Programación Lineal

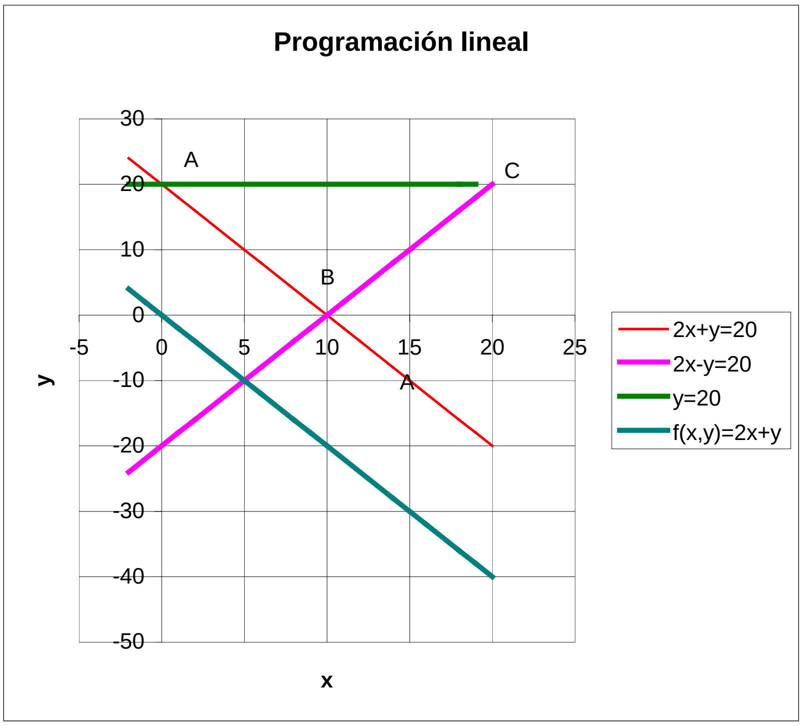
1.- Calcula los puntos del recinto $\begin{cases} 2x + y \geq 20 \\ 2x - y \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$ **que hacen mínima o máxima la función**

f(x,y) = 2 x + y. ¿ Cuántas soluciones hay?

Solución:

Representemos el sistema de inecuaciones dado.

- Para representar $2x + y \geq 20$ comenzaremos con la representación de la recta $2x + y = 20$ que pasa por los puntos (10, 0) y (5, 10). Para saber qué semiplano es a la solución del problema elijamos un punto cualquiera que no pertenezca a la recta, por ejemplo (0, 0), comprobando que :
- $2 . 0 + 0 \leq 0$, de donde deducimos que el semiplano solución es aquel al que no pertenece el punto (0,0).
- Se procede de manera análoga con la inecuación $2x - y \leq 20$
- La representación de la condición $0 \leq y \leq 20$, representa la zona comprendida entre las rectas y= 0 (eje de abscisas) y la recta y = 20 (paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto (0, 20)).



La región factible es la superficie poligonal limitada por los puntos A, B y C. Las soluciones óptimas se encuentran en los vértices de la región factible por lo que vamos a calcular sus coordenadas.

- Coordenadas de A. Se obtienen de la solución del sistema $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ y = 20 \end{cases}$ obteniendo A (0, 20)
- Coordenadas de B. Se obtienen de la solución del sistema $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ 2x - y = 20 \end{cases}$ obteniendo B (10, 0)

- Coordenadas de C. Se obtienen de la solución del sistema $\begin{cases} 2x - y = 20 \\ y = 20 \end{cases}$ obteniendo C (20, 20)

En cada uno de estos puntos, la función objetivo, toma los valores siguientes:

- f(A) = f(0,20) = 2 . 0 + 20 = 20
- f(B) = f(10,0) = 2. 10 + 0 = 20
- f(C) = f(20,20) = 2.20 + 20 = 60

De los resultados obtenidos se deduce que:

- El máximo se alcanza en el punto C y su valor es 60
- El mínimo se alcanza en los puntos A y B por lo que se alcanzará el mismo valor en todos los puntos del segmento AB. Este valor mínimo es 20

2.- Un banco quiere distribuir a sus empleados entre sus oficinas centrales y sus sucursales. Cada oficina central necesita 10 empleados del tipo A y 6 empleados del tipo B. Cada sucursal necesita 4 empleados del tipo A y 1 empleado del tipo B. Hay un total de 260 empleados del tipo A y 86 empleados del tipo B. Como máximo deber haber 8 oficinas centrales. Si el banco gana 3 millones de euros en una oficina central y 1 millón en una sucursal ¿ cuántas oficinas centrales y sucursales deberá abrir para que el beneficio sea máximo? ¿ Cuál será dicho beneficio máximo? (Septiembre 2004)

Solución

Designemos por x e y , respectivamente, el número de oficinas centrales y el número de sucursales del banco.

<u>Las condiciones de ligadura serán las siguientes</u>:

El número de oficinas centrales no debe ser superior a 8 luego $x \le 8$
Atendiendo a los empleados de cada clase que se necesitan:

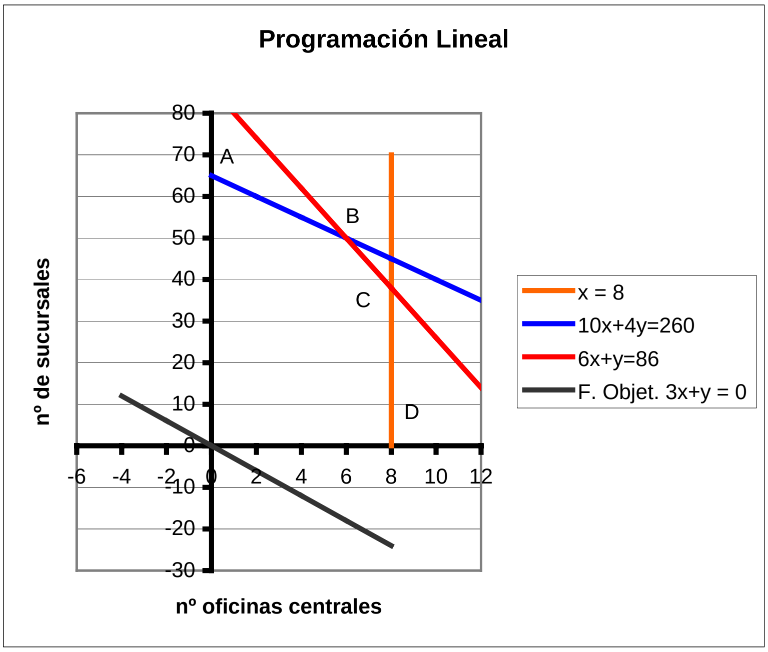
Del $10x + 4y \le 260$ tipo A :
Del $6x + 1y \le 86$ tipo B

La función objetivo (beneficio, en millones de euros) será: **F(x,y) = 3.x + 1.y**

Representemos ahora la región del plano que satisface a las tres condiciones de

ligadura, sin olvidar que siempre $x \ge 0 \quad e \quad y \ge 0$

La región factible es la superficie poligonal limitada por los vértices O, A, B, C y D. En la representación gráfica observamos que el punto B es el último punto de contacto de la paralela a la función objetivo con la región factible..



Las coordenadas del punto B, intersección de las rectas 10x + 4y = 260 y 6x + y = 86, son B(6,50). El valor que toma la función objetivo en dicho punto es:

F(6,50) = 3 x 6 + 1 x 50 =18+ 50 = 68 millones de euros

3.- En una ebanistería se fabrican dos tipos de mesas: mesas de comedor y mesas para ordenador. Las mesas de comedor necesitan 4 m^2 de madera y las mesas para ordenador 3 m^2 . El fabricante dispone de 60 m^2 de madera y decide confeccionar al menos 3 mesas de comedor y al menos el doble de mesas de ordenador que de mesas de comedor. Además por cada mesa de ordenador obtiene un beneficio de 200 €, mientras que obtiene un beneficio de 300 € por cada mesa de comedor. ¿ Cuántas mesas de cada tipo debe fabricar para obtener el beneficio máximo? (junio 2005)

Solución

Designemos por **x** e **y** el número de mesas de comedor y de ordenador, respectivamente, que vamos a fabricar.

<u>Las condiciones de ligadura serán las siguientes</u>:

Como serán al menos 3 mesas tendremos que: $x \geq 3$

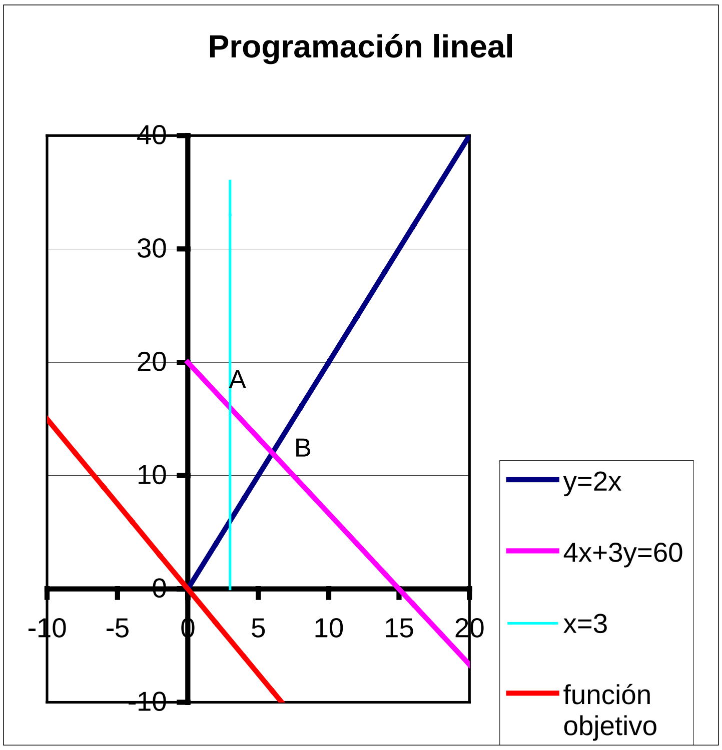
Además deberá cumplirse que el número de mesas de ordenador debe ser, al menos, el doble que el número de ,esas luego $y \geq 2x$

En cuanto a la madera consumida tendremos que: $4.x + 3.y \leq 60$

La función objetivo (beneficio) será: **F(x,y) = 300.x + 200.y**

Representemos ahora la región del plano que satisface a las tres condiciones de ligadura, sin olvidar que siempre $x \geq 0 \;\; e \;\; y \geq 0$

Como de la representación gráfica no se deduce fácilmente cuál es el último punto de contacto de la paralela a la función objetivo con la región factible, es aconsejable calcular las coordenadas de los dos puntos, A y B, más alejados del origen de coordenadas.



Las coordenadas del punto A, intersección de las rectas x = 3 y 4x+3y = 60, son A(3,16). El valor que toma la función objetivo en dicho punto es:

$$\mathbf{F(3,16) = 300.3 + 200.16 = 900 + 3200 = 4100\ €}$$

Las coordenadas del punto B, intersección de las rectas y = 2x y 4x+3y = 60, son B(6,12). El valor que toma la función objetivo en dicho punto es:

$$\mathbf{F(6,12) = 300.6 + 200.12 = 1800 + 2400 = 4200\ €}$$

De donde se deduce que el mayor beneficio se conseguirá construyendo 6 mesas de comedor y 12 de ordenador.

4.- En una fábrica se producen bombillas normales a 450 pts cada bombilla, y bombillas halógenas a 600 pts bombilla. La capacidad máxima de fabricación es de 500 bombillas, y por restricciones de material no pueden fabricarse más de 300 halógenas ni más de 400 normales. La fábrica vende siempre todo lo que produce. ¿ Cuántas bombillas convendrá producir de cada clase para obtener la máxima facturación?

Solución

Llamemos x e y al número de bombillas, respectivamente, normales y halógenas.

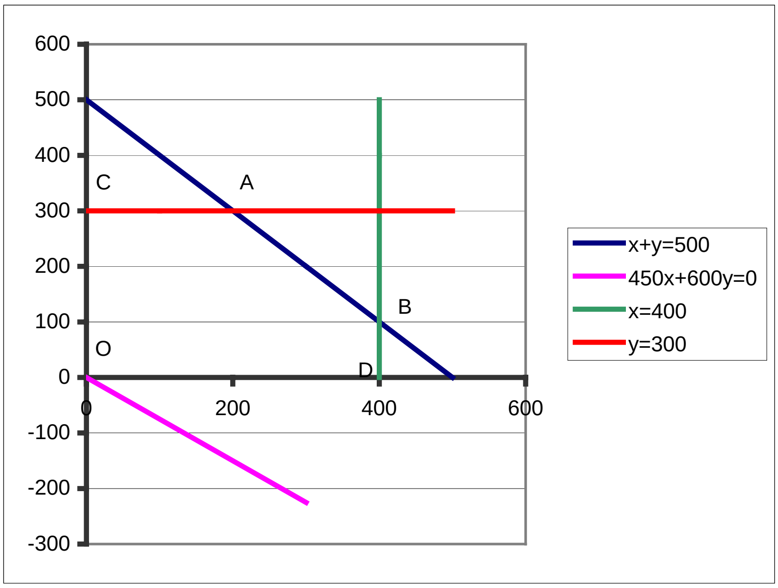
Teniendo en cuenta la capacidad máxima de fabricación tenemos $x + y \leq 500$

Por restricciones de material tenemos $x \leq 400$ e $y \leq 300$

La facturación que consigue es $F(x,y) = 450\,x + 600\,y$

Representemos las restricciones y la función objetivo

De la gráfica se deduce que que la zona de optimización es la superficie poligonal limitada por los vértices O,C,A,B y D. El punto cuyas coordenadas forman la solución del problema es el A cuyas coordenadas se obtienen como intersección de las ecuaciones y = 300 con x + y = 500. Resolviendo el sistema hallamos x = 200 e y = 300.



5.- Un estudiante reparte propaganda publicitaria en su tiempo libre. La empresa A le paga 0,05 € por impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes, le paga 0,07 € por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos de tipo A, en la que caben 120, y otra para los de tipo B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día puede repartir 150 impresos como máximo. ¿ Cuántos impresos de cada clase habrá de repartir para que su beneficio sea máximo ?

Solución

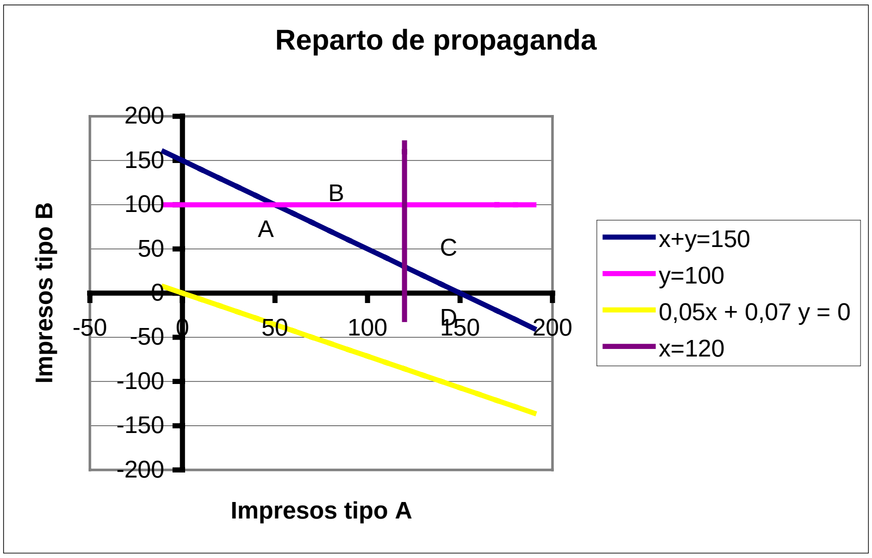
Designemos por x e y el número de impresos, respectivamente, que de las empresas A y B puede repartir.

Atendiendo a la capacidad de cada una de las bolsas utilizadas tenemos que :

- **x ≤ 120**, para los impresos de la empresa A e y ≤ 100 para los impresos de la empresa B.
- Atendiendo al total de impresos que puede repartir tenemos que: **x + y ≤ 150**
- La función que da los beneficios (objetivo) es **f(x,y) = 0,05 x + 0,07 y**

Representando el sistema de restricciones y la función objetivo $\begin{cases} x \geq 0, \ \ y \geq 0 \\ x \leq 120 \\ y \leq 100 \\ x + y \leq 150 \\ f(x,y) = 0{,}05\,x + 0{,}07\,y \end{cases}$ de igual forma que en los ejercicios anteriores, obtenemos:

La región factible es la superficie poligonal determinada por los vértices A, B, C, D y el origen de coordenadas.



Para evitar equivocaciones es conveniente calcular las coordenadas de todos los vértices, en especial de los más extremos, y hallar el valor de f(x,y) en ellos.

Coordenadas de A, solución del sistema $\begin{cases} y = 100 \\ x = 0 \end{cases}$, resultando A (0, 100)

Coordenadas de B, solución del sistema $\begin{cases} y = 100 \\ x + y = 150 \end{cases}$, resultando B (50, 100)

Coordenadas de C, solución del sistema $\begin{cases} x = 120 \\ x + y = 150 \end{cases}$, resultando C (120, 30)

Coordenadas de D, solución del sistema $\begin{cases} y = 0 \\ x = 120 \end{cases}$, resultando D (120, 0)

El valor que toma la función objetivo en cada uno de ellos es:

- f(A) = f(0,100) = 0,05 . 0 + 0,07 . 100 = 7 €
- f(B) = f(50,100) = 0,05 . 50 + 0,07 . 100 = 9,50 €
- f(C) = f(120,30) = 0,05 .12 0 + 0,07 . 30 = 8,1 €
- f(D) = f(120, 0) = 0,05 . 120 + 0,07 . 0 = 6 €

Para conseguir el máximo beneficio deberá repartir 120 impresos de la empresa A y 30 de la empresa B.

6.- Una persona quiere invertir 100 000 € en dos tipos de acciones, A y B. Las de tipo A tienen más riesgo, pero producen un beneficio del 10 %. Las de tipo B son más seguras, pero producen sólo el 7 % nominal.

Decide invertir como máximo 60 000 € en la compra de acciones A y, por lo menos 20 000 € en la compra de acciones B. Además, quiere que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B. ¿ Cómo debe invertir los 100 000 € para que el beneficio sea máximo?

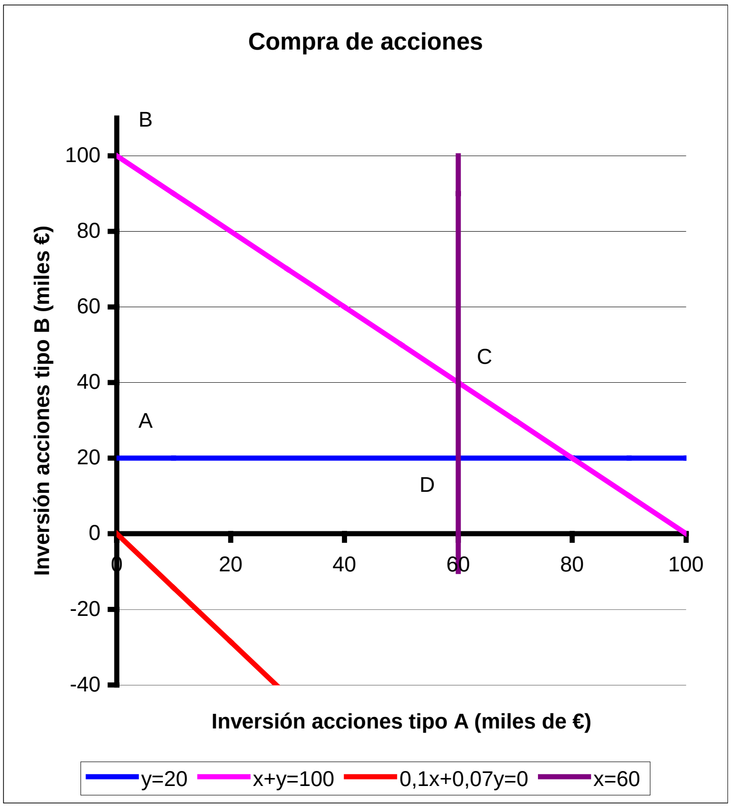
Solución:

Designemos por x e y , respectivamente, el importe a invertir en cada tipo de acciones A y B.

Atendiendo a la cantidad a invertir tenemos que :

- Atendiendo a la cantidad total a invertir **x + y ≤ 100 000**
- Atendiendo a lo que se desea invertir en cada tipo de acciones tenemos **x ≤ 60 000 e y ≥ 20 000.**
- Atendiendo a la inversión entre ambos tipos de acciones tenemos que **x ≥ y .**
- La función que da los beneficios (objetivo) es **f(x,y) = 0,1 x + 0,07 y**

Representando el sistema de restricciones y la función objetivo $\begin{cases} x\geq 0,\ \ y\geq 0 \\ x\leq 60\,000 \\ y\geq 20\,000 \\ x+y\leq 100\,000 \\ f(x,y)=0{,}1\,x+0{,}07\,y \end{cases}$ de igual forma que en los ejercicios anteriores, obtenemos la representación gráfica adjunta donde, la región factible es la superficie delimitada por los vértices A,. B, C y D.



Si desplazamos la función 0,1x+0,07y=0, paralela a si misma, notaremos que el último punto de contacto con la región factible es el punto C, cuyas coordenadas pasamos a determinar:

C $\equiv \begin{cases} x=60 \\ x+y=100 \end{cases} \Rightarrow$ **C(60, 40)**

La inversión deberá ser : 60000€ en acciones de tipo A y 40000€ en las de tipo B. El beneficio que obtendrá será: f(60 000,40 000) = 0,1 . 60 000 + 0,07 . 40 000 = **8 800 €**

7.- Se quiere elaborar una dieta para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenidos vitamínicos al día: 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 mg de la C y 2 mg de la D.

Para ello se mezclan piensos de dos tipos, P y Q, cuyo precio por hg es, para ambos, de 0,3 € y cuyo contenido vitamínico, en mg, por kg es el siguiente:

	A	**B**	**C**	**D**
P	1	1	20	2
Q	1	3	7,5	0

¿ Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo?

Solución:

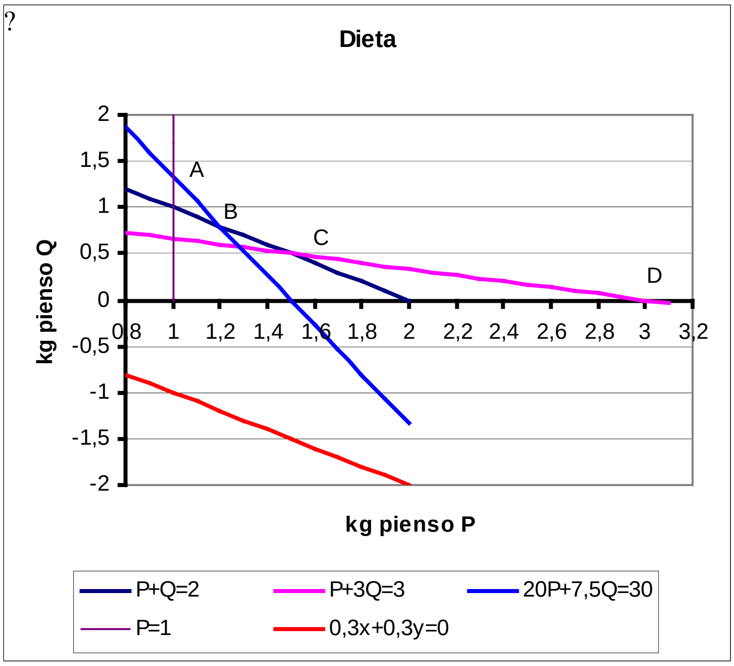
Designemos por P y Q , respectivamente, los kilogramos de cada uno de los tipos de pienso.

- Atendiendo a la cantidad de vitamina A, tendremos **1.P + 1.Q ≥ 2**
- Atendiendo a la cantidad de vitamina B, tendremos **1.P + 3.Q ≥ 3**
- Atendiendo a la cantidad de vitamina C, tendremos **20.P + 7,5 .Q ≥ 30**
- Atendiendo a la cantidad de vitamina D, tendremos **2.P + 0.Q ≥ 2**
- La función que da los beneficios (objetivo) es **f(x,y) = 0,3 P + 0,3Q**

Representando el sistema de restricciones y la función objetivo $\begin{cases} P \geq 0,\ \ Q \geq 0 \\ P+Q \geq 2 \\ P+3Q \geq 3 \\ 20.P+7{,}5Q \geq 30 \\ 2P+0.Q \geq 2 \\ f(P,Q)=0{,}3P\ +\ 0{,}3Q \end{cases}$

Ha resultado, como región factible, una superficie abierta, limitada por recta P=1, y la línea poligonal limitada por los vértices A, B, C, D y el eje de abscisas.

Las rectas f(P,Q) = 0,3P + 0,3Q y P+Q=2 son paralelas, por tener los coeficientes de P y Q , respectivamente, proporcionales. En este caso el valor mínimo se alcanza en B y C , luego cualquier punto del segmento BC será también solución del problema.



Comprobemos lo dicho hallando las coordenadas de B y C y viendo que el valor que alcanza la función objetivo en ellos es el mismo.

B $\equiv \begin{cases} P + \quad Q = 2 \\ 20P + 7{,}5Q = 30 \end{cases}$ de donde B = $(\frac{15}{12{,}5}, \frac{10}{12{,}5})$

Donde la función objetivo toma el valor f(B) = $0{,}3 \cdot \frac{15}{12{,}5} + 0{,}3 \cdot \frac{10}{12{,}5} = 0{,}6$

C $\equiv \begin{cases} P + \quad Q = 2 \\ P + \quad 3Q = 3 \end{cases}$ de donde C = $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

Donde la función objetivo toma el valor f(C) = $0{,}3 \cdot \frac{3}{2} + 0{,}3 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}6$

A la solución pertenecen todos los puntos del segmento BC.

8.- Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble que el de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es de 250 euros por electricista y 200 euros por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio y cual es este?

Solución:

a) Planteamiento

Designemos por x e y , respectivamente, el nº de electricistas y de mecánicos necesarios necesario

"*es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas*" **y ≥ x**

"*el número de mecánicos no supere al doble que el de electricistas.*" **y ≤ 2x**

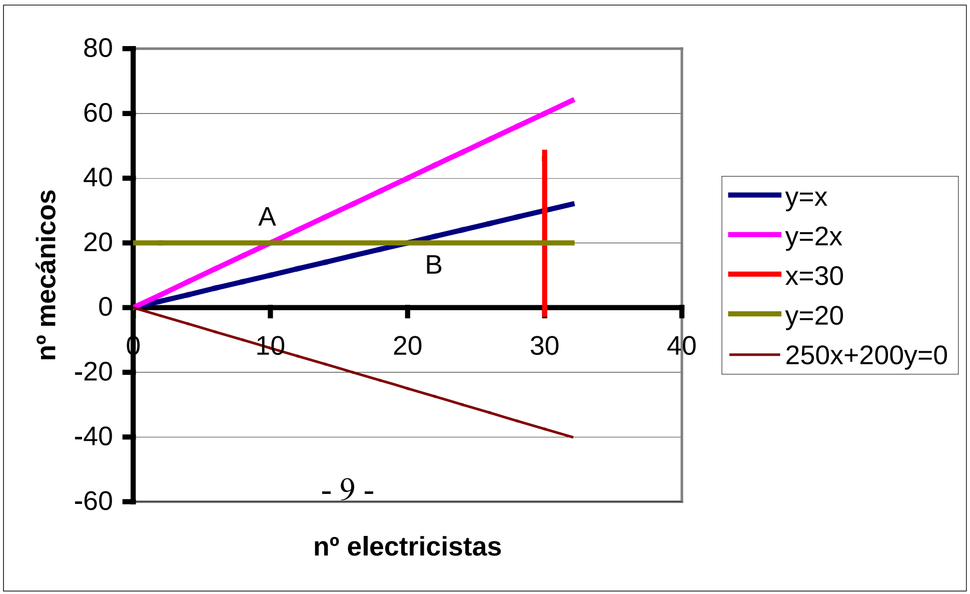
"*hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos.*" **x ≤ 30** **y ≤ 20**

"El beneficio de la empresa por jornada es de 250 euros por electricista y 200 euros por mecánico" **f(x,y) = 250.x + 200 . y**

b) Resolución

Representando las inecuaciones de ligadura resulta

La región solución es la limitada por los puntos O,A y B.



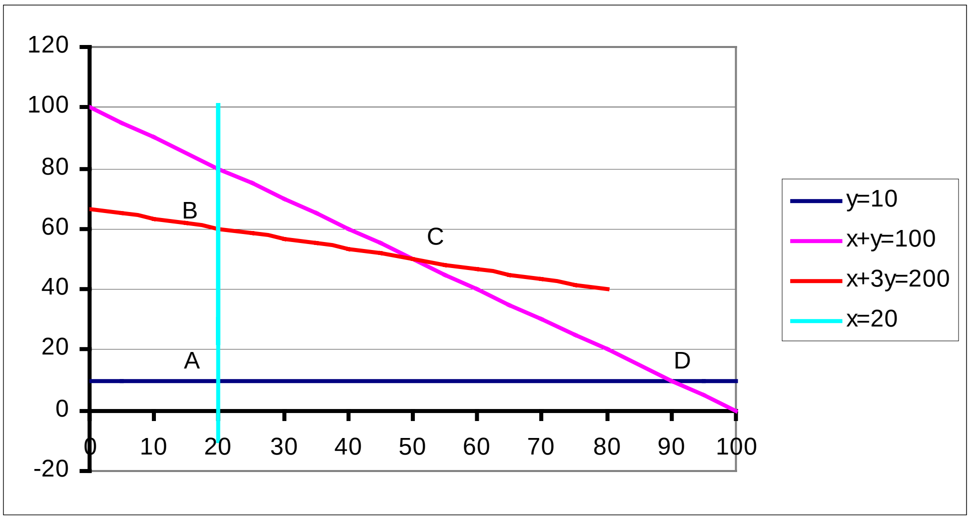
Si desplazamos paralelamente a si misma la función f(x,y) = 0 veremos que el último punto de contacto con la región factible es B.

Sus coordenadas las obtendremos como intersección de las rectas $\begin{cases} y = 20 \\ y = x \end{cases}$ luego la solución será x = 20 e y 20 y el beneficio máximo obtenido será f(20,20) = 250 . 20 + 200 . 20 = 9 000 €

9. Dibuja el recinto que cumple las restricciones siguientes:

$$\mathbf{x \geq 20 \;;\; y \geq 10 \;;\; x + y \leq 100 \;;\; x + 3y \leq 200}$$

La superficie pedida es la limitada por los vértices A, B, C , D y A



9- Una fábrica produce dos modelos de aparatos de radio, A y B. La capacidad de producción de aparatos de tipo A es de 60 unidades por día y para el tipo B de 75 unidades por día. Cada aparato de tipo A necesita 10 piezas de un componente electrónico y 8 piezas para los del tipo B. Cada día se dispone de 800 piezas del componente electrónico. La ganancia de cada aparato producido de los modelos A y B es de 30€ y 20 € respectivamente. Determina la producción diaria da cada modelo que maximiza la ganancia.

Solución

<u>Las condiciones de ligadura serán las siguientes</u>:

Para las piezas de tipo A $\quad A \leq 60$

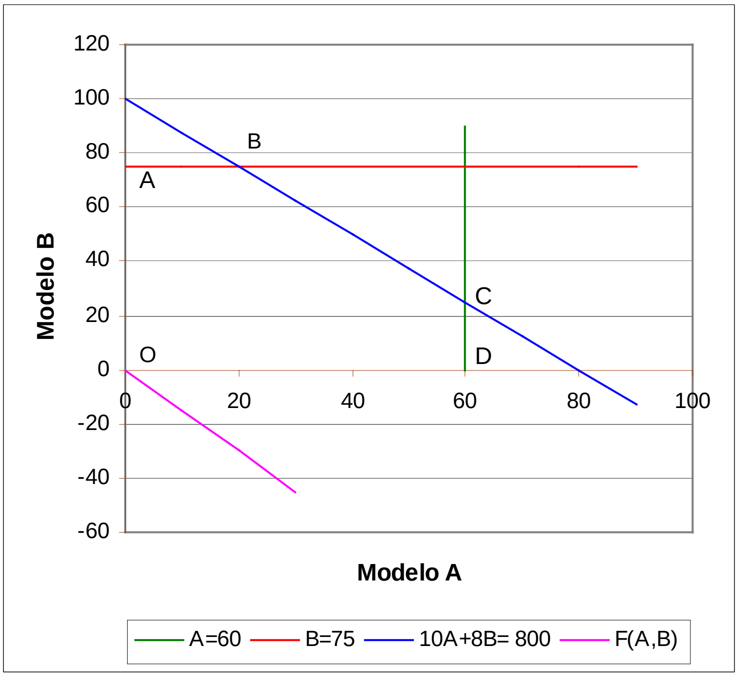
Para las piezas de tipo B $\quad B \leq 75$

Según el número de piezas del componente electrónico $10\,A + 8\,B \leq 800$

La función objetivo (beneficio en euros) será: F(A, B) = 30 A + 20 B

Representemos ahora la región del plano que satisface a las tres condiciones de ligadura, sin olvidar que siempre que

$$A \geq 0 \quad e \quad B \geq 0$$



La región factible viene limitada por la línea poligonal O, A,B, C, D, O. Las posibles soluciones corresponden a las coordenadas de los vértices B ó C (de la representación gráfica no es fácil conocer cuál es el último punto de contacto de la función F(A,B) con la región factible)

<u>Coordenadas de B</u>: solución del sistema

$$\begin{cases} B = 75 \\ 10A + 8B = 800 \end{cases}, \quad \text{B(20, 75)}$$

F(20,75) = 30.20 + 20.75 = 2100 €

<u>Coordenadas de C</u>: solución del sistema

$$\begin{cases} A = 60 \\ 10A + 8B = 800 \end{cases}, \quad \text{A(60, 25)}$$

F(60,25) = 30.60 + 20.25 = 2300 €

La producción deberá ser de 60 unidades del modelo A y 25 del modelo B.