EJERCICIOS: ESPACIOS VECTORIALES. MATEMÁTICAS II.

1. Probar que el conjunto $L=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}/x-y=0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

2. En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3,+,\cdot\mathbb{R})$ se consideran los vectores siguientes:

   $\vec{v}_1=(1,2,-1)$ $\vec{v}_2=(1,-1,1)$ $\vec{v}_3=(2,5a,-3\mathrm{a})$.

   Determinar el valor numérico que debe tener el parámetro *a* para que los vectores sean linealmente independientes. En dicho caso, escribir el vector $\vec{v}_3$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

3. Determinar si los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o linelamente independientes:

   $\vec{v}_1=(-1,1,2)$ $\vec{v}_2=(3,-1,0)$ $\vec{v}_3=(0,5,4)$.

   Encuentra la combinación lineal de estos tres vectores que nos da el vector $\vec{u}=(7,-11,-4)$.

4. Determinar si los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o linelamente independientes:

   $\vec{v}_1=(-1,1,2)$ $\vec{v}_2=(3,-1,0)$ $\vec{v}_3=(0,5,4)$.

   Encuentra la combinación lineal de estos tres vectores que nos da el vector $\vec{u}=(7,-11,-4)$.

5. a) Estudia si los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ forman una base de este espacio vectorial:

   $\vec{v}_1=(1,0,-2)$ $\vec{v}_2=(1,1,-1)$ $\vec{v}_3=(2,1,1)$.

   b) En caso afirmativo, encuentra las coordenadas del vector $\vec{v}=(11,4,2)$ en esta base.

SOLUCIONES:

1. Probar que el conjunto $L=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}/x-y=0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Tomamos $\vec{v}=(x,y,z),x-y=0$ y $\vec{w}=(x',y',z'),x'-y'=0$. $\vec{v},\vec{w}\in L$. Veamos si $\forall t,s\in\mathbb{R}$, entonces $t\cdot\vec{v}+s\cdot\vec{w}\in L$:

$$t\cdot\vec{v}+s\cdot\vec{w}=t\cdot(x,y,z)+s\cdot(x',y',z')=(tx+sx',ty+sy',tz+sz') \ .$$

Como $(tx+sx')-(ty+sy')=t(x-y)+s(x'-y')=t\cdot 0+s\cdot 0=0$, entonces $t\cdot\vec{v}+s\cdot\vec{w}\in L$, y por tanto, *L* es un subespacio vectorial.

2. En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3,+,\cdot\mathbb{R})$ se consideran los vectores siguientes:

   $\vec{v_1}=(1,2,-1)$ $\vec{v_2}=(1,-1,1)$ $\vec{v_3}=(2,5a,-3a)$.

   Determinar el valor numérico que debe tener el parámetro *a* para que los vectores sean linealmente independientes. En dicho caso, escribir el vector $\vec{v_3}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$.

Vemos el valor del determinante formado por los tres vectores. Si éste es cero los vectores serán linealmente independientes:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5a & -3a \end{vmatrix}=-a+2=0$. Por tanto, el determinante es cero, es decir los vectores son linealmente independientes para $a=2$.

En el caso $a=2$: $\vec{v_3}=t_1\cdot\vec{v_1}+t_2\cdot\vec{v_2}$, es decir: $(2,10,-6)=t_1\cdot(1,2,-1)+t_2\cdot(1,-1,1)$

$\left.\begin{array}{r} t_1+t_2=2 \\ 2t_1-t_2=10 \\ -t_1+t_2=-6 \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema tenemos que $t_1=4$ y $t_2=-2$, y por tanto la combinación lineal buscada es $\vec{v_3}=4\vec{v_1}-2\vec{v_2}$.

3. Determinar si los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o linelamente independientes:

   $\vec{v_1}=(-1,1,2)$ $\vec{v_2}=(3,-1,0)$ $\vec{v_3}=(0,5,4)$.

   Encuentra la combinación lineal de estos tres vectores que nos da el vector $\vec{u}=(7,-11,-4)$.

Los tres vectores son linealmente dependientes ya que:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Escribimos el vector $\vec{u}$ como combinación lineal de los tes vectores dados:

$$\vec{u}=t_1\cdot\vec{v}_1+t_2\cdot\vec{v}_2+t_3\cdot\vec{v}_3 \quad ; \quad (7,-11,-4)=t_1\cdot(-1,1,2)+t_2\cdot(3,-1,0)+t_3\cdot(0,5,4)$$

$\left.\begin{array}{r} -t_1+3t_2=7 \\ t_1-t_2+5t_3=-11 \\ 2t_1+4t_3=-4 \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema obtenemos: $t_1=2$; $t_2=3$; $t_3=-2$, y por tanto la combinación lineal buscada es: $\vec{u}=2\vec{v}_1+3\vec{v}_2-2\vec{v}_3$.

4. Estudia para qué valores de a los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes:

$$\vec{v}_1=(1,a,-1) \qquad \vec{v}_2=(2,-1,a) \qquad \vec{v}_3=(-2,-2,2) \ .$$

Calculamos el determinante formado por los tres vectores. Cuando éste sea cero, los vectores serán linealmente dependientes. En caso contrario serán linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & a \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}=-2a^2-2a+4=0$$, obteniendo que $a=1$ y $a=-2$.

- Si $a=1$ ó $a=-2$, los vectores son linealmente dependientes.
- Si $a\neq 1$ y $a\neq -2$, los vectores son linealmente independientes.

5. a) Estudia si los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ forman una base de este espacio vectorial:

$$\vec{v}_1=(1,0,-2) \qquad \vec{v}_2=(1,1,-1) \qquad \vec{v}_3=(2,1,1) \ .$$

b) En caso afirmativo, encuentra las coordenadas del vector $\vec{v}=(11,4,2)$ en esta base.

- Los tres vectores son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0$$

- Los tres vectores son un sistema generador:

Tomamos un vector cualquiera $\vec{v}=(a,b,c)$ de $\mathbb{R}^3$. Veamos si se puede escribir como combinación lineal de los vectores:

$$\vec{v}=(a,b,c)=t_1\cdot\vec{v}_1+t_2\cdot\vec{v}_2+t_3\cdot\vec{v}_3$$

$\vec{v}=(a,b,c)=t_1\cdot\vec{v}_1+t_2\cdot\vec{v}_2+t_3\cdot\vec{v}_3=t_1\cdot(1,0,2)+t_2\cdot(1,1,-1)+t_3\cdot(2,1,1)$

$\left.\begin{array}{c} t_1+t_2+t_3=a \\ t_2+t_3=b \\ -2t_1-t_2+t_3=c \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema obtenemos que:

$t_1=\dfrac{2a-3b-c}{4}$; $t_2=\dfrac{-2a+5b-c}{4}$; $t_3=\dfrac{2a-b+c}{4}$

Por tanto, todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ se pueden escribir como combinación de los vectores dados, es decir forman un sistema generador.

b) $\vec{v}=(11,4,2)=t_1\cdot\vec{v}_1+t_2\cdot\vec{v}_2+t_3\cdot\vec{v}_3=t_1\cdot(1,0,2)+t_2\cdot(1,1,-1)+t_3\cdot(2,1,1)$

Haciendo $a=11$; $b=4$; $c=2$ en el resultado obtenido en el apartado anterior teenmos que :

$t_1=11$; $t_2=4$; $t_3=2$, es decir: $\vec{v}=2\cdot\vec{v}_1-\vec{v}_2+5\vec{v}_3$.