EJERCICIOS: GEOMETRÍA EUCLÍDEA. PRODUCTO ESCALAR.

1. Considera las rectas que se cortan en el punto P(1,0,-1) y cuyos vectores directores son $\vec{u}=(2,1,-2)$ y $\vec{v}=(2,-2,-1)$, respectivamente. Escribe las ecuaciones de la recta y determina el ángulo que forman al cortarse.

2. Dos rectas que se cortan en el punto P(5,-2,7) y cuyos vectores de dirección son $\vec{u}=(0,1,1)$ y $\vec{v}=(a,1,0)$, respectivamente, forman un ángulo de 60º. Determina los posibles valores del parámetro *a*.

3. Decide si el triángulo de vértices A(-2,4,0), B(3,-3,1) y C(6,-2,4) es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

4. Determina el ángulo formado entre la recta $r:\frac{x}{2}=y=z$ y el plano π: $2x-y-z=0$.

5. Determina el valor o los valores del parámetro m para que la recta $r:x=\frac{y}{m}=-z$ y el plano π: $x-z=0$ formen un ángulo de 30º.

6. Determina el punto simétrico del punto P(-2,3,1) sobre el eje OZ.

7. Determina el punto simétrico del punto P(2,-1,3) respecto del plano OXY.

8. ¿Es isósceles el triángulo de vértices A(2,5,-1), B(3,-2,4) y C(-2,-3,11)?

9. Determina un punto de la recta $r:\begin{cases} x-z=2 \\ y+2z=3 \end{cases}$ que se encuentra a una distancia de $\sqrt{6}$ unidades al plano de ecuación π: $x-y-2z+5=0$.

10. Dados la recta $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{2}$ y los planos $\pi_1:3x+4y=1$ y $\pi_2:4x-3y=1$, determina los puntos de la recta que equidistan de ambos planos.

11. Sea el plano π: $x+2y+3z=12$. Halla la ecuación de los planos paralelos a π y cuya distancia al origen de coordenadas sea de $\sqrt{14}$ unidades.

12. Dos caras de un cubo están en los planos $\pi_1:2x-2y+z-1=0$ y $\pi_2:2x-2y+z-5=0$. Calcula la longitud de la arista del cubo.

13. Determina la ecuación de un plano paralelo a la recta $r:x=\frac{y}{-2}=z-1$ y que contenga a los puntos A(2,-3,5) y B(-4,1,1). Calcula la distancia de la recta *r* al plano encontrado.

14. Determina la proyección ortogonal del punto P(2,2,0) sobre la recta $r:\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=3+t \end{cases}$.

SOLUCIONES:

1. Considera las rectas que se cortan en el punto P(1,0,-1) y cuyos vectores directores son $\vec{u}=(2,1,-2)$ y $\vec{v}=(2,-2,-1)$, respectivamente. Escribe las ecuaciones de la recta y determina el ángulo que forman al cortarse.

Sea la recta r que pasa por el punto P y cuyo vector de dirección es $\vec{u}=(2,1,-2)$. Su ecuación continua es:

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{-1}$$

Sea la recta s que pasa por el punto P y cuyo vector de dirección es $\vec{v}=(2,-2,-1)$. Su ecuación continua es:

$$s: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{-1}$$

El ángulo que forman las rectas r y s sería:

$$\cos(\widehat{r,s})=\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\left|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right|=\frac{4}{9}$$. Por tanto: $$(\widehat{r,s})=\arccos\left(\frac{4}{9}\right)=63^{o}36'44''$$

2. Dos rectas que se cortan en el punto P(5,-2,7) y cuyos vectores de dirección son $\vec{u}=(0,1,1)$ y $\vec{v}=(a,1,0)$, respectivamente, forman un ángulo de 60º. Determina los posibles valores del parámetro *a*.

El ángulo que forman las dos rectas es el ángulo que forman sus vectores de dirección. Sabemos que:

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\cos 60^{o}=\frac{1}{2}$$. Por tanto: $$\left|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right|=\frac{1}{2}$$, y resolviendo la ecuación obtendremos que $a=1$.

3. Decide si el triángulo de vértices A(-2,4,0), B(3,-3,1) y C(6,-2,4) es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

Hallamos los ángulos que formarían los lados del triángulo, es decir los ángulos que forman los vectores:

$\overrightarrow{AB}=(5,-7,1)$ $\overrightarrow{AC}=(8,-6,4)$ $\overrightarrow{BC}=(3,1,3)$

$\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ es positivo, y por tanto el ángulo es agudo.

$\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ Es negativo, y por tanto el ángulo es obtuso.

Como uno de los ángulos del triángulo es obtuso, se trata de un triángulo obstusángulo.

4. Determina el ángulo formado entre la recta $r: \frac{x}{2}=y=z$ y el plano π: $2x-y-z=0$.

El vector de dirección de la recta es $\vec{v}_r=(2,1,1)$ y el vector normal del plano es $\vec{n}_\pi=(2,-1,-1)$

$\operatorname{sen}(\widehat{r,s})=\cos(\widehat{\vec{v}_r,\vec{n}_\pi})=\frac{1}{3}$. Por tanto: $(\widehat{r,\pi})=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{3}\right)=19^o 28' 16''$

5. Determina el valor o los valores del parámetro m para que la recta $r: x=\frac{y}{m}=-z$ y el plano π: $x-z=0$ formen un ángulo de 30º.

El vector de dirección de la recta es $\vec{v}_r=(1,m,-1)$ y el vector normal al plano es $\vec{n}_\pi=(1,0,-1)$

$\operatorname{sen}(\widehat{r,s})=\cos(\widehat{\vec{v}_r,\vec{n}_\pi})=\operatorname{sen}30^o=\frac{1}{2}$, y resolviendo la ecuación obtenemos que $m=7$.

6. Determina el punto simétrico del punto P(-2,3,1) sobre el eje OZ.

Sea π el plano perpendicular al eje OZ que contiene al punto P. Tomando como punto del plano el propio P, y como vector normal al plano, el vector de dirección del eje OZ, es decir, $\vec{k}=(0,0,1)$, obtenemos que la ecuación del plano π: z-1=0.

Hallamos el punto M = $\text{Eje}\,\text{OZ}\cap\pi$ = (0,0,1).

Sea el punto simétrico $P'(x,y,z)$. Como M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, hallamos las coordenadas del punto $P'(2,-3,1)$.

7. Determina el punto simétrico del punto P(2,-1,3) respecto del plano OXY.

Sea r la recta perpendicular al plano OXY y que pasa por el punto P. Tomamos como punto de r al propio punto P y como vector de dirección de r al vector normal al plano OXY $\vec{v}_r=(0,0,1)$,

tenemos que la ecuación de la recta es $r:\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=3+t \end{cases}$.

Hallamos el punto M = $r\cap\text{Plano}\,\text{OXY}$ = (2,-1,0)

Sea el punto simétrico $P'(x,y,z)$. Como M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, hallamos las coordenadas del punto $P'(2,-1,-3)$.

8. ¿Es isósceles el triángulo de vértices A(2,5,-1), B(3,-2,4) y C(-2,-3,11)?

Hallamos la longitud de los lados del triángulo, que no son más que los módulos de los vectores que unen sus vértices:

$d(A,B)=|\overrightarrow{AB}|=5\sqrt{3}$ $d(A,C)=|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{61}$ $d(B,C)=|\overrightarrow{BC}|=5\sqrt{3}$

Como el triángulo tiene dos lados iguales, entonces si es un triángulo isósceles.

9. Determina un punto de la recta $r: \begin{cases} x-z=2 \\ y+2z=3 \end{cases}$ que se encuentra a una distancia de $\sqrt{6}$ unidades al plano de ecuación π: $x-y-2z+5=0$.

La ecuación en forma paramétrica de la recta $r: \begin{cases} x=2+t \\ y=3-2t \\ z=t \end{cases}$. Hay que encontrar un punto de la forma $P(2+t, 3-2t, t)$ cuya distancia al plano π sea $\sqrt{6}$:

$$d(P,\pi)=\frac{|(2+t)-(3-2t)-2t+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{|t+4|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} t+4=6 \Rightarrow t=2 \\ t+4=-6 \Rightarrow t=-10 \end{cases}$$

Por tanto, hay dos soluciones:

$P_1(4,-1,2)$ y $P_2(-8,23,-10)$.

10. Dados la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{2}$ y los planos $\pi_1: 3x+4y=1$ y $\pi_2: 4x-3y=1$, determina los puntos de la recta que equidistan de ambos planos.

La ecuación de la recta en forma paramétrica es: $r: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \\ z=-2+2t \end{cases}$. Tenemos que encontrar un punto de la forma $P(1+2t, -1+3t, -2+2t)$ cuya distancia a ambos planos sea la misma:

$$d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2)$$

$d(P,\pi_1)=\frac{|3(1+2t)+4(-1+3t)-1|}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}}$ y $d(P,\pi_2)=\frac{|4(1+2t)-3(-1+3t)-1|}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}}$, igualando y desarrollando obtenemos:

$$|18t-2|=|2t+9| \Rightarrow \begin{cases} 18t-2=2t+9 \Rightarrow t=\frac{11}{16} \\ 18t-2=-2t-9 \Rightarrow t=\frac{-7}{20} \end{cases}$$

Tenemos por tanto dos soluciones:

$$P_1\left(\frac{19}{8}, \frac{17}{16}, \frac{-5}{8}\right)$$

$$P_2\left(\frac{3}{10}, \frac{-41}{20}, \frac{-27}{10}\right)$$

11. Sea el plano π: $x+2y+3z=12$. Halla la ecuación de los planos paralelos a π y cuya

distancia al origen de coordenadas sea de $\sqrt{14}$ unidades.

Sea π' un plano paralelo a π, por lo que su ecuación será de la forma π': $x+2y+3z+D=0$.

De los planos pedidos sabemos que $d(O,\pi')=\sqrt{14}$, luego:

$$d(O,\pi')=\frac{|0+2\cdot 0+3\cdot 0+D|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\sqrt{14}\Rightarrow |D|=14\Rightarrow\begin{cases} D=14\\ D=-14\end{cases} .$$

Por tanto tenemos dos planos solución:

$x+2y+3z+14=0$

$x+2y+3z-14=0$

12. Dos caras de un cubo están en los planos $\pi_1: 2x-2y+z-1=0$ y $\pi_2: 2x-2y+z-5=0$. Calcula la longitud de la arista del cubo.

Dado que los dos planos dados son paralelos, la arista del cubo sería la distancia entre los dos planos:

Tomamos el punto $P(0,0,1)\in\pi_1$:

Arista = $d(\pi_1,\pi_2)=d(P,\pi_2)=\frac{|2\cdot 0-2\cdot 0+1-5|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{4}{3}u$

13. Determina la ecuación de un plano paralelo a la recta $r: x=\frac{y}{-2}=z-1$ y que contenga a los puntos A(2,-3,5) y B(-4,1,1). Calcula la distancia de la recta *r* al plano encontrado.

Sea el plano π paralelo a la recta r y que pasa por los puntos A y B.

Un punto del plano sería A(2,-3,5)
Los vectores de dirección del plano serían:
El vector de dirección de la recta r: $\vec{v}_r=(1,-2,1)$ y el vector $\vec{AB}=(-6,4,-4)$.

Por tanto la ecuación del plano sería:

$$\pi:\begin{vmatrix} x-2 & 1 & -6\\ y+3 & -2 & 4\\ z-5 & 1 & -4\end{vmatrix}=0$$, desarrollando $\pi: 2x-y-4z+13=0$

14. Determina la proyección ortogonal del punto P(2,2,0) sobre la recta $r:\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=3+t \end{cases}$.

Sea π el plano perpendicular a ala recta r que contiene al punto P:

Punto del plano π: P(2,2,0)
Vector normal al plano π: Sería el vector de dirección de la recta: $\vec{n}_\pi=\vec{u}_r=(1,-1,1)$.

La ecuación del plano π será de la forma:

π: $x-y-z+D=0$. Sabiendo que $P\in\pi$, obtenemos que $D=0$.

Por tanto, π: $x-y-z=0$.

La proyección del punto P sobre la recta sería:

$M=r\cap\pi$ y resolviendo el sistema que forman las ecuaciones de la recta y el plano obtenemos que $M(3,-3,6)$.