EJERCICIOS: GEOMETRÍA AFÍN DEL ESPACIO. MATEMÁTICAS II.

1. Dados los vectores $\vec{u}=(2,0,-1)$, $\vec{v}=(1,3,-1)$ y $\vec{w}=(2,-2,1)$, halla:

a) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$.

b) $3\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}$

2. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(1,0,0) y por el punto medio del segmento cuyos extremos son P(1,0,2) y Q(5,2,-4).

3. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A(0,-1,2) y es paralela a la recta
$r: x=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$.

4. Escribe la ecuación de un plano que pasa por el punto P(0,1,1) y contiene ala recta

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=1+2t \end{cases}$$

5. Comprueba si son coplanarios los puntos A(2,-2,3), B(0,0,2), C(-2,0,1) y D(-2,-5,1).

6. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P(2,1,2) y es paralelo al plano $x+y-z=4$.

7. Dados el punto A(2,-1,0) y la recta $r: \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$, calcula:

a) La ecuación de la recta *s* paralela a *r* que pasa por el punto A.

b) La ecuación del plano que contiene a las rectas *r* y *s*.

8. Estudia la posición relativa de los planos:

$$\pi:\begin{cases} x=2+2t+s \\ y=-1+2t-3s \\ z=1+5s \end{cases} \qquad \pi':-5x+5y+4z=12 \ .$$

9. Estudia la posición relativa de este trío de planos:

$$\pi: 4x+y+3z+2=0$$
$$\pi': -3x+5y+4z-7=0$$
$$\pi'': y+3z-6=0$$

10. Calcula el valor de *m* para que las siguientes rectas se corten en un punto:

$$r: \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1}$$

$$s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 6+4t \\ z = -1+2t \end{cases}$$

11. Determina la posición relativa entre la recta $r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x+my-z-6=0$.

SOLUCIONES:

1. Dados los vectores $\vec{u}=(2,0,-1)$, $\vec{v}=(1,3,-1)$ y $\vec{w}=(2,-2,1)$, halla:

a) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{5}\,u$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{11}\,u$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = 3u$$

b) $3\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w} = 3\cdot(2,0,-1)+2\cdot(1,3,-1)-(2,-2,1)=(6,8,-6)$

2. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(1,0,0) y por el punto medio del segmento cuyos extremos son P(1,0,2) y Q(5,2,-4).

Punto medio del segmento $\overline{PQ}$: M $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{-2-4}{2}\right) = (3,1,-3)$

Recta que pasa por los puntos A y M: Tomamos como punto de la recta A(1,0,0) y como vector de dirección: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2,1,-3)$.

Ec. Vectorial: $(x,y,z)=(1,0,0)+t\cdot(2,1,-3)$

Ec. Paramétricas: $\left.\begin{array}{c} x=1+2\text{t} \\ y=t \\ z=-3\text{t} \end{array}\right\}$

Ec. Continua: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-3}$

Ec. Implícitas: $\begin{cases} x-2\text{y}=1 \\ 3\text{x}+2\text{z}=3 \end{cases}$

3. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A(0,-1,2) y es paralela a la recta $r: x=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$.

Sea s la recta paralela a r que pasa por el punto A: Como punto de la recta s tomamos el punto A(0,-1,2) y como vector de dirección tomaremos el vector de dirección de la recta r por ser paralelas: $\vec{v}_s=\vec{v}_r=(1,2,3)$. Por tanto la ecuación continua de la recta s es:

$$s: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$$

4. Escribe la ecuación de un plano que pasa por el punto P(0,1,1) y contiene ala recta

$$r: \begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=1+2t \end{cases}$$

Sea π el plano que contiene a r y pasa por el punto P:

Tomamos un punto Q de la recta r, por ejemplo: Q(1,1,1). Para dar la ecuación del plno necesitmos un punto, podemos tomar P(0,1,1) y dos vectores de dirección: $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(0,0,-1)$ y $\vec{v}=\vec{v}_r=(0,1,2)$. La ecuación general del plano queda:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad ; \pi: \quad x=0$$

5. Comprueba si son coplanarios los puntos A(2,-2,3), B(0,0,2), C(-2,0,1) y D(-2,-5,1).

Hallamos el plano π que pasa por los puntos A, B y C:

Tomamos como punto del plano a A(2,-2,3) y como vectores de dirección a $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-2,2,-1)$ y $\vec{v}=\overrightarrow{AC}=(-4,2,-2)$. La ecuación general del plano π queda:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 & -4 \\ y+2 & 2 & 2 \\ z-3 & -1 & -2 \end{vmatrix}=0 \quad ; \pi: \quad -x+2z-4=0$$

D es coplanario con A, B y C si pertenece al plano π ,es decir, si verifica la ecuación del plano. Como D no verifica la ecuación del plano, los puntos no están alineados.

6. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P(2,1,2) y es paralelo al plano $x+y-z=4$.

Sea π' el plano paralelo a π: $x+y-z=4$ que pasa por P. La ecuación del plano π' tendrá la forma:

$x+y-z=D$. Como $P \in \pi'$, entonces verifica su ecuación y por tanto D=1.

La ecuación del plano π' queda entonces: $x+y-z=1$.

7. Dados el punto A(2,-1,0) y la recta $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$, calcula:

a) La ecuación de la recta *s* paralela a *r* que pasa por el punto A.

Tenemos un punto de la recta s que es A(2,-1,0) y su vector de dirección será el mismo que el de la recta r: $\vec{v}_s = \vec{v}_r = (3,1,2)$. Por tanto la ecuación de la recta s queda:

$$s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$$

b) La ecuación del plano que contiene a las rectas *r* y *s*.

Sea π el plano que contiene a ambas rectas. Un punto de la recta r y por tanto del plano sería B(1,-2,0). Tomamos como punto del plano al punto A(2,-1,0) y como vectores de dirección: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,2,2)$ y $\vec{v} = \vec{v}_r = (3,1,2)$. La ecuación del plano queda:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 3 \\ y+1 & 2 & 1 \\ z & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \pi: \quad 2x+4y-5z=0$$

8. Estudia la posición relativa de los planos:

$$\pi: \begin{cases} x = 2+2t+s \\ y = -1+2t-3s \\ z = 1+5s \end{cases} \qquad \pi': -5x+5y+4z=12 \quad .$$

Escribimos el plano π en forma general: π: $5x-5y-4z=11$, y estudiamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \pi: 5x-5y-4z=11 \\ \pi': -5x+5y+4z=12 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^{¿} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 & 11 \\ -5 & 5 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 1 \neq r(A^{¿}) = 2$. Los planos son Paralelos.

9. Estudia la posición relativa de este trío de planos:

$$\begin{array}{l} \pi: 4x+y+3z+2=0 \\ \pi': -3x+5y+4z-7=0 \\ \pi'': y+3z-6=0 \end{array}$$

Estudiamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \pi: 4x+y+3z=-2 \\ \pi': -3x+5y+4z=7 \\ \pi'': y+3z=6 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{¿} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$r(A) = r(A^{¿}) = 3$. Los planos se cortan en un punto.

10. Calcula el valor de *m* para que las siguientes rectas se corten en un punto:

$$r: \frac{x-m}{-1}=\frac{y+10}{4}=\frac{z+3}{1}$$

$$s: \begin{cases} x=1 \\ y=6+4t \\ z=-1+2t \end{cases}$$

Escribimos primero las ecuaciones implícitas de las rectas, y formamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} r: \begin{cases} 4x+y=4m-10 \\ x+z=m-3 \end{cases} \\ s: \begin{cases} 4x-y=-6 \\ 2x-z=1 \end{cases} \end{array}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{\text{¿}}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 4m-10 \\ 1 & 0 & 1 & m-3 \\ 4 & -1 & 0 & 4m-16 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos los rangos de las matrices y tenemos:

- Si $m\neq 8$: $r(A)=3\neq r(A^{\text{¿}})=4$: Las rectas se cruzan
- Si $m=8$: $r(A)=r(A^{\text{¿}})=3$: Las rectas se cortan en un punto.

11. Determina la posición relativa entre la recta $r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x+my-z-6=0$.

Estudiamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} r: \begin{cases} x+y=1 \\ x+z=-1 \end{cases} \\ \pi: x+my-z-6=0 \end{array}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{\text{¿}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Si $m\neq 2$: $r(A)=r(A^{\text{¿}})=3$: La recta y el plano se cortan en un punto.

Si $m=2$: $r(A)=2\neq r(A^{\text{¿}})=3$: La recta y el plano son paralelos.