EJERCICIOS. LÍMITES DE FUNCIONES. MATEMÁTICAS II.

1. Calcula los límites laterales y el límite, cuando exista, de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

   a) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+5, & si \quad x<3 \\ 7, & si \quad x=3 \\ 3x-1, & si \quad x>3 \end{cases}$ en x=3

   b) $f(x)=\begin{cases} x^2+3, & si \quad x\leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x-1}, & si \quad x>1 \end{cases}$ en x=1

2. Dada la función $f(x)=\begin{cases} e^x, & si \quad x\leqslant 0 \\ x+1, & si \quad 0\leqslant x<2 \\ x^2, & si \quad x\geqslant 2 \end{cases}$. Calcula los límites laterales y el límite, si existen, en x=0 y en x=2.

3. Halla los límites cuando x tiende a 1 y a -1 de la función $f(x)=|x^2-1|$.

4. Dada la función $f(x)=|x-2|+x$:

   a) Escribe esta función como una función definida a trozos.
   b) Halla los límites laterales y el límite, si existen, de la función cuando $x\to 2$.
   c) Representa gráficamente la función.

5. Estudia las asíntotas de las funciones:

   a) $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x-2}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2}$

6. Calcula los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5}$

   c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5}{x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^2-5x+6\right)$

7. Halla los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+x}{x}$

   c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{7x+\sqrt{3x-2}}{2x}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}\right)$

8. Determina los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{2x-4}$

9. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2}{x-1} - \dfrac{x^2}{x+1} \right)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-2x} - x \right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{x+1} \cdot \sqrt{x^2+1} \right)$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2+2x}{x^2-3x}$

10. Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{3}{x} \right)^{6x+2}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x}{x+3} \right)^{3x+1}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2} \right)^{x-1}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{2x}}$

SOLUCIONES:

1. a) El límite lateral a la izquierda en x=3 es 8, que coincide con el límite lateral a la derecha. Por tanto, podemos decir que existe el límite cuando x tiende a 3 y vale 8.
   b) El límite lateral a la izquierda en x=1 es 4, mientras que el límite lateral a la derecha es ∞. Por lo tanto, decimos que no existe el límite cuando x tiende a 1.

2. El límite lateral a la izquierda cuando x tiende a 0 es 1, que coincide con el límite lateral a la derecha. Por tanto, podemos decir que existe el límite cuando x tiende a 0 y vale 1.
   El límite lateral a la izquierda cuando x tiende a 2 es 3, mientras que el límite lateral a la derecha es 4. Por tanto, no existe el límite cuando x tiende a 2.

3. Escribimos primero la función como una función definida a trozos:

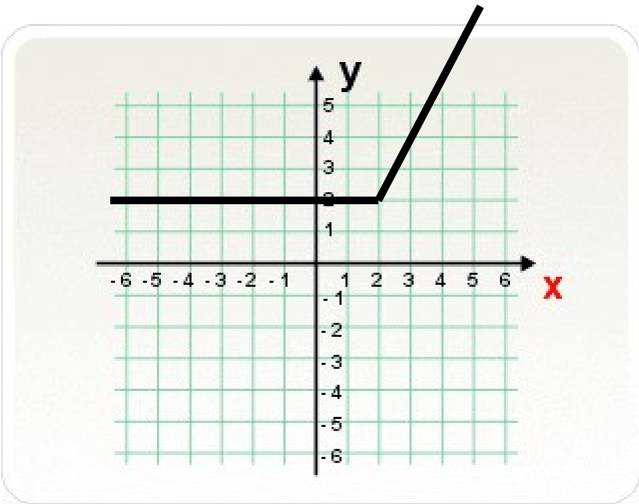
$$f(x) = |x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, & si \quad x \leqslant -1 \\ -x^2+1, & si \quad -1 < x < 1 \\ x^2-1, & si \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

   Tanto el límite lateral a la izquierda como el límite lateral a la derecha en x=1 y en x=-1 coinciden y valen 0, y por tanto podemos decir que los límite en x=1 y en x=-1 existen y valen 0.

4. a) $f(x) = |x-2| + x = \begin{cases} -x+2+x, & si \quad x<2 \\ x-2+x, & si \quad x \geqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} 2, & si \quad x<2 \\ 2x-2, & si \quad x \geqslant 2 \end{cases}$.
   b) El límite lateral a la izquierda en x=2 coincide con el límite lateral a la derecha y valen 2.

Por tanto, podemos decir que existe el límite cuando x tiende a 2 y su valor es 2.

c)



5. a) $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x-2}$

La recta x=2 es una asíntota vertical.
La función no tiene asíntota horizontal.
La recta y=3x+6 es asíntota oblicua.

b) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2}$

La recta x=0 es asíntota vertical.
La recta y=1 es asíntota horizontal.
La función no tiene asíntota oblicua.

6. a) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-3}=-\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5}=0$

c) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x+1}=0$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-5x+6\right)=+\infty$

7. a) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}=+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+x}{x}=1$

c) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{7x+\sqrt{3x-2}}{2x}=\dfrac{7}{2}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}\right)=0$

8. a) $\lim_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2}=0$

b) $\lim_{x\to0}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}=2$

c) $\lim_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

d) $\lim_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{2x-4}=6$

9. a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x+1}\right)=+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)=-1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{x+1} \cdot \sqrt{x^2+1} \right) = 2$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2+2x}{x^2-3x} = \dfrac{-2}{3}$

10. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{3}{x} \right)^{6x+2} = e^{-18} = \dfrac{1}{e^{18}}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x}{x+3} \right)^{3x+1} = e^{-9} = \dfrac{1}{e^{9}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2} \right)^{x-1} = 1$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{2x}} = 1$