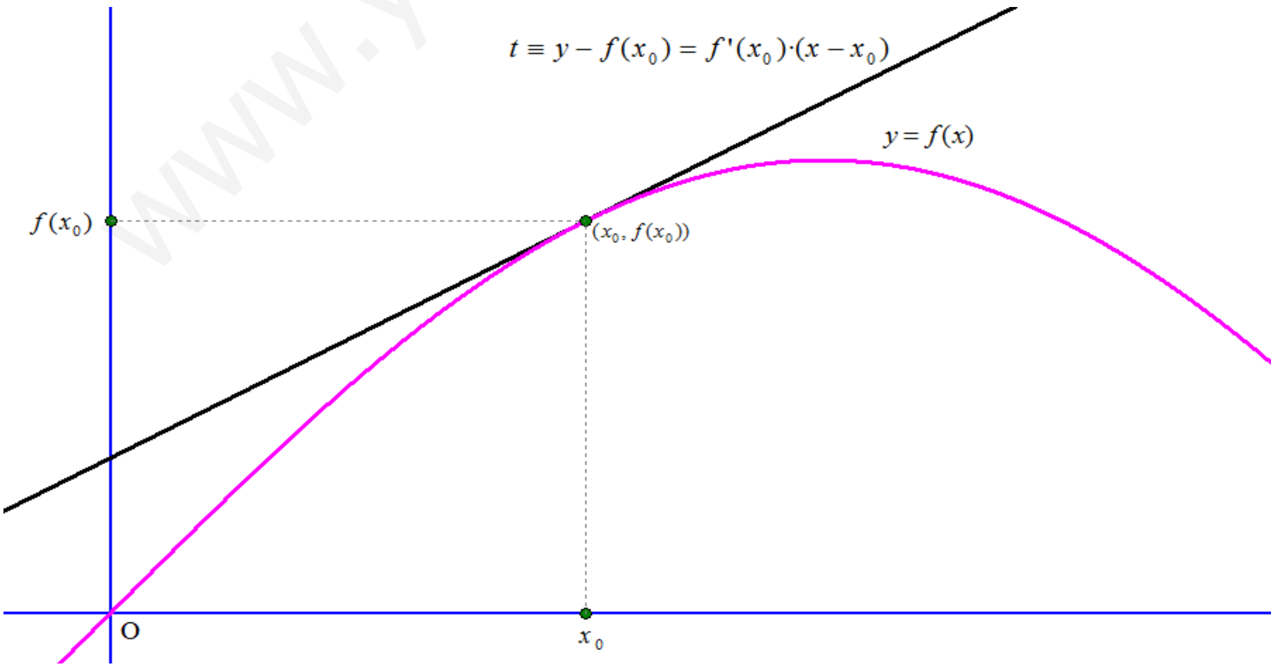
$D[f(x_0)] = f'(x_0) = m_{\text{recta tangente}}$ en x_0.

Con esto podemos obtener la ecuación de la recta tangente a la función en x_0 en el punto $(x_0, f(x_0))$

(*NOTA*: Del año pasado sabemos que la ecuación de una recta dada su pendiente m y un punto por donde pasa (a,b) es así: $r \equiv y - b = m\cdot(x-a)$)

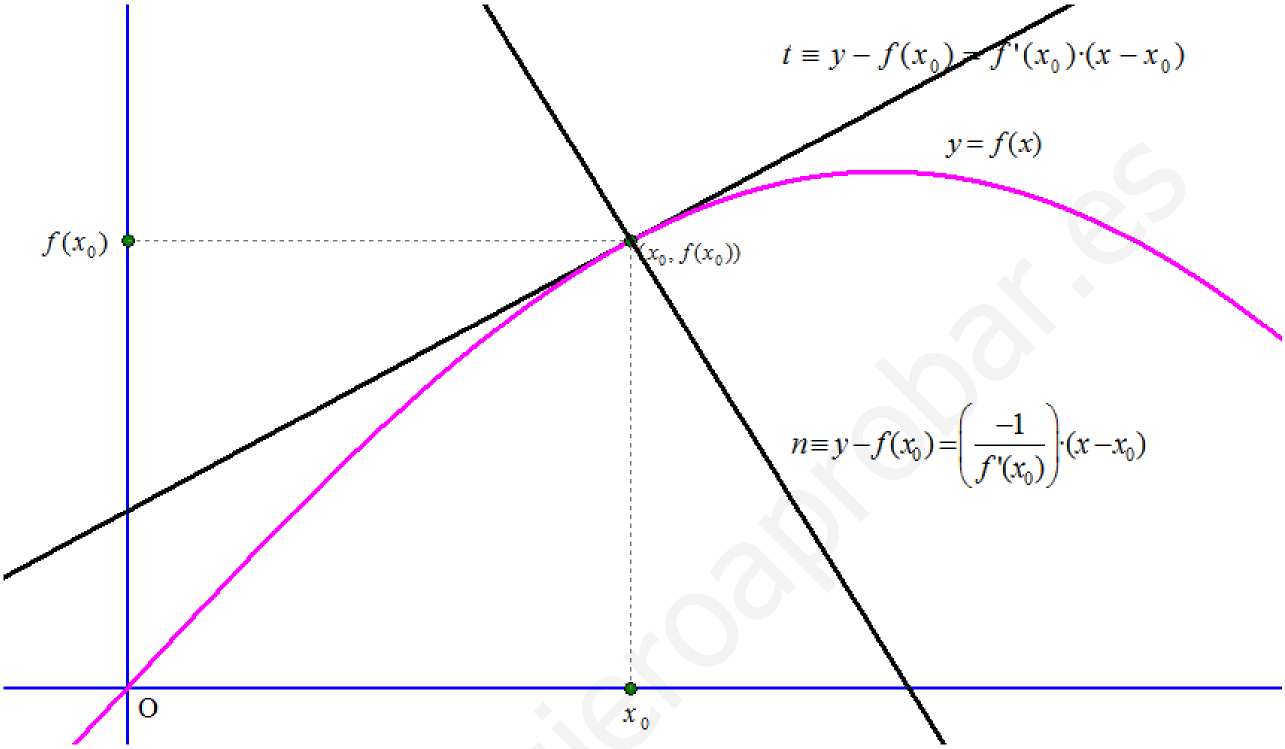
Aplicando la ecuación de la nota anterior tenemos la **ecuación de la recta tangente**:

$$t \equiv y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$



Y de esto, podemos sacar la ecuación de la recta normal a la función en el punto $(x_0, f(x_0))$, pues esta recta tendrá por pendiente $\frac{-1}{f'(x_0)}$, al ser perpendicular a la tangente. Con lo cual la ecuación de la recta normal es:

$$n \equiv y - f(x_0) = \left(\frac{-1}{f'(x_0)}\right) \cdot (x - x_0)$$



<u>Ejemplo</u>: Calcular las ecuaciones de la recta tangente y normal a la función $y = x^2 - x$ en el punto de abscisa $x_0 = 3$

Como vimos en el ejemplo, tenemos que $f'(3) = 5$.
Nos falta conocer $f(3) = 6$ y ya sólo sustituir en las ecuaciones:

Recta tangente: $t \equiv y - 6 = 5 \cdot (x - 3)$

Recta normal: $n \equiv y - 6 = -\frac{1}{5} \cdot (x - 3)$

4. FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS SUCESIVAS

<u>Definición</u>.- Se llama función derivada (o sólo derivada) de una función $y = f(x)$ y se representa por $y' = f'(x)$, a la función que asocia a cada x el valor de su derivada.

<u>Ejemplo</u>: Calcular la función derivada de $f(x) = 3x^2 + x$
Tomamos un punto cualquiera x_0 y le aplicamos la definición de derivada:

$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[3(x_0+h)^2 + (x_0+h)\right] - \left[3x_0^{\ 2} + x_0\right]}{h} =$ (desarrollamos y operamos) =

$\lim_{h\to 0} \frac{6x_0 h + 3h^2 + h}{h} =$ (sacamos factor común y simplificamos) = $\lim_{h\to 0} \frac{h(6x_0 + 3h + 1)}{h} = 6x_0 + 1$

Lo que hemos obtenido es que para cualquier x_0 tenemos que $f'(x_0) = 6x_0 + 1$, Si en lugar de x_0 hubiésemos puesto x, nos da la función derivada o derivada $f'(x) = 6x + 1$. Esta función ya nos permite calcula la derivada en otro punto simplemente sustituyendo y sin tener que hacer límites. Por ejemplo, ¿cuál sería la derivada en $x_0 = -4$? Pues fácilmente, $f'(-4) = 6\cdot(-4) + 1 = -23$

<u>Definición</u>: Derivadas sucesivas son derivadas de funciones derivadas y son

Derivada primera de f: es la que hemos tratado $y' = f'(x)$

Derivada segunda de f: es la derivada de la derivada $y'' = f''(x) = (f')'(x)$

Derivada tercera de f: es la derivada de la derivada segunda: $y''' = f'''(x) = (f'')'(x)$

Y así sucesivamente, y diremos

Derivada n-ésima de f: $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$

5. DERIVADAS DE LAS OPERACIONES CON FUNCIONES

Son una serie de fórmulas que hay que saberse de memoria. Si alguien está interesado en conocer su demostración lo puede consultar en cualquier libro de texto.

Derivada de la suma o diferencia de funciones	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
Derivada del producto de un nº real por una función	$(k\cdot f)' = k\cdot f'$
Derivada del producto de dos funciones	$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$
Derivada del cociente de dos funciones	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$
Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena	$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$

Ya se verán su utilidad más adelante.

6. FUNCIONES DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES Y COMPUESTAS. TABLA

Vamos a dar unas tablas, que habrá que conocer de memoria también, donde vienen las derivadas de las funciones elementales y compuestas, así como un ejemplo de cada una

FUNCIONES BÁSICAS		DERIVADA
Constante	$f(x)=c$	$f'(x)=0$
Identidad	$f(x)=x$	$f'(x)=1$
Potencial canónica	$f(x)=x^2$	$f'(x)=2\cdot x$
Racional básica	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
Irracional básica	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

FUNCIÓN SIMPLE	FUNCIÓN COMPUESTA	DERIVADA FUNCIÓN SIMPLE	DERIVADA FUNCIÓN COMPUESTA
$y=x^n$	$y=f(x)^n$	$y'=n\cdot x^{n-1}$	$y'=n\cdot f(x)^{n-1}\cdot f'(x)$
$y=\dfrac{1}{x^n}$ ó $y=x^{-n}$	$y=\dfrac{1}{f(x)^n}$ ó $y=f(x)^{-n}$	$y'=\dfrac{-n}{x^{n+1}}$ ó $y'=-n\cdot x^{-n-1}$	$y'=\dfrac{-n}{f(x)^{n+1}}\cdot f'(x)$ ó $y'=-n\cdot f(x)^{-n-1}\cdot f'(x)$
$y=\sqrt[n]{x}$ ó $y=x^{\frac{1}{n}}$	$y=\sqrt[n]{f(x)}$ ó $y=f(x)^{\frac{1}{n}}$	$y'=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ ó $y=\dfrac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}$	$y'=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}\cdot f'(x)$ ó $y=\dfrac{1}{n}\cdot f(x)^{\frac{1}{n}-1}\cdot f'(x)$
$y=e^x$	$y=e^{f(x)}$	$y'=e^x$	$y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$y=a^x$	$y=a^{f(x)}$	$y'=a^x\cdot\ln a$	$y'=a^{f(x)}\cdot\ln a\cdot f'(x)$
$y=\ln x$	$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$y'=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$
$y=\log_a x$	$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$	$y'=\dfrac{1}{f(x)\cdot\ln a}\cdot f'(x)$

Ejemplos: Derivamos las siguientes funciones:

FUNCIÓN	DERIVADA
$y = x^7$	$y' = 7 \cdot x^{7-1} \Rightarrow y' = 7 \cdot x^6$
$f(x) = \dfrac{1}{x^5}$	$f'(x) = \dfrac{-5}{x^6}$
$y = (2x^2-5)^4$	$y' = 4 \cdot (2x^2-5)^{4-1} \cdot (2x^2-5)' \Rightarrow y' = 4 \cdot (2x^2-5)^3 \cdot 4x \Rightarrow y' = 16 \cdot (2x^2-5)^3 \cdot x$
$f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$	$f'(x) = \dfrac{-2}{(3x-1)^{2+1}} \cdot (3x-1)' \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-2}{(3x-1)^3} \cdot 3 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-6}{(3x-1)^3}$
$y = \sqrt{8x^3}$	$y' = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{8x^3}} \cdot (8x^3)' \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{8x^3}} \cdot 24 \cdot x^2 \Rightarrow y' = \dfrac{12 \cdot x^2}{\sqrt{8x^3}} \Rightarrow y' = \dfrac{12 \cdot x^2}{2 \cdot x \cdot \sqrt{2x}} \Rightarrow y' = \dfrac{6 \cdot x}{\sqrt{2x}}$
$y = \sqrt[5]{x}$	$y' = \dfrac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}}$
$y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow y = x^{\frac{-2}{3}}$	$y' = \dfrac{-2}{3} x^{\frac{-2}{3}-1} \Rightarrow y' = \dfrac{-2}{3} x^{\frac{-5}{3}} \Rightarrow y' = \dfrac{-2}{3 \cdot x^{\frac{5}{3}}} \Rightarrow y' = \dfrac{-2}{3 \sqrt[3]{x^5}}$
$f(x) = e^{\sqrt{x}}$	$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$f(x) = 5^x$	$f'(x) = 5^x \cdot \ln 5$
$f(x) = L(\sqrt{x})$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x}\right)' \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2x}$
$y = \log_3\left(x^2+1\right)$	$y' = \dfrac{1}{\left(x^2+1\right) \cdot \ln 3} \cdot \left(x^2+1\right)' \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\left(x^2+1\right) \cdot \ln 3} \cdot 2x \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right) \cdot \ln 3}$

Ejemplos: Ejercicios resueltos de derivadas:

FUNCIÓN	SOLUCIÓN
$f(x) = x^6$	$f'(x) = 6x^{6-1} = \boxed{6x^5}$
$f(x) = x^{\frac{5}{2}}$	$f'(x) = \dfrac{5}{2} x^{\frac{5}{2}-1} = \dfrac{5}{2} x^{\frac{5}{2}-\frac{2}{2}} = \dfrac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} = \dfrac{5\sqrt{x^3}}{2} = \boxed{\dfrac{5x\sqrt{x}}{2}}$
$f(x) = x^{-7}$	$f'(x) = -7x^{-7-1} = -7x^{-8} = \boxed{\dfrac{-7}{x^8}}$
$f(x) = x^{\frac{-4}{7}}$	$f'(x) = \dfrac{-4}{7} x^{\frac{-4}{7}-1} = \dfrac{-4}{7} x^{\frac{-4}{7}-\frac{7}{7}} = \dfrac{-4}{7} x^{\frac{-11}{7}} = \dfrac{-4}{7x^{\frac{11}{7}}} = \dfrac{-4}{7\sqrt[7]{x^{11}}} = \boxed{\dfrac{-4}{7x\sqrt[7]{x^4}}}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1x^{1-1} = 1x^0 = \boxed{1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^3}$	$f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = \boxed{\dfrac{-3}{x^4}}$
$f(x) = \sqrt[5]{x^4}$	$f(x) = \sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$ $f'(x) = \dfrac{4}{5} x^{\frac{4}{5}-1} = \dfrac{4}{5} x^{\frac{4}{5}-\frac{5}{5}} = \dfrac{4}{5} x^{-\frac{1}{5}} = \dfrac{4}{5x^{\frac{1}{5}}} = \boxed{\dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}}}$

Ejemplos: Ejercicios resueltos de derivadas:

FUNCIÓN	SOLUCIÓN
$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}=\frac{1}{x^{\frac{7}{3}}}=x^{-\frac{7}{3}}$	$f'(x)=-\frac{7}{3}x^{-\frac{7}{3}-1}=-\frac{7}{3}x^{-\frac{7}{3}-\frac{3}{3}}=-\frac{7}{3}x^{-\frac{10}{3}}=\frac{-7}{3x^{\frac{10}{3}}}=\frac{-7}{3\sqrt[3]{x^{10}}}=\boxed{\frac{-7}{3x^3\sqrt[3]{x}}}$
$f(x)=9^x$	$f'(x)=\boxed{9^x\ln 9}$
$f(x)=0.25^x$	$f'(x)=0.25^x\ln(0.25)$
$f(x)=-5x$	$f'(x)=\boxed{-5}$
$f(x)=\sqrt{2}x$	$f'(x)=\boxed{\sqrt{2}}$
$f(x)=3x^{-6}$	$f'(x)=3(-6)x^{-7}=-18x^{-7}=\boxed{\frac{-18}{x^7}}$
$f(x)=\frac{4}{x}$	$f'(x)=\boxed{\frac{-4}{x^2}}$
$f(x)=3\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\frac{5}{\sqrt[6]{x}}$	$f'(x)=\frac{-5}{6\sqrt[6]{x^7}}$
$f(x)=x^3+x^2+x+5$	$f'(x)=\boxed{3x^2+2x+1}$
$f(x)=\frac{2}{5}x^3+\frac{1}{4}x^2+5x-3$	$f'(x)=\frac{6}{5}x^2+\frac{1}{2}x+5$
$f(x)=x^{-3}+x^2+x^{-1}+7$	$f'(x)=-3x^{-4}+2x-x^{-2}$
$f(x)=(3x^2+3)(2x^2+1)$	$f'(x)=6x(2x^2+1)+(3x^2+3)4x=12x^3+6x+12x^3+12x=24x^3+18x=\boxed{6x(4x^2+3)}$
$f(x)=(4x^3-6)(4x^2+4)$	$f'(x)=12x^2\left(4x^2+4\right)+\left(4x^3-6\right)8x=48x^4+48x^2+32x^4-48x=$ $=80x^4+48x^2-48x=\boxed{16x(5x^3+3x-3)}$
$f(x)=(x+5x^2+6x^3)(4x^2-5)$	$f'(x)=120x^4+80x^3-78x^2-50x-5$
$f(x)=\frac{2x^3+5}{4x^2+7}$	$f'(x)=\frac{6x^2(4x^2+7)-(2x^3+5)8x}{(4x^2+7)^2}=\frac{24x^4+42x^2-16x^4-40x}{(4x^2+7)^2}=\frac{8x^4+42x^2-40x}{(4x^2+7)^2}=\frac{2x(4x^3+21x-20)}{(4x^2+7)^2}$
$f(x)=\frac{x^{-2}+x^4-6}{3x^3+4x^4}$	$f'(x)=\frac{3x^7+96x^4+54x^3-28x-18}{x^7(4x+3)^2}$
$f(x)=\frac{3}{5}\ln(x)$	$f(x)=\boxed{\frac{3}{5x}}$
$f(x)=\ln\left(\frac{3x}{4}\right)$	$f'(x)=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3x}{4}}=\boxed{\frac{1}{x}}$
$f(x)=4\ln(5x)$	$f'(x)=4\frac{5}{5x}=\boxed{\frac{4}{x}}$
$f(x)=Ln(3x^3+x^{-4}+e^x+1)$	$f'(x)=\boxed{\frac{9x^2-4x^{-5}+e^x}{3x^3+x^{-4}+e^x+1}}$

__Ejemplos__: Ejercicios resueltos de derivadas:

FUNCIÓN	SOLUCIÓN
$f(x)=(x+4)\ln(3x+5)$	$f'(x)=1\cdot\ln(3x+5)+(x+4)\dfrac{3}{3x+5}=\boxed{\ln(3x+5)+\dfrac{3(x+4)}{3x+5}}$
$f(x)=e^{2x}$	$f'(x)=\boxed{2e^{2x}}$
$f(x)=3e^{4x}$	$f'(x)=3\cdot 4e^{4x}=\boxed{12e^{4x}}$
$f(x)=\left(x^2+1\right)^7$	$f'(x)=7(x^2+1)^6 .2x=14x\left(x^2-1\right)$
$f(x)=\left(x^2+1\right)^{-1/3}$	$f'(x)=\dfrac{-1}{3}(x^2+1)^{\frac{-4}{3}} .2x=-\dfrac{2}{3}x\left(x^2-1\right)^{\frac{-4}{3}}$
$f(x)=x^2e^{x^5}$	$f'(x)=e^{x^5}(5x^6+2x)$
$\mathbf{f(x)=\dfrac{1}{7x+1}}$	$f'(x)=\dfrac{0\cdot(7x+1)-1\cdot 7}{(7x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{7}{(7x+1)^2}$
$y=\dfrac{x}{(x+3)^2}$	$y'=\dfrac{(x+3)^2-2(x+3)x}{(x+3)^4}=\dfrac{(x+3)-2x}{(x+3)^3}=\dfrac{3-x}{(x+3)^3}$
$y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$	$y'=\dfrac{-16(3x^2-8x)}{(x^3-4x^2)^2}$
$y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$	$y'=\dfrac{(2x-1)(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=$ $=\dfrac{\cancel{2x^3}+\cancel{2x^2}+\cancel{2x}-\cancel{x^2}-\cancel{x}-1-\cancel{2x^3}-\cancel{x^2}+\cancel{2x^2}+\cancel{x}-\cancel{2x}-1}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$
$y=e^x(x-1)$	$y'=e^x(x-1)+e^x=e^x(x-1+1)=xe^x$
$y=x^2e^x$	$y'=2x\,e^x+x^2e^x=e^x(2x+x^2)$