GEOMETRÍA AFÍN

1. - Las coordenadas de los puntos medios de los lados de un triángulo ABC son M(1,0,0), N(0,1,0) y P(0,0,1).
   a) Obtenga las coordenadas de los vértices A, B y C del triángulo. **(1 punto)**
   b) Halle el área del triángulo. **(1,5 puntos)**

2.- Halle una ecuación del plano que pasa por el punto (1,1,1) y es paralelo a las rectas **(2,5 puntos)**

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ y - z = -3 \end{cases}$$

3.- Se consideran los puntos en el espacio A(1,-1,1) y B(2,2,2).
   a) Halle el punto medio de A y B. (0,5 puntos)
   b) Dé la ecuación del plano respecto al cual A y B son puntos simétricos. (2 puntos)

4.- Sean el punto P (-1, 2, 0) y el plano π : 2x – 3y + z = 8. Calcule:
   a) Las ecuaciones de una recta r que pase por el punto P y sea perpendicular al plano π . **(0,5 puntos)**
   b) Las coordenadas del punto de corte de la recta r y el plano π . **(0,5 puntos)**
   c) La distancia d del punto P al plano π. **(0,5 puntos)**
   d) Las coordenadas del punto P´ simétrico de P respecto del plano π. **(0,5 puntos)**
   e) La ecuación de otro plano, paralelo a π y distinto de él, que diste de P la misma distancia d. **(0,5 puntos)**

5.-Sea *s* la recta que pasa por los puntos A(1,1,0) y B(0,1,0). Considere la recta $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$
   a) Escriba unas ecuaciones cartesianas de la recta *s.* **(0,75 puntos)**
   b) Dé la posición relativa de las rectas *r* y *s.* **(0,75 puntos)**
   c) Obtenga la ecuación del plano que contiene a r y es paralela a s. **(1 punto)**

6.- Halle los planos que pasando por A(0,2,0) y B(0,0,2), corten al eje OX en un punto C tal que el área del triángulo de vértices A, B y C sea 6. **(2,5 puntos)**

7.- Considere el plano π: $x + y - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$
   a) Halle la posición relativa de la recta y el plano. **(1 punto)**
   b) Encuentre una recta perpendicular a ambos. **(1 punto)**
   c) Halla la ecuación del plano paralelo a π que pase por el punto (1, 0, -1) **(0,5 puntos)**

8.- Busque el área del polígono de vértices A(4,7,8), B(2,3,4), C(-1,-2,1) y D(1,2,5). **(2,5 puntos)**

9.- Se consideran la recta y planos siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -5 - 5t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \qquad \pi_1 : x + 2y + 3z - 1 = 0 \qquad \pi_2 : x + 2y + 4z - 2 = 0$$

   a) Determine la posición relativa de la recta respecto a cada uno de los planos. **(1 punto)**
   b) Determine la posición relativa de los dos planos. **(0.75 puntos)**
   c) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta intersección entre los dos planos. **(0.75 puntos)**

10.- Considere los planos: π_1: $2x - y + z = 0$ y π_2: $z - 3 = 0$
   a) Estudie la posición relativa de π_1 y π_2 **(1,25 puntos)**
   b) Encuentre, si es posible, una recta paralela a π_1 y a π_2 que pase por el punto (2, 2,-1). **(1,25 puntos)**

SOLUCIONES:

Ejercicio 1.- Las coordenadas de los puntos medios de los lados de un triángulo ABC son

M(1 , 0 , 0), N(0 , 1 , 0) y P(0 , 0 , 1).

a) Obtenga las coordenadas de los vértices A, B y C del triángulo. (1 punto)

b) Halle el área del triángulo. (1,5 puntos)

SOLUCIÓN

Sean $A(a_1, a_2, a_3)$; $B(b_1, b_2, b_3)$; C (c_1, c_2, c_3)

M es el punto medio de AB: $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right) = (1, 0, 0) \rightarrow \begin{cases} a_1+b_1=2 \\ a_2=-b_2 \\ a_3=-b_3 \end{cases}$

N es el punto medio de BC: $\left(\frac{c_1+b_1}{2}, \frac{c_2+b_2}{2}, \frac{c_3+b_3}{2}\right) = (0, 1, 0) \rightarrow \begin{cases} c_1=-b_1 \\ c_2+b_2=2 \\ c_3=-b_3 \end{cases}$

P es el punto medio de AC: $\left(\frac{a_1+c_1}{2}, \frac{a_2+c_2}{2}, \frac{a_3+c_3}{2}\right) = (0, 0, 1) \rightarrow \begin{cases} a_1=-c_1 \\ a_2=-c_2 \\ a_3+c_3=2 \end{cases}$

$\left.\begin{cases} a_1+b_1=2 \\ c_1=-b_1 \\ a_1=-c_1 \end{cases}\right\rangle \rightarrow b_1=a_1=1; c_1=-1$ $\quad \left.\begin{cases} c_2+b_2=2 \\ a_2=-c_2 \\ a_2=-b_2 \end{cases}\right\rangle \rightarrow c_2=b_2=1; a_2=-1$ $\quad \left.\begin{cases} a_3+c_3=2 \\ c_3=-b_3 \\ a_3=-b_3 \end{cases}\right\rangle \rightarrow c_3=a_3=1; b_3=-1$

Por tanto los puntos son A(1, -1, 1) , B(1, 1, -1) , C(-1, 1, 1)

b) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}$ = (0, 2, -2) $\quad \overrightarrow{AC}$ = (-2, 2, 0) $\rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (4, 4, 4)$

$$\text{Área} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{4^2+4^2+4^2}}{2} = \frac{\sqrt{48}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ u^2$$

Ejercicio 2.- Halle una ecuación del plano que pasa por el punto (1 , 1 , 1) y es paralelo a las rectas

$r \equiv \begin{cases} 3x+y=0 \\ 4x+z=0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x-y=2 \\ y-z=-3 \end{cases}$ (2,5 puntos)

SOLUCIÓN

El plano queda determinado por los vectores directores de r y s y el punto P(1, 1, 1)

Vector director de r : $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -3, -4)$ Vector director de s : $\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$

$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ -(x – 1) + 5(y – 1) – 4(z – 1) = 0 $\rightarrow \pi \equiv$ x – 5y + 4z = 0

Ejercicio 3.- Se consideran los puntos en el espacio A(1 , -1 , 1) y B(2 , 2 , 2).

a) Halle el punto medio de A y B. (0,5 puntos)

b) Dé la ecuación del plano respecto al cual A y B son puntos simétricos. (2 puntos)

SOLUCIÓN

a) $M = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \to M = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

b) El plano que buscamos es perpendicular a la recta AB que pasa por el punto M

Vector director de la recta AB: $\overrightarrow{AB} = (1, 3, 1)$

Al ser el plano perpendicular a la recta, el vector director de la recta y el vector normal del plano son paralelos.

Vector normal del plano: $\vec{n} = (1, 3, 1)$

Ecuación del plano: $x - \frac{3}{2} + 3\left(y - \frac{1}{2}\right) + z - \frac{3}{2} = 0 \to x + 3y + z - \frac{9}{2} = 0 \;\longrightarrow\; \pi \equiv 2x + 6y + 2z - 9 = 0$

Ejercicio 4.- Sean el punto P (-1 , 2 , 0) y el plano π : $2x - 3y + z = 8$. Calcule:

a) Las ecuaciones de una recta r que pase por el punto P y sea perpendicular al plano π . **(0,5 puntos)**

b) Las coordenadas del punto de corte de la recta r y el plano π . **(0,5 puntos)**

c) La distancia d del punto P al plano π. **(0,5 puntos)**

d) Las coordenadas del punto P´ simétrico de P respecto del plano π. **(0,5 puntos)**

e) La ecuación de otro plano, paralelo a π y distinto de él, que diste de P la misma distancia d. **(0,5 puntos)**

SOLUCIÓN

a) Plano perpendicular a la recta → vector director de la recta y vector normal del plano son paralelos.

Vector normal del plano: $\vec{n} = (2, -3, 1)$ → Vector director de la recta: $\vec{v} = (2, -3, 1)$

Ecuación de la recta: $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1}$

b) Sustituimos la expresión de r en la ecuación del plano:

$2(-1+2t) - 3(2-3t) + t = 8 \to t = \frac{8}{7} \to Q = \left(\frac{9}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{8}{7}\right)$

c) $d(P, \pi) = d(P, Q) = \sqrt{\left(\frac{9}{7}+1\right)^2 + \left(-\frac{10}{7}-2\right)^2 + \left(\frac{8}{7}\right)^2} = \frac{8\sqrt{14}}{7}$ u

d) El punto simétrico de P respecto de π es el simétrico de P respecto de Q, es decir, Q es el punto medio del segmento PP´:

Sea $P´(x, y, z) \to \left(\frac{9}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{8}{7}\right) = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z}{2}\right) \to P´ = \left(\frac{25}{7}, -\frac{34}{7}, \frac{16}{7}\right)$

e) Ecuación del plano paralelo a π que pasa por Q´, siendo Q´ punto simétrico de Q respecto de P:

Punto Q´: Imponemos que P es el punto medio de QQ´

$(-1, 2, 0) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{9}{7}+x, -\frac{10}{7}+y, \frac{8}{7}+z\right) \to Q´ = \left(-\frac{23}{7}, \frac{38}{7}, -\frac{8}{7}\right)$

Sea π´ un plano paralelo a π → $\pi´ \equiv 2x - 3y + z + k = 0$

Calculamos k imponiendo que pasa por Q´: $2\cdot\left(-\frac{23}{7}\right) - 3\cdot\frac{38}{7} - \frac{8}{7} + k = 0 \to k = 24$

Ecuación del plano: $2x - 3y + z + 24 = 0$

Ejercicio 5.- Sea *s* la recta que pasa por los puntos A(1 , 1 , 0) y B(0 , 1, 0). Considere la recta $r \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=2 \end{cases}$

a) Escriba unas ecuaciones cartesianas de la recta *s*. (0,75 puntos)

b) Dé la posición relativa de las rectas *r* y *s* . (0,75 puntos)

c) Obtenga la ecuación del plano que contiene a r y es paralela a s. **(1 punto)**

SOLUCIÓN

a) $\overrightarrow{AB}$ = (-1, 0, 0) $\longrightarrow$ $s \equiv \begin{cases} x = 1-t \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$

b) Vector director de r: $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, 0)$

Ambas rectas tienen la misma dirección, por tanto, son paralelas o coincidentes.

El punto A(1, 1, 0) no es un punto de r → Ambas rectas son paralelas

c) El plano viene determinado por el punto P(1, 0, 2) de r, $\vec{u} = (1, 0, 0)$ y $\overrightarrow{QP}$, siendo Q un punto cualquiera que no pertenezca a s, por ejemplo, Q = (0, 0, 1)

$\overrightarrow{QP}$ = (1, 0, 1) $\rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv y = 0$

Ejercicio 6.- Halle los planos que pasando por A(0 , 2 , 0) y B(0 , 0 , 2), corten al eje OX en un punto C tal que el área del triángulo de vértices A, B y C sea 6. (2,5 puntos)

SOLUCIÓN

Sea C = (m, 0, 0) por ser un punto del eje OX.

El área del triángulo ABC viene dado por la fórmula: Área = $\dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2}$ = 6 $\longrightarrow \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 12$

$\overrightarrow{AB}$ = (0, -2, 2) ; $\overrightarrow{AC}$ = (m, -2, 0) → $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 2 \\ m & -2 & 0 \end{vmatrix} = (4, 2m, 2m)$

$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 12 \rightarrow \sqrt{4^2 + (2m)^2 + (2m)^2} = \sqrt{16 + 8m^2} = 12 \rightarrow 16 + 8m^2 = 144 \rightarrow m^2 = 16 \rightarrow m = \pm 4$

Si C = (4, 0, 0) $\rightarrow \overrightarrow{AC}$ = (4, -2, 0)|| (2, -1, 0) ; $\overrightarrow{AB}$ =(0, -2, 2) || (0, -1, 1)

$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + 2(y-2) + 2z = 0 \rightarrow \pi \equiv x + 2y + 2z - 4 = 0$

Si C = (-4, 0, 0) $\rightarrow \overrightarrow{AC}$ = (-4, -2, 0)|| (2, 1, 0) ; $\overrightarrow{AB}$ =(0, -2, 2) || (0, -1, 1)

$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -x + 2(y-2) + 2z = 0 \rightarrow \pi \equiv x - 2y - 2z + 4 = 0$

Ejercicio 7.- Considere el plano π : $x + y - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

a) Halle la posición relativa de la recta y el plano. (1 punto)

b) Encuentre una recta perpendicular a ambos. (1 punto)

c) Halla la ecuación del plano paralelo a π que pase por el punto (1, 0, -1). (0,5 puntos)

SOLUCIÓN

a) $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ → Sustituyendo en la ecuación del plano → 0 = 0 → La recta está contenida en el plano

b) El vector normal del plano, (1, 1, -1) es perpendicular a la recta r.

Consideramos la recta de vector director $\vec{v}$ = (1, 1, -1) que pasa por un punto cualquiera de r , por ejemplo, P(0,1, 1)

$$s \equiv x = y - 1 = \frac{z-1}{-1}$$

c) Ecuación del plano: x – 1 – (z + 1) = 0 → x – z – 2 = 0

Ejercicio 8.- Busque el área del polígono de vértices A(4,7,8), B(2,3,4), C(-1,-2,1) y D(1,2,5). (2,5 puntos)

SOLUCIÓN

Comprobamos que los 4 puntos son coplanarios: $\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD}$ son l. d.

$\overrightarrow{AB}$ = (-2, -4, -4) || (1, 2, 2) ; $\overrightarrow{AC}$ = (-5, -9, -7) || (5, 9, 7) $\overrightarrow{AD}$ = (-3, -5, -3) || (3, 5, 3)

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \text{Son coplanarios.}$$

$\overrightarrow{AB}$ = (-2, -4, -4)

$\overrightarrow{BC}$ = (-3, -5, -3) || $\overrightarrow{AD}$ = (-3, -5, -3) y además $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$

$\overrightarrow{CD}$ = (2, 4, 4) || $\overrightarrow{AB}$ y además $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+16+16} = 6$

El polígono ABCD es un paralelogramo.

El módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ es igual al área del paralelogramo que determinan.

$\overrightarrow{AB}$ x $\overrightarrow{BC}$ = (2, 4, 4) x (3, 5, 3) = (-8, 6, -2) → $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}\ u^2$

Ejercicio 9.- Se consideran la recta y planos siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -5-5t \\ z = -3+2t \end{cases} \qquad \pi_1 : x + 2y + 3z - 1 = 0 \qquad \pi_2 : x + 2y + 4z - 2 = 0$$

a) Determine la posición relativa de la recta respecto a cada uno de los planos. (1 punto)

b) Determine la posición relativa de los dos planos. (0.75 puntos)

c) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta intersección entre los dos planos. **(0.75 puntos)**

SOLUCIÓN

a) Vector director de r: $\vec{v}$ = (2, -5, 2)

Vector normal de π_1: $\vec{n}_1$ = (1, 2, 3)   Vector normal de π_2: $\vec{n}_2$ = (1, 2, 4)

$\vec{v} \perp \vec{n}_2 \;\rightarrow\; \vec{v} \cdot \vec{n}_2 = (2, -5, 2) \cdot (1, 2, 4) = 2 - 10 + 8 = 0$

El plano π_2 y la recta tienen la misma dirección.

El punto P(1, -5, -3) no pertenece al plano: $1 - 10 - 12 - 2 \neq 0$

El plano π_2 y la recta son paralelas.

El plano π_1 y la recta no tienen la misma dirección → son secantes

b) Los planos se cortan en una recta al no ser proporcionales los vectores normales.

c) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos:

$$s \equiv \frac{\begin{cases} x+2y+3z-1=0 \\ x+2y+4z-2=0 \end{cases}}{z=1} \rightarrow \rightarrow s \equiv \begin{cases} x+2y=-2 \\ z=1 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x=-2-2t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$$

Ejercicio 10.- Considere los planos: π_1: $2x - y + z = 0$ y π_2: $z - 3 = 0$

a) Estudie la posición relativa de π_1 y π_2 (1,25 puntos)

b) Encuentre, si es posible, una recta paralela a π_1 y a π_2 que pase por el punto (2, 2,-1). (1,25 puntos)

SOLUCIÓN

a) Los planos son paralelos o coincidentes si las coordenadas de los vectores normales a los planos son proporcionales:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1 = (2,-1,1) \\ \vec{n}_2 = (0,0,1) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2}{0} = \frac{-1}{0} \neq \frac{1}{1} \rightarrow \text{ambos planos se cortan en una recta.}$$

b) Una recta paralela a los dos planos será también paralela a la recta de corte entre ambos planos.

Vector director de la recta de corte: $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (2,-1,1) \times (0,0,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-2,0) \equiv (1, 2, 0)$

Ecuación de la recta buscada: $r \equiv \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2+2t \\ z = -1 \end{cases}$