

MATRICES

EJERCICIOS

1. Hallar x e y para que ambas matrices sean iguales: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & x & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 3 & 0 \\ y & 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2. Indicar tres ejemplos de matriz simétrica de orden 3

3. Dadas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 0 \\ 1/2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

hallar: a) A+B b) -B c) A-B d) 2C e) -3A f) A+3B-4C

4. Dadas: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

hallar: a) A·B b) B·A c) A·C d) C·A e) B·C f) C·A g) B² h) A² i) B·B^t j) B³

5. Dada una matriz A, ¿existe una matriz B, tal que el producto AB, o bien el BA, sea una matriz de una sola fila? Indicar ejemplos.

6. Comprobar si existe una matriz B tal que el producto AB sea una matriz de tres filas, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

7. Dadas las siguientes matrices: $A = (2 \ 1 \ 5)$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

escribir los productos AB y BA.

8. El producto de dos matrices diagonales es otra matriz diagonal. Comprobarlo para dos matrices de orden 3.

9. Resolver la ecuación matricial siguiente e indicar la dimensión de la matriz X:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2X = 3 \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Calcular $A^2 - 3A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

11. Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^n = 2^{n-1} A$

12. Calcular, por inducción, las potencias n-ésimas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide: **a)** Calcular A^2 , A^3 y A^4 , deduciendo una fórmula general para A^n
b) Demostrar que la fórmula anterior también es válida para A^{n+1}
c) ¿Cuánto valdría A^{99} ?

14. (S) Calcular A^2 , A^3 y A^{428} dada la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ (Solución: $A^{428} = A^2$)

15. (S) Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ verifica la relación $A^2 + I = 0$. Obtener una matriz $B_{2 \times 2}$, distinta de $\pm A$, que también verifique la relación $B^2 + I = 0$.

16. (S) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, determinar, si es posible, un valor de λ para el que la matriz $(A - \lambda I)^2$ sea la matriz nula. (Solución: $\lambda = 1$)

17. (S) Determinar los valores de x , y , z para que se verifique la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(Soluc: hay cuatro soluciones posibles: $-2, 2, 1$; $2, 2, -1$; $2, -2, 1$; $-2, -2, -1$)

18. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, encontrar la expresión general de la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ tal que el producto de ambas conmute. (Soluc: $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$)

19. Hallar la forma general de las matrices X que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Soluc: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$)

20. a) Encontrar dos matrices X e Y que cumplan:

$$\left. \begin{aligned} 2X + Y &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

b) Ídem con

$$\left. \begin{aligned} 2X - 3Y &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

21. Calcular x, y, z, t para que se cumpla que $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (Soluc: $\begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$)

22. En un centro de estudios de idiomas los alumnos de francés y alemán se distribuyen en 4 niveles como indica la matriz A. Los precios que pagan los alumnos por hora de clase dependen del nivel en que se encuentren y de que el aula disponga o no de puestos de laboratorio de idiomas, según figura en la matriz B. Calcular lo que percibiría este centro educativo por hora de cada idioma impartido dependiendo de que las aulas estén o no dotadas de los medios mencionados.

	FR.	AL.						
1	$\begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 10 & 11 \\ 15 & 11 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$		B= sin lab.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5,5 & 8 & 10 \\ 7 & 7 & 10 & 12 \end{pmatrix}$				
A= 2			con lab.					
3								
4								

(Soluc: haciendo BA obtenemos FR sin lab=33,5 €, FR con lab=42,4 €, AL sin lab=29,850 € y AL con lab=38,3 €)

23. Una factoría produce encendedores P_1 , rotuladores P_2 , y llaveros P_3 , para cuya elaboración se precisan materias primas como gas M_1 , tinta M_2 , plástico M_3 y metal M_4 . Dos compañías distribuidoras D_1 y D_2 se encargan de proporcionar a los comercios estos productos. Sea:

$$A = \begin{matrix} & & P_1 & P_2 & P_3 \\ D_1 & \begin{pmatrix} 1000 & 650 & 400 \end{pmatrix} \\ D_2 & \begin{pmatrix} 1000 & 600 & 350 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

la matriz de pedido de los tres productos por parte de los distribuidores,

$$B = \begin{matrix} & & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ P_1 & \begin{pmatrix} 10 & 0 & 40 & 10 \end{pmatrix} \\ P_2 & \begin{pmatrix} 0 & 20 & 60 & 0 \end{pmatrix} \\ P_3 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 30 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

la matriz que expresa la cantidad de cada una de las materias primas, en gramos, por unidad de cada producto, y

