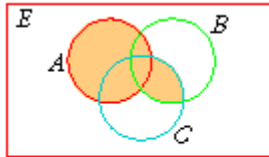


PROBABILIDAD

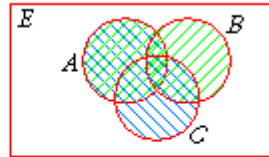
1.- Justifica gráficamente las siguientes igualdades:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

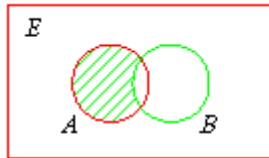
$$A - B = A \cap B'$$



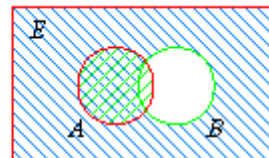
$$A \cup (B \cap C)$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{shaded green} \\ \text{shaded blue} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A \cup B \\ A \cup C \end{array} \quad \text{shaded cross-hatch} \quad (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



$$A - B$$

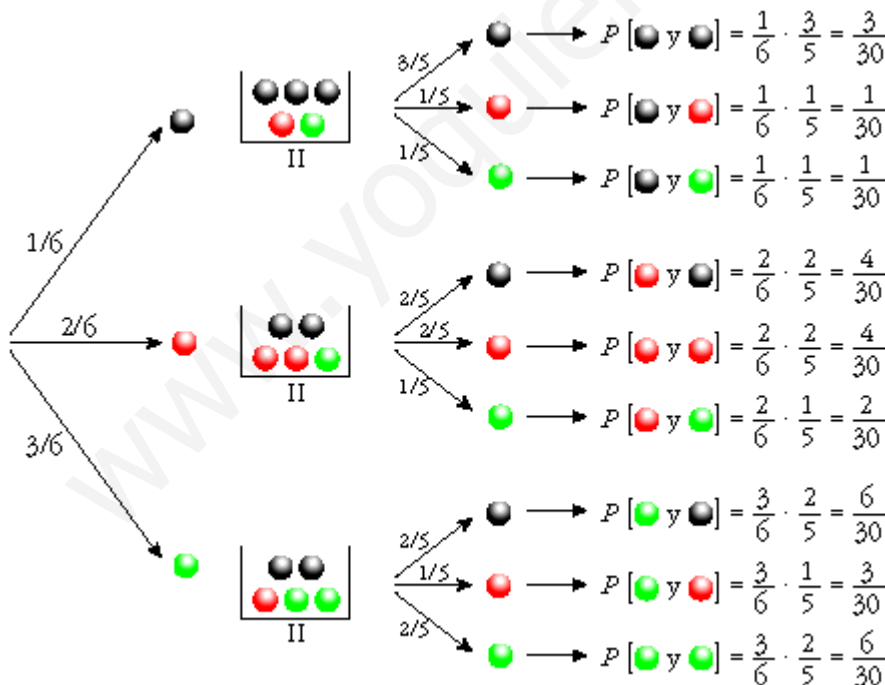


$$\left. \begin{array}{l} \text{shaded green} \\ \text{shaded blue} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A \\ B' \end{array} \quad \text{shaded cross-hatch} \quad A \cap B'$$

2.- Tenemos dos urnas la urna I con 1 bola negra, 2 rojas y 3 verdes, y la urna II con 2 bolas negras, 1 roja y 1 verde. La experiencia consiste en extraer una bola de I, introducirla en II, remover y extraer, finalmente, una bola de II.

Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea:

- a) Roja. b) Verde. c) Negra.



$$a) P[2^{\circ} \text{ (rojo)}] = \frac{1}{30} + \frac{4}{30} + \frac{3}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

$$b) P[2^{\circ} \text{ (verde)}] = \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{6}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

$$c) P[2^{\circ} \text{ (negro)}] = \frac{3}{30} + \frac{4}{30} + \frac{6}{30} = \frac{13}{30}$$

3.-Determina si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B :

$$P[A] = 1/4, P[B] = 1/2, P[A \cup B] = 2/3$$

Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $P[A \cap B] = 0$.

Como:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - P[A \cap B] \Rightarrow P[A \cap B] = \frac{1}{12} \neq 0$$

los sucesos A y B son incompatibles.

4.- Una experiencia aleatoria consiste en preguntar a tres personas distintas, elegidas al azar, si son partidarias o no de consumir un determinado producto.

- Escribe el espacio muestral asociado a dicho experimento utilizando la letra "s" para las respuestas afirmativas y la "n" para las negativas.
- ¿Qué elementos del espacio muestral anterior constituyen el suceso "al menos dos de las personas son partidarias de consumir el producto"?
- Describe el suceso contrario de "más de una persona es partidaria de consumir el producto".

$$a) E = \{(s, s, s), (s, s, n), (s, n, s), (n, s, s), (s, n, n), (n, s, n), (n, n, s), (n, n, n)\}$$

$$b) \{(s, s, s), (s, s, n), (s, n, s), (n, s, s)\}$$

c) El suceso contrario es "una persona, o ninguna, son partidarias de consumir el producto". Por tanto, estaría formado por:

$$\{(s, n, n), (n, s, n), (n, n, s), (n, n, n)\}.$$

Es el suceso contrario al del apartado b).

5.-Una clase se compone de veinte alumnos y diez alumnas. La mitad de las alumnas y la mitad de los alumnos aprueban las matemáticas. Calcula la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, resulte ser:

- Alumna o que aprueba las matemáticas.
- Alumno que suspenda las matemáticas.
- Sabiendo que es alumno, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe las matemáticas?
- ¿Son independientes los sucesos ALUMNO y APRUEBA MATEMÁTICAS?

Hacemos la tabla de contingencia:

	ALUMNOS	ALUMNAS	
APRUEBAN MAT.	10	5	15
SUSPENDEN MAT.	10	5	15
	20	10	30

$$a) P[\text{alumna} \cup \text{aprueba mat.}] = P[\text{alumna}] + P[\text{aprueba mat.}] -$$

$$- P[\text{alumna} \cap \text{aprueba mat.}] = \frac{10}{30} + \frac{15}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$b) P[\text{alumno} \cap \text{suspende mat.}] = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

$$c) P[\text{aprueba mat./alumno}] = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

d) Hay que ver si:

$$P[\text{alumno} \cap \text{aprueba mat.}] = P[\text{alumno}] \cdot P[\text{aprueba mat.}]$$

Calculamos cada una:

$$P[\text{alumno} \cap \text{aprueba mat.}] = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

$$P[\text{alumno}] = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$P[\text{aprueba mat.}] = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

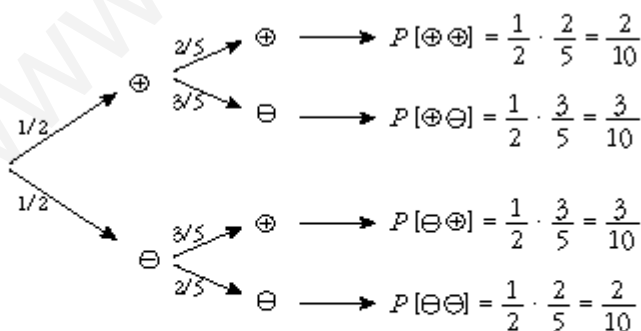
Por tanto, sí son independientes.

6.- En una caja hay seis bolas numeradas, tres de ellas con números positivos y las otras tres con números negativos. Se extrae una bola y después otra, sin reemplazamiento.

a) Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea positivo.

b) Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea negativo.

Hacemos un diagrama en árbol:



$$a) P[⊕⊕] + P[⊖⊖] = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$b) P[⊕⊖] + P[⊖⊕] = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = 0,6$$

7.- En una cierta ciudad, el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene los ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños.

Se escoge una persona al azar:

- Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños?
- Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cabellos castaños?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

Hacemos la tabla:

	OJOS CAST.	OJOS NO CAST.	
CAB. CAST.	15	25	40
CAB. NO CAST.	10	50	60
	25	75	100

$$a) \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0,375$$

$$b) \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$c) \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5$$

8.- De los sucesos A y B se sabe que:

$$P[A] = \frac{2}{5}, P[B] = \frac{1}{3} \text{ y } P[A' \cap B'] = \frac{1}{3}.$$

Halla $P[A \cup B]$ y $P[A \cap B]$.

$$+ P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B]$$

$$\frac{1}{3} = 1 - P[A \cup B] \Rightarrow P[A \cup B] = \frac{2}{3}$$

$$+ P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - P[A \cap B]$$

$$P[A \cap B] = \frac{1}{15}$$

9.- Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad, de manera que:

$$P[A] = 0,4, P[B] = 0,3 \text{ y } P[A \cap B] = 0,1$$

Calcula razonadamente:

a) $P[A \cup B]$

b) $P[A' \cup B']$

c) $P[A/B]$

d) $P[A' \cap B']$

$$a) P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,4 + 0,3 - 0,1 = 0,6$$

$$b) P[A' \cup B'] = P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B] = 1 - 0,1 = 0,9$$

$$c) P[A/B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

$$d) P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] = 1 - 0,6 = 0,4$$

10.- Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno de ellos.

a) Un alumno sabe 6 temas. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar el examen?

b) ¿Qué probabilidad tiene el mismo alumno de saberse uno de los temas elegidos y el otro no?

$$\begin{aligned} \text{a) } P[\text{APROBAR}] &= P[\text{SABE } 1^{\text{a}} \text{ Y } 2^{\text{a}}] + P[\text{SABE } 1^{\text{a}} \text{ Y NO } 2^{\text{a}}] + P[\text{NO SABE } 1^{\text{a}} \text{ Y } 2^{\text{a}}] = \\ &= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{30}{90} + \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{78}{90} = \frac{13}{15} = 0,87 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P[\text{SABE } 1^{\text{a}} \text{ Y NO } 2^{\text{a}}] + P[\text{NO SABE } 1^{\text{a}} \text{ Y } 2^{\text{a}}] &= \\ &= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15} = 0,53 \end{aligned}$$

11.- Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es 0,6. La probabilidad de que pase la segunda es 0,8 y la de que pase ambas es 0,5. Se pide:

a) Probabilidad de que pase al menos una prueba.

b) Probabilidad de que no pase ninguna prueba.

c) ¿Son las pruebas sucesos independientes?

d) Probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera.

Tenemos que:

$$P[\text{pase } 1^{\text{a}}] = 0,6; \quad P[\text{pase } 2^{\text{a}}] = 0,8; \quad P[\text{pase } 1^{\text{a}} \cap \text{pase } 2^{\text{a}}] = 0,5$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P[\text{pase } 1^{\text{a}} \cup \text{pase } 2^{\text{a}}] &= P[\text{pase } 1^{\text{a}}] + P[\text{pase } 2^{\text{a}}] - P[\text{pase } 1^{\text{a}} \cap \text{pase } 2^{\text{a}}] = \\ &= 0,6 + 0,8 - 0,5 = 0,9 \end{aligned}$$

$$\text{b) } 1 - P[\text{pase al menos una}] = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$\text{c) } P[\text{pase } 1^{\text{a}}] \cdot P[\text{pase } 2^{\text{a}}] = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48$$

$$P[\text{pase } 1^{\text{a}} \cap \text{pase } 2^{\text{a}}] = 0,5 \neq 0,48$$

No son independientes.

$$\begin{aligned} \text{d) } P[\text{pase } 2^{\text{a}} / \text{no pase } 1^{\text{a}}] &= \frac{P[\text{pase } 2^{\text{a}} \cap \text{no pase } 1^{\text{a}}]}{P[\text{no pase } 1^{\text{a}}]} = \\ &= \frac{P[\text{pase } 2^{\text{a}}] - P[\text{pase } 1^{\text{a}} \cap \text{pase } 2^{\text{a}}]}{P[\text{no pase } 1^{\text{a}}]} = \\ &= \frac{0,8 - 0,5}{1 - 0,6} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4} = 0,75 \end{aligned}$$

12.- Un aparato eléctrico está constituido por dos componentes A y B. Sabiendo que hay una probabilidad de 0,58 de que no falle ninguno de los componentes y que en el 32% de los casos falla B no habiendo fallado A, determina, justificando la respuesta, la probabilidad de que en uno de tales aparatos no falle la componente A.

Llamamos $A = \text{"falla A"}; B = \text{"falla B"}$.



Tenemos que:

$$P[A' \cap B] = 0,58; P[B \cap A'] = 0,32$$

Así:

$$P[A'] = P[A' \cap B] + P[B \cap A'] = 0,58 + 0,32 = 0,90$$

$$(A' \cap B) \cup (B \cap A') = A'$$

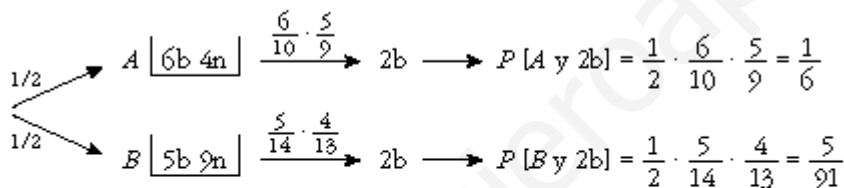
La probabilidad de que no falle A es de 0,90.

13.- Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 negras y 4 rojas. Si se extraen tres bolas con reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 blancas y una roja?

$$P[BBR] + P[BRE] + P[RBB] = 3 \cdot P[BBR] = 3 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{4}{20} = \frac{3}{20} = 0,15$$

14.- Una urna A contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Otra urna B tiene 5 blancas y 9 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser blancas. Halla la probabilidad de que la urna elegida haya sido la A.

Hacemos un diagrama en árbol:



$$P[2b] = \frac{1}{6} + \frac{5}{91} = \frac{121}{546}$$

La probabilidad pedida será:

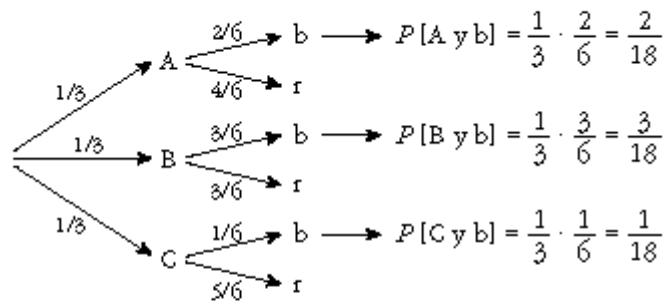
$$P[A/2b] = \frac{P[A \text{ y } 2b]}{P[2b]} = \frac{1/6}{121/546} = \frac{91}{121} = 0,752$$

15.- Se dispone de tres urnas: la A que contiene dos bolas blancas y cuatro rojas, la B con tres blancas y tres rojas; y la C con una blanca y cinco rojas.

a) Se elige una urna al azar y se extrae una bola de ella. ¿Cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca?

b) Si la bola extraída resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

a) Hacemos un diagrama en árbol:



$$P[b] = \frac{2}{18} + \frac{3}{18} + \frac{1}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} = 0,33$$

$$b) P[B|b] = \frac{P[B \text{ y } b]}{P[b]} = \frac{3/18}{6/18} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

16.- Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P[A \cup B] = \frac{3}{4}; \quad P[B^c] = \frac{2}{3}; \quad P[A \cap B^c] = \frac{1}{4}.$$

Halla $P[B]$, $P[A]$, $P[A' \cap B]$.

$$P[B] = 1 - P[B^c] = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

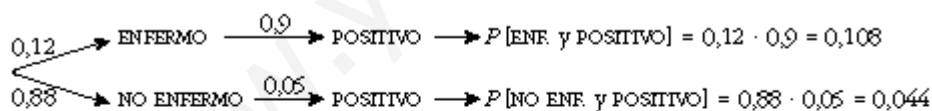
$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$\frac{3}{4} = P[A] + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \Rightarrow P[A] = \frac{2}{3}$$

$$P[A' \cap B] = P[B] - P[A \cap B] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

17.- En cierto país donde la enfermedad X es endémica, se sabe que un 12% de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totalmente fiable, ya que da positiva en el 90% de los casos de personas realmente enfermas y también da positiva en el 5% de personas sanas.

¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positiva?



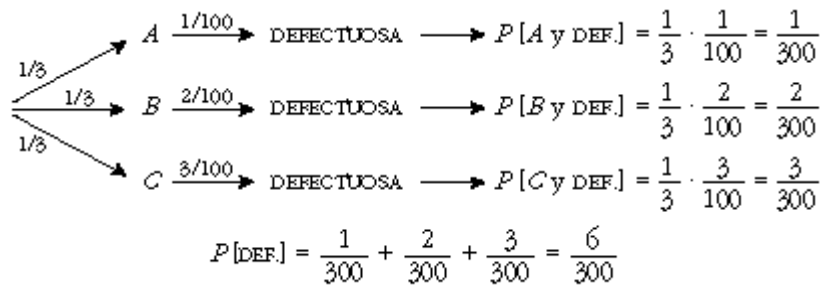
$$P[\text{POSITIVO}] = 0,108 + 0,044 = 0,152$$

La probabilidad pedida será:

$$P[\text{NO ENF.} / \text{POSITIVO}] = \frac{P[\text{NO ENF. Y POSITIVO}]}{P[\text{POSITIVO}]} = \frac{0,044}{0,152} = 0,289$$

18.- En tres máquinas, A , B y C , se fabrican piezas de la misma naturaleza. El porcentaje de piezas que resultan defectuosas en cada máquina es, respectivamente, 1%, 2% y 3%.

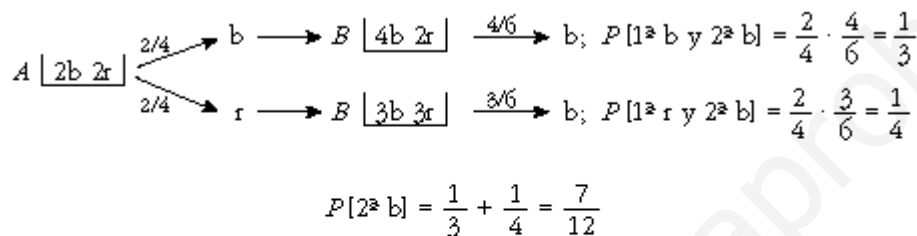
Se mezclan 300 piezas, 100 de cada máquina, y se elige una pieza al azar, que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina A ?



La probabilidad pedida será:

$$P[A/\text{DEF.}] = \frac{P[A \text{ y DEF.}]}{P[\text{DEF.}]} = \frac{1/300}{6/300} = \frac{1}{6}$$

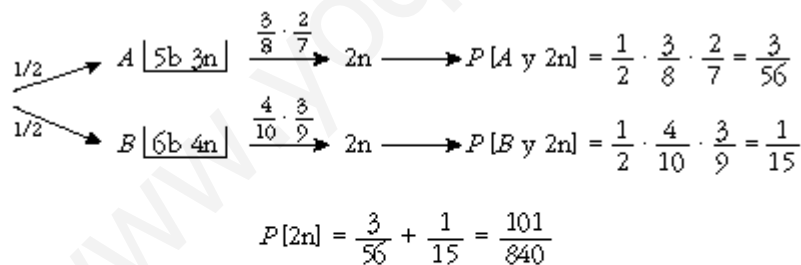
19.- Una caja A contiene dos bolas blancas y dos rojas, y otra caja B contiene tres blancas y dos rojas. Se pasa una bola de A a B y después se extrae una bola de B, que resulta blanca. Determina la probabilidad de que la bola trasladada haya sido blanca.



Por tanto, la probabilidad pedida será:

$$P[1^{\circ} b/2^{\circ} b] = \frac{P[1^{\circ} b \text{ y } 2^{\circ} b]}{P[2^{\circ} b]} = \frac{1/3}{7/12} = \frac{4}{7}$$

20.- Una urna A contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna B, 6 blancas y 4 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser negras. Halla la probabilidad de que la urna elegida haya sido la B.

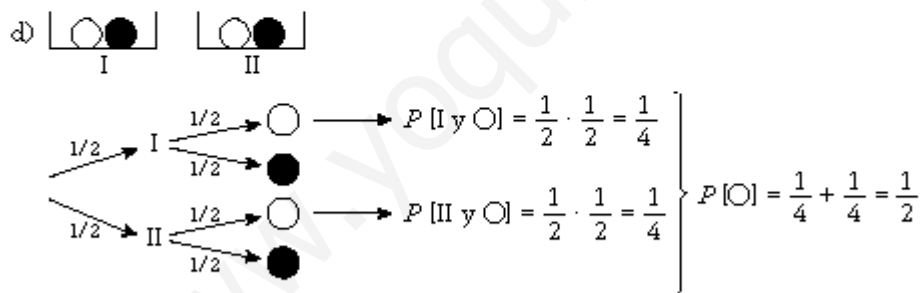
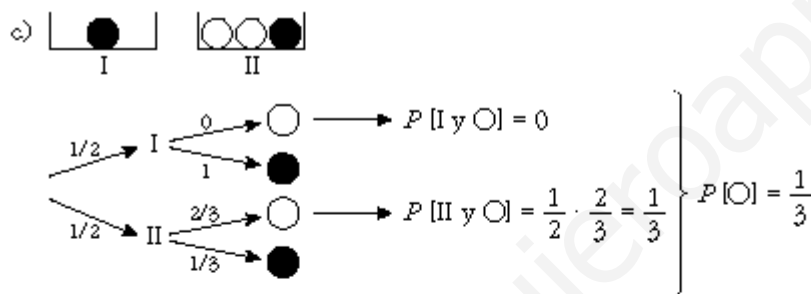
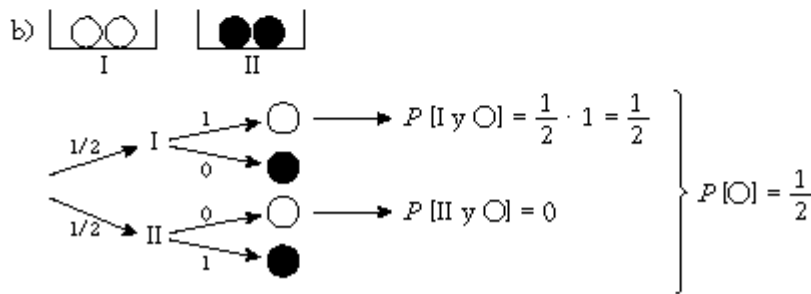
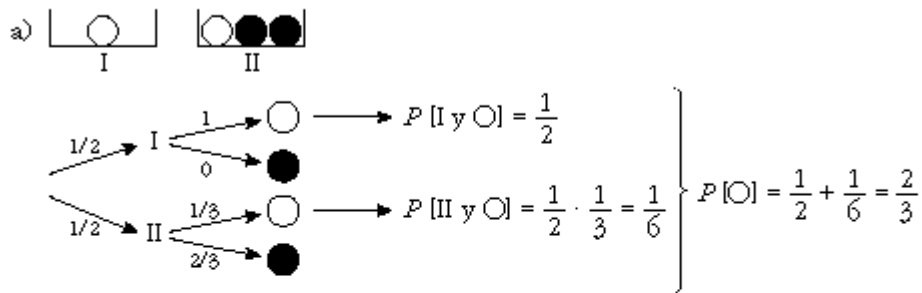


Por tanto, la probabilidad pedida será:

$$P[B/2n] = \frac{P[B \text{ y } 2n]}{P[2n]} = \frac{1/15}{101/840} = \frac{56}{101}$$

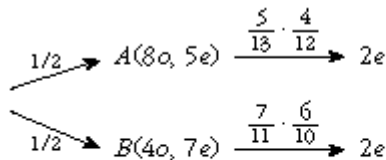
21.- Tengo dos urnas, dos bolas blancas y dos bolas negras. Se desea saber cómo debo distribuir las bolas en las urnas para que, al elegir una urna al azar y extraer de ella una bola al azar, sea máxima la probabilidad de obtener bola blanca. La única condición exigida es que cada urna tenga al menos una bola.

Hay cuatro posibles distribuciones. Veamos cuál es la probabilidad de obtener blanca en cada caso:



Para obtener la máxima probabilidad de obtener una bola blanca, deberemos colocar una bola blanca en una de las urnas y las otras tres bolas en la otra urna.

22.- Sean A y B dos montones de cartas. En A hay 8oros y 5 espadas y, en B , 4oros y 7 espadas. Sacamos dos cartas del mismo montón y resulta que ambas son espadas. Halla la probabilidad de que las hayamos sacado del montón B .



$$P[A \text{ y } 2e] = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} = \frac{5}{78}$$

$$P[B \text{ y } 2e] = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{21}{110}$$

$$P[2e] = \frac{5}{78} + \frac{21}{110} = \frac{547}{2145}$$

Así, tenemos que:

$$P[B/2e] = \frac{P[B \text{ y } 2e]}{P[2e]} = \frac{21/110}{547/2145} = \frac{819}{1094} = 0,749$$

23.- Sean A y B dos sucesos tales que $P[A] = 0,40$; $P[B/A] = 0,25$ y $P[B] = b$.

Halla:

a) $P[A \cap B]$.

b) $P[A \cup B]$ si $b = 0,5$.

c) El menor valor posible de b .

d) El mayor valor posible de b .

$$\text{a) } P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B/A] = 0,40 \cdot 0,25 = 0,1$$

$$\text{b) } P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,40 + 0,5 - 0,1 = 0,8$$

c) El menor valor posible de b es $P[B] = P[A \cap B]$, es decir, $0,1$.

d) El mayor valor posible de b es: $1 - (P[A] - P[A \cap B]) = 1 - (0,4 - 0,1) = 0,7$

24.- En una baraja de 40 cartas, se toman tres cartas distintas. Calcula la probabilidad de que las tres sean números distintos.

$$\begin{aligned} P[3 \text{ números distintos}] &= 1 \cdot P[2^\text{ª} \text{ dist. de la } 1^\text{ª}] \cdot P[3^\text{ª} \text{ dist. de la } 1^\text{ª} \text{ y de la } 2^\text{ª}] = \\ &= 1 \cdot \frac{36}{39} \cdot \frac{32}{38} = \frac{192}{247} \end{aligned}$$

25.- Escogidas cinco personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas hayan nacido en el mismo día de la semana (es decir, en lunes, martes, etc.)?

$$\begin{aligned} P[\text{ninguna coincidencia}] &= 1 \cdot P[2^\text{ª} \text{ en distinto día que la } 1^\text{ª}] \cdot \dots \\ &\dots \cdot P[5^\text{ª} \text{ en distinto día que } 1^\text{ª}, 2^\text{ª}, 3^\text{ª} \text{ y } 4^\text{ª}] = \\ &= 1 \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{360}{2401} = 0,15 \end{aligned}$$

$$P[\text{alguna coincidencia}] = 1 - P[\text{ninguna coincidencia}] = 1 - 0,15 = 0,85$$