MATRICES

1. MATRICES

Una matriz es una ordenación rectangular de números. Los números (o símbolos que los representan) se llaman elementos de la matriz. Se suele escribir el conjunto de números entre paréntesis o corchetes.

Un ejemplo de matriz seria $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

Se puede entender como una tabla de números ordenados en filas y columnas.

Notación:

1. Se utilizan letras mayúsculas para simbolizar matrices, y las letras minúsculas correspondientes para designar sus elementos.

2. Un elemento general de una matriz A puede ser escrito a_{ij}, esto designa al elemento que se encuentra en la intersección de la i-ésima fila y de la j-ésima columna. Es decir, $A=\left(a_{ij}\right)$, $\begin{cases} i=1,2,3,\dots,m \\ j=1,2,3,\dots,n \end{cases}$

donde m es el número de filas y n el número de columnas. $A=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

3. Se dice que una matriz es de orden $m\ x\ n$ si tiene m filas y n columnas. A $m\ x\ n$ se le llama dimensi´´on de la matriz A

- Si $m=n$ se dice que la matriz es cuadrada. Una matriz cuadrada A_{nxn} suele decirse que es de orden n.
- Si $m \neq n$, la matriz se dirá rectangular.
- Las matrices $1\ x\ n$ se llaman matriz-fila.
- Las matrices $m\ x\ 1$ se llaman matriz-columna.

Definición: Se llama diagonal principal de una matriz a los elementos a_{ii}

Ejemplo: En tamaño mayor los elementos de la diagonal principal de la matriz A

$$A=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & -5 & 7 \\ \sqrt{2} & \mathbf{8} & -3 & -12 \\ \frac{1}{2} & 3 & \mathbf{9} & 10 \end{pmatrix}$$

Definición: Se llama diagonal secundaria de una matriz a los elementos a_{ij} que verifican $i+j=n+1$

Ejemplo: En tamaño mayor los elementos de la diagonal secundaria de la matriz A

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & \mathbf{7} \\ \sqrt{2} & 8 & \mathbf{-3} & -12 \\ \frac{1}{2} & \mathbf{3} & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

2. TIPOS DE MATRICES

Matriz fila: Es aquella matriz que tiene una sola fila, es decir, es de dimensión $1\times n$

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -9 & \pi\end{pmatrix}$ es una matriz fila de dimensión 1×4

Matriz columna: Es aquella matriz que tiene una sola columna, es decir, es de dimensión $m\times 1$

$B=\begin{pmatrix}-121\\0\\7\end{pmatrix}$ es una matriz columna de dimensión 3×1

Matriz nula: Es aquella matriz con todos sus elementos nulos. Se denota por $\theta_{m\times n}$, o bien, sólo por θ si se sobreentiende su dimensión

$\theta_{2\times 3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ es la matriz nula de dimensión 2×3

Matriz cuadrada: Como ya sabemos es aquella matriz que tiene igual nº de filas que de columnas, y en ellas no se habla de dimensión sino de orden

$A=\begin{pmatrix}6 & -5\\11 & 9\end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2

Matriz triangular superior: Es aquella que tiene todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal nulos

$C=\begin{pmatrix}1 & 6 & 7\\0 & 7 & 8\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ es una matriz triangular superior

Matriz triangular inferior: Es aquella que tiene todos los elementos situados por encima de la diagonal principal nulos

$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\6 & 0 & 0\\5 & 5 & 2\\0 & -3 & -4\end{pmatrix}$ es una matriz triangular inferior

Matriz diagonal: Es aquella matriz en la que todos los elementos no situados en la diagonal principal son ceros o nulos. Normalmente se aplica a matrices cuadradas.

$A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 8\end{pmatrix}$ es una matriz diagonal

Matriz escalar: Es toda matriz diagonal cuadrada en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

$E=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 0 & -7\end{pmatrix}$ es una matriz escalar

Matriz unidad o identidad: Es la matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal valen 1. Se representa por I_n o sólo por I

$\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 3

3. OPERACIONES CON MATRICES

Definición: Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y si los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales

Suma de matrices: Para sumar dos matrices $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$, primero hemos de cerciorarnos de que sean de la misma dimensión $m\times n$ y la matriz suma $A+B$ es una matriz de la misma dimensión cuyos elementos se obtienen sumando los elementos que ocupan el mismo lugar, es decir, $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$
Se define la *diferencia* $A-B=A+(-B)$, siendo $(-B)$ (*matriz opuesta de B*) la matriz que se obtiene cambiando de signo a los elementos de la matriz B

Ejemplo:- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$ y la matriz $B=\begin{pmatrix}-5 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}$, calcular:

a) $A+B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 5\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$

b) $A-B=\begin{pmatrix}10 & -4 & 7\\ -2 & 1 & -11\end{pmatrix}$

Producto por un nº real: Dado un nº real k y una matriz $A=(a_{ij})$ de dimensión $m\times n$, se define la matriz $k\cdot A$ como la matriz de dimensión $m\times n$ cuyos elementos son los de A multiplicados por k, es decir, $k\cdot A=(k\cdot a_{ij})$

Ejemplo: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$ y la matriz $B=\begin{pmatrix}-5 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}$,

a) Calcular $-2A+3B=\begin{pmatrix}-10 & 4 & -12\\ 0 & -2 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-15 & 6 & -3\\ 6 & 0 & 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-25 & 10 & -15\\ 6 & -2 & 29\end{pmatrix}$

b) Hallar una matriz X, que cumpla $2\cdot X-3A=-B$. Operamos igual que si fuera una ecuación, pero en este caso es una ecuación matricial: → $2\cdot X=3\cdot A-B$ → $X=\frac{1}{2}(3\cdot A-B)$ →

$$X=\frac{1}{2}\left[3\cdot\begin{pmatrix}5 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}\right]\rightarrow X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}20 & -8 & 19\\ -2 & 3 & -19\end{pmatrix}\rightarrow X=\begin{pmatrix}10 & -4 & \frac{19}{2}\\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{-19}{2}\end{pmatrix}$$

4. PRODUCTO DE MATRICES

NOTA MUY IMPORTANTE: Para poder multiplicar dos matrices, el número de columnas de la primera ha de ser igual al número de filas de la segunda.

Producto de una matriz fila por una matriz columna: El nº de columnas de la matriz fila tiene que ser igual al nº de filas de la matriz columna. Así si la matriz fila es $F=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ y la matriz columna es $C=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$, entonces $F\cdot C$ es una matriz de dimensión 1x1 (o sea, un número real) que se obtiene de la siguiente forma: $F\cdot C=(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\dots+a_n\cdot b_n)$

Ejemplo: Dadas $F=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ tenemos que:

a) $F\cdot C=(2\cdot 5+(-1)\cdot 6+0\cdot 7+3\cdot(-2))=(-2)$

b) $D\cdot F$ no se puede calcular pues el nº de columnas de la primera (4) no coincide con el nº de filas de la segunda (1)

c) $D\cdot C=(15+24+7+4)=(50)$

Producto de dos matrices: Dada una matriz $A=(a_{ij})$ de dimensión $m\times n$ y una matriz $B=(b_{ij})$ de dimensión $n\times p$ (vemos que el nº de columnas de A es igual al nº de filas de B, n), la matriz producto $P=A\cdot B=(p_{ij})$ es una matriz de dimensión $m\times p$ cuyos elementos p_{ij} se obtienen multiplicando la fila i de la matriz A por la columna j de la matriz B, como hemos explicado en el punto anterior

Ejemplo: Calcular $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Como vemos la primera matriz tiene dimensión 2x3 y la segunda matriz tiene de dimensión 3x1, por tanto se puede multiplicar y el resultado es una matriz de dimensión 2x1

- la fila 1 de la 1ª matriz por la columna 1 de la 2ª matriz da el elemento p_{11} del producto
- la fila 2 de la 1ª matriz por la columna 1 de la 2ª matriz da el elemento p_{21} del producto

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cdot 2+8\cdot 0+3\cdot(-1) \\ 3\cdot 2+9\cdot 0+1\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Dadas $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ Calcular:

a) $A\cdot B$ Se puede realizar pues A es de dimensión 3x4 y B es de dimensión 4x2. El resultado será de dimensión 3x2

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 3\\0 & 1 & -3 & -2\\5 & 3 & 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 1\\0 & 2\\3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -1\\-7 & -5\\2 & 17\end{pmatrix}$$ que os dejo a vosotros su realización detallada

b) $B\cdot A$ No se puede hacer, el nº de columnas de B es 2 y no coincide con el nº de filas de A que es 3

c) $A^2=A\cdot A$ tampoco se puede hacer por las mismas razones que en b). Sólo se podrá hacer en matrices cuadradas las potencias

Ejemplo: $$\begin{pmatrix}5\\6\\7\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -5 & 0 & 15\\12 & -6 & 0 & 18\\14 & -7 & 0 & 21\\-4 & 2 & 0 & -6\end{pmatrix}$$

Propiedades del producto con matrices cuadradas:

a) El producto de matrices cuadradas es asociativo: $A\cdot(B\,C)=(A\cdot B)\cdot C$
b) Las matrices cuadradas de orden n tienen elemento neutro para el producto, que es la matriz unidad o identidad de orden n: $A\cdot\mathrm{I}=\mathrm{I}\cdot A=A$ (recordemos que la matriz unidad era una matriz diagonal escalar con todos los elementos de la diagonal principal valiendo 1)
c) El producto de matrices es distributivo respecto de la suma de matrices: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
d) El producto de matrices cuadradas, en general, no es **conmutativo**: $A\cdot B\neq B\cdot A$ normalmente

5. MATRIZ TRASPUESTA. MATRIZ SIMÉTRICA Y ANTISIMÉTRICA

Definición: Se llama matriz traspuesta de una matriz A de dimensión $m\times n$ a la matriz que se obtiene al cambiar en A las filas por columnas (ó las columnas por filas). Se representa por A^t ó trasp(A) y su dimensión es $n\times m$

Si una matriz es cuadrada, su traspuesta tiene el mismo orden

Ejemplo: Dada $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 3\\0 & 1 & -3 & -2\\5 & 3 & 2 & 0\end{pmatrix}\rightarrow A^t=\begin{pmatrix}0 & 0 & 5\\1 & 1 & 3\\-1 & -3 & 2\\3 & -2 & 0\end{pmatrix}$

Propiedades de la trasposición:

- $(A^t)^t=A$
- $(A+B)^t=A^t+B^t$
- $(k\cdot A)^t=k\cdot A^t$
- $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

Definición: Se llama **matriz simétrica** a toda aquella matriz cuadrada que coincide con su traspuesta, $A=A^t$

Es decir, los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales, $a_{ij}=a_{ji}$

Son de la forma, en el caso de las cuadradas de orden 3, $A=\begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix}$

Definición: Se llama **matriz antisimétrica** a toda aquella matriz cuadrada que coincide con la opuesta de su traspuesta, $A=-A^t$

Es decir, los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son opuestos, $a_{ij}=-a_{ji}$

Los elementos de la diagonal principal han de ser nulos.

Son de la forma, en el caso de las cuadradas de orden 3, $A=\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$

6. MATRIZ INVERSA

Definición: Dada una matriz cuadrada A de orden n, se llama **matriz inversa** de A y se nota por A^{-1}, a la matriz cuadrada de orden n que verifica: $A{\cdot}A^{-1}=A^{-1}{\cdot}A=I$

NOTA: Nosotros nos vamos a limitar a calcular matrices inversas de matrices cuadradas de orden 2

Propiedad: Una matriz cuadrada de orden 2, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tiene inversa si y sólo si $a{\cdot}d-b{\cdot}c\neq 0$

Por tanto, no todas las matrices cuadradas tienen inversa.

Si queremos calcular la inversa tendremos dos opciones:

a) Aplicar la definición de esta y plantear el sistema de ecuaciones correspondiente.

Ejemplo: Calcular la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Consideremos $A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ → $A{\cdot}A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ →(como vemos salen 4 ecuaciones)

$$\begin{pmatrix} 3x+2z & 3y+2t \\ x+z & y+t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x+2z=1 \\ x+z=0 \\ 3y+2t=0 \\ y+t=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=-1 \\ t=3 \end{cases} \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Aplicar las siguientes fórmulas

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la matriz inversa si existe es: $A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{d}{a{\cdot}d-b{\cdot}c} & \dfrac{-b}{a{\cdot}d-b{\cdot}c} \\ \dfrac{-c}{a{\cdot}d-b{\cdot}c} & \dfrac{a}{a{\cdot}d-b{\cdot}c} \end{pmatrix}$

Ejemplo: Calcular la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3\cdot 1-2\cdot 1} & \dfrac{-2}{3\cdot 1-2\cdot 1}\\ \dfrac{-1}{3\cdot 1-2\cdot 1} & \dfrac{3}{3\cdot 1-2\cdot 1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

Ejemplo: (Selectividad 2013) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcule A^2 y A^{2013}
b) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X+I_2=5B^t-A^2$

a) Calculamos las potencias de A

$$\boxed{A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=A$$

$$A^4=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^3=A\cdot A=A^2=I_2$$

Vemos que para las potencias pares el resultado es I_2 (la matriz identidad) y para las pares es A

Por tanto: $\boxed{A^{2013}=A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}$

b) Despejamos X de manera análoga a como se opera con una ecuación:

$A\cdot X+I_2=5B^t-A^2 \Rightarrow A\cdot X=5B^t-A^2-I_2 \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\left(5B^t-A^2-I_2\right)$ Como sabemos que $A^2=I_2$ por el apartado a) y que $A^{-1}\cdot A=I_2$, tenemos que:

$$I_2\cdot X=A^{-1}\left(5B^t-I_2-I_2\right)\Rightarrow \boxed{X=A^{-1}\cdot\left(5B^t-2\cdot I_2\right)}$$

Tenemos que $B^t=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

Calculamos $A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix} \rightarrow A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}z & t\\ x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=1\\ z=1\\ t=0\end{cases} \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

, algo que ya sabíamos por el apartado a), y nos podíamos haber ahorrado todo este cálculo

Ya solo queda sustituir y operar:

$$X=A^{-1}\cdot\left(5B^t-2\cdot I_2\right)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\left[5\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\Rightarrow X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}5 & 15\\ 10 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right]\Rightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 15\\ 10 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{X=\begin{pmatrix}10 & 3\\ 3 & 15\end{pmatrix}}$$

7. MATRICES COMO EXPRESIÓN DE TABLAS

A veces en la vida real se nos presentan gran cantidad de datos y para cuantificar y clarificar tanta información resulta muy apropiado el uso de matrices y sus operaciones. Veamos mediante ejemplos prácticos su uso

Ejemplo: En un Instituto rural, están matriculados alumnos de tres pueblos diferentes. En primer curso hay 100 alumnos del pueblo A, 80 del B y 30 del C. En segundo curso hay 65 del A, 50 del B y 20 del C. En tercer curso hay 50 del A, 35 del B y 12 del C. En 2º Bachillerato hay 40 del A, 25 del B y 8 del C. Disponer estos datos en una matriz.
Podemos expresar el enunciado como una tabla donde las filas serán los niveles educativos y las columnas los pueblos

	Pueblo A	Pueblo B	Pueblo C
Primer curso	100	80	30
Segundo curso	65	50	20
Tercer curso	50	35	12
2º Bachillerato	40	25	8

Podemos representar dicha información mediante una matriz $A=\begin{pmatrix} 100 & 80 & 30 \\ 65 & 50 & 20 \\ 50 & 35 & 12 \\ 40 & 25 & 8 \end{pmatrix}$

Ejemplo: Un proveedor que suministra materia prima a 3 fábricas, F, G y H, transporta una parte de sus envíos a cada fábrica por carretera y la otra parte por tren, según se indica en la matriz T, cuyos elementos son las toneladas de materia prima que recibe cada fábrica por cada vía de transporte.

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} F & G & H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 & 150 \\ 400 & 250 & 200 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ carretera \\ tren \end{array}$$

Los precios del transporte de cada tonelada de materia prima son 200 euros por carretera y 180 euros por tren, como indica la matriz C = (200, 180). Explique qué operación debe efectuarse con estas matrices para determinar una nueva matriz cuyos elementos sean los costes de llevar este material a la fábrica.

Debe efectuarse C · T (El producto T · C no podría realizarse) y obtenemos el coste de llevar el material a cada fábrica

$$C \cdot T = \begin{pmatrix} 200 & 180 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 & 200 & 150 \\ 400 & 250 & 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 132000 & 85000 & 6600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Coste\ F & Coste\ G & Coste\ H \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Una persona tiene que comprar 2 kg de manzanas, 1 kg de ciruelas y 1.5 kg de plátanos y otra necesita 0.5 kg de manzanas, 2.5 de ciruelas y 3 de plátanos. En la frutería A, los precios de las manzanas son 1.8 euros/kg, los de las ciruelas 2.1 y los de los plátanos 1.9 y en la frutería B son 1.7, 2.3 y 1.75 respectivamente. Determinar en qué frutería le conviene a cada persona comprar.

Consideremos las matrices:

$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1'5 \\ 0'5 & 2'5 & 3 \end{pmatrix}$ Cada fila indica la persona y la columna la cantidad de fruta que quiere comprar.

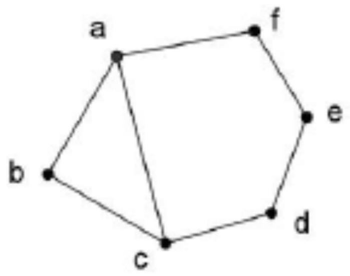
$N=\begin{pmatrix} 1'8 & 1'7 \\ 2'1 & 2'3 \\ 1'9 & 1'75 \end{pmatrix}$ Cada fila indica el tipo de fruta y las columnas las fruterías, A y B

Haciendo el producto $M \cdot N=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1'5 \\ 0'5 & 2'5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1'8 & 1'7 \\ 2'1 & 2'3 \\ 1'9 & 1'75 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ Persona1 \\ persona2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8'55 & 8'325 \\ 11'85 & 11'85 \end{pmatrix} \end{array}$

La persona 1 debe comprar en la frutería B y la persona 2 le da igual una que otra.

8. MATRICES COMO EXPRESIÓN DE GRAFOS

Definición: Un grafo es un conjunto, no vacío, de objetos llamados vértices (o nodos) y una línea de unión entre pares de vértices, llamadas aristas. Típicamente, un grafo se representa mediante una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas).



Este es un grafo cuyos vértices son V = {a, b, c, d, e, f } y cuyo conjunto de aristas son A = { ab, ac, af, bc, cd, de, ef }.

Los grafos aparecen con gran frecuencia como respuesta a problemas de la vida cotidiana. Algunos ejemplos podrían ser los siguientes: una red de carreteras, la red de enlaces ferroviarios o aéreos o la red eléctrica de una ciudad. En cada caso, es conveniente representar gráficamente el problema dibujando un grafo como un conjunto de puntos (vértices) con líneas conectándolos (arcos).

Los grafos se dividen en dos grandes bloques:
- Grafos Dirigidos: Las aristas tienen sentido de recorrido
- Grafos no Dirigidos: No hay un sentido en la arista

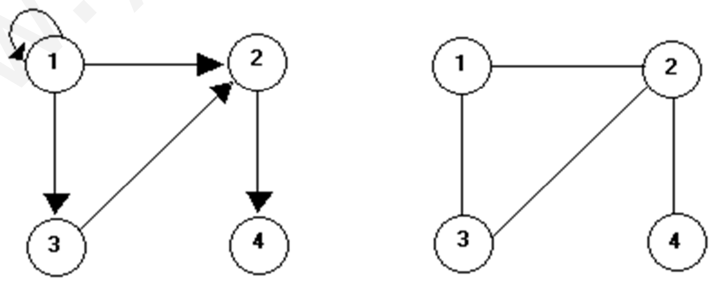
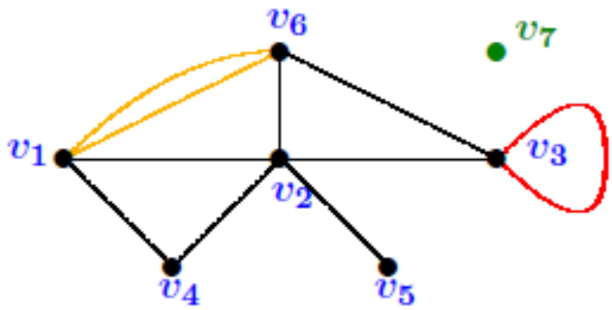


Figura 2:Ejemplos simples de un grafo dirigido y uno no dirigido.

Un ejemplo de grafo dirigido lo constituye la red de aguas de una ciudad ya que cada tubería sólo admite que el agua la recorra en un único sentido. Por el contrario, la red de carreteras de un país representa en general un grafo no dirigido, puesto que una misma carretera puede ser recorrida en ambos sentidos.

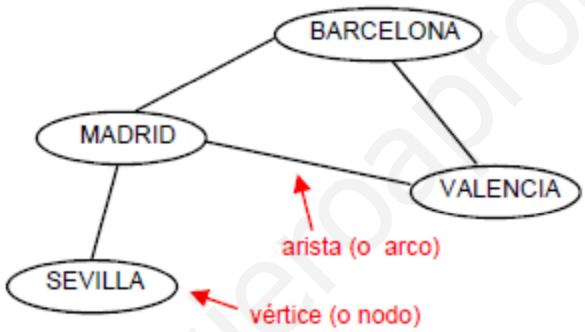
En un grafo podemos encontrarnos lazos (aristas cuyos extremos coinciden: v3v3), aristas múltiples (más de una arista conectando los mismos vértices: v1v6) y vértices aislados (no están conectados a ningún otro vértice: v7), como vemos en el grafo siguiente



Definición: Se llama **matriz de adyacencia** de un grafo a una matriz cuadrada que se utiliza para representar un grafo, de forma que sus filas y columnas representan ordenadamente los vértices del grafo, y cada elemento a_{ij} indica el nº de aristas entre el vértice i y el vértice j.

NOTA: En los grafos no dirigidos la matriz de adyacencia es simétrica

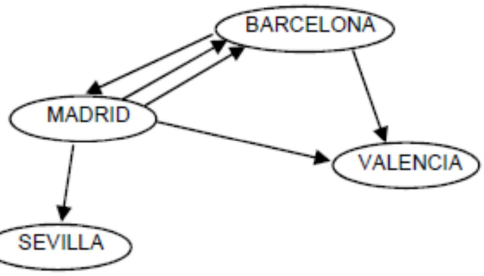
Ejemplo: Consideremos la siguiente red de AVE



Como vemos es un grafo no dirigido, se puede viajar en los dos sentidos. Su matriz de adyacencia sería la siguiente.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cccc} \scriptstyle Barc. & \scriptstyle Mad. & \scriptstyle Sev. & \scriptstyle Val. \end{array} \\ \begin{array}{r} Barc. \\ Mad. \\ Sev. \\ Val. \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo: Consideremos el siguiente grafo de vuelos de una compañía aérea:



En este caso se trata de un grafo dirigido con aristas múltiples y su matriz de adyacencia es como sigue:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cccc} \scriptstyle Barc. & \scriptstyle Mad. & \scriptstyle Sev. & \scriptstyle Val. \end{array} \\ \begin{array}{r} Barc. \\ Mad. \\ Sev. \\ Val. \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observaciones:

1) Obviamente, la matriz de adyacencia de un grafo no dirigido siempre es simétrica.
2) Algunos autores sólo consideran matrices de adyacencia binarias, es decir, compuestas de 0 y 1, por lo que sus elementos sólo indican si hay relación (1) o no (0) entre vértices.
3) La diagonal no siempre va a estar compuesta por 0: ¡Puede haber bucles!

En los grafos interesa recorrer las aristas para llegar de un vértice a otro. Se llama **camino** entre dos vértices *a* y *b*, a toda sucesión de aristas que conectan *a* con *b*, siendo la longitud del camino el número de aristas que lo componen.

Las potencias de la matriz de adyacencia de un grafo permiten conocer el número de caminos existentes entre cualquier par de vértices de una determinada longitud.

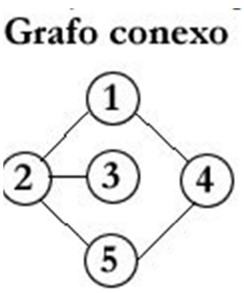
La matriz de adyacencia M de un grafo indica si existe o no una arista entre cada par de vértices.

La matriz M^2 indica el número de caminos de longitud 2 entre dos vértices cualesquiera.

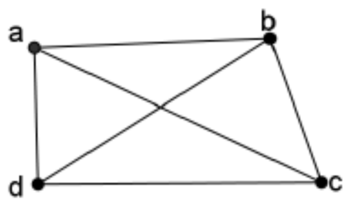
De la misma forma, la matriz M^3 indica el número de caminos de longitud 3 y así sucesivamente.

Definición: Un grafo es **conexo** si cada par de vértices está conectado por un camino; es decir, si para cualquier par de vértices (v1, v2), existe al menos un camino posible desde v1 a v2.

Un grafo es **no conexo**, si hay un par de vértices sin conectar.



Ejemplo: Hallar cuántos caminos de longitud 2 y 3 conectan cada par de vértices del grafo siguiente:



Solución:

$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M^2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M^3 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$