GEOMETRÍA

1.- Calcula *a* y *b* para que los puntos *A*(1, 2, –1), *B* (3, 0, –2) y *C* (4, *a*, *b*) estén alineados.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(2,\ -2,\ -1)\\ \overrightarrow{AC}(3,\ a-2,\ b+1)\end{array}\right\}\ \text{Para que estén alineados ha de ser: } \frac{3}{2}=\frac{a-2}{-2}=\frac{b+1}{-1}$$

Por tanto:

$$\frac{a-2}{-2}=\frac{3}{2}\ \rightarrow\ a-2=-3\ \rightarrow\ a=-1$$

$$\frac{b+1}{-1}=\frac{3}{2}\ \rightarrow\ b=\frac{-3}{2}-1\ \rightarrow\ b=\frac{-5}{2}$$

2.- Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto *A* (–4, 2, 5) y es paralela al eje *OZ*.

Si es paralela al eje OZ, tiene como vector dirección $(0, 0, 1)$.

- *Ecuación vectorial:*

$$(x, y, z) = (-4, 2, 5) + \lambda(0, 0, 1)$$

- *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

- *Forma continua:*

$$\frac{x+4}{0}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-5}{1}$$

- *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{l} x = -4\ \rightarrow\ x+4=0 \\ y = 2\ \rightarrow\ y-2=0 \end{array}\right\}$$

3.- Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por el punto *P*(1, –3, 0) y es paralela al vector u x v, siendo u(1, –1, 2) y v(2, 0, 0).

$$\vec{u}\times\vec{v}=(0, 4, 2)\ //\ (0, 2, 1)$$

- *Ecuación vectorial:*

$$(x, y, z) = (1, -3, 0) + \lambda(0, 2, 1)$$

- *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- *Forma continua:*

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-0}{1}$$

- *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{lll} x = 1 & & \rightarrow\ x - 1 = 0 \\ \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1} & \rightarrow\ y + 3 = 2z & \rightarrow\ y - 2z + 3 = 0 \end{array}\right\}$$

4.- Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y halla el punto de corte, cuando sea posible:

a) $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ $\qquad$ $s: \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$

b) $r: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ $\qquad$ $s: \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{2}$

c) $r: \dfrac{x}{2} = y - 1 = \dfrac{z+1}{3}$ $\qquad$ $s: \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$

d) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$ $\qquad$ $s: \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 3 + 6\lambda \\ z = 4 + 8\lambda \end{cases}$

a) $\overrightarrow{d_r}(3, 2, 4)$; $P(1, -2, 1)$

$\overrightarrow{d_s}(-1, 2, 3)$; $P'(-2, 3, 2)$

$\overrightarrow{PP'}(-3, 5, 1)$

$$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}_{M}\!\!\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow |M'| = -51 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) $\overrightarrow{d_r}(-1, 2, 1)$; $P(1, 1, 2)$

$\overrightarrow{d_s}(4, 1, 2)$; $P'(4, 4, 5)$

$\overrightarrow{PP'}(3, 3, 3)$

$$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{M}\!\!\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow |M'| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran(M) = ran(M') = 2 \rightarrow$$

$\rightarrow$ Las rectas se cortan.

Para hallar el punto de corte, escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 4\mu \\ y = 4 + \mu \\ z = 5 + 2\mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \lambda = 4 + 4\mu \\ 1 + 2\lambda = 4 + \mu \\ 2 + \lambda = 5 + 2\mu \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando la 1ª y la 3ª: } 3 = 9 + 6\mu \quad \rightarrow \quad \mu = -1 \\ \text{Sustituyendo en la 1ª: } 1 - \lambda = 4 - 4 \quad \rightarrow \quad \lambda = 1 \end{array}$$

Sustituyendo $\lambda = 1$ en las ecuaciones de r (o bien $\mu = -1$ en las de s), obtenemos el punto de corte: $(0, 3, 3)$.

c) $\overrightarrow{d_r}(2, 1, 3)$; $P(0, 1, -1)$

$\overrightarrow{d_s}(1, -2, 0) \times (0, 3, -1) = (2, 1, 3)$

Tienen la misma dirección, y el punto $P \in r$, pero $P \notin s$, luego las rectas son paralelas.

d) $$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{d_r}(2, 3, 4) \\ \overrightarrow{d_s}(4, 6, 8) \end{array}\right\} \text{ Tienen la misma dirección.}$$

Veamos si el punto $P(1, 0, 0) \in r$, pertenece también a s:

$$\left.\begin{array}{lll} 3 + 4\lambda = 1 & \rightarrow & \lambda = -1/2 \\ 3 + 6\lambda = 0 & \rightarrow & \lambda = -1/2 \\ 4 + 8\lambda = 0 & \rightarrow & \lambda = -1/2 \end{array}\right\} P \in s$$

Por tanto, las rectas r y s coinciden, son la misma recta.

5.- Obtén el valor de *a* para el cual las rectas *r* y *s* se cortan, y halla el punto de corte:

$$\boldsymbol{r: x = y = z - a} \qquad \boldsymbol{s: \frac{2x - 1}{3} = \frac{y + 3}{-2} = \frac{z - 2}{0}}$$

$r: x = y = z - a \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{d_r}(1, 1, 1);\ P(0, 0, a)$

$$s: \frac{x - 1/2}{3/2} = \frac{y + 3}{-2} = \frac{z - 2}{0} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{d_s}\left(\frac{3}{2}, -2, 0\right);\ P'\left(\frac{1}{2}, -3, 2\right)$$

$$PP'\left(\frac{1}{2}, -3, 2 - a\right)$$

$$M' = \left(\begin{array}{cc} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 3/2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} 1/2 \\ -3 \\ 2 - a \end{matrix} \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad ran\,(M) = 2$$

Para que las rectas se corten, ha de ser $ran(M') = 2$, es decir, $|M'| = 0$:

$$|M'| = \frac{7a-21}{2} = 0 \rightarrow a = 3$$

Para hallar el punto de corte, escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu \\ y = -3 - 2\mu \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu \\ \lambda = -3 - 2\mu \\ 3 + \lambda = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1 = -3 - 2\mu \rightarrow \mu = -1 \\ \lambda = -1 \end{array}$$

Sustituyendo $\lambda = -1$ en las ecuaciones de r (o $\mu = -1$ en las de s), obtenemos el punto de corte: $(-1, -1, 2)$.

6.- Halla los valores de *m* y *n* para que las rectas *r* y *s* sean paralelas:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad \boldsymbol{s}: \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r(4, 1, -1) \\ \vec{d}_s(m, 3, n) \end{array}\right\} \text{Las coordenadas han de ser proporcionales:}$$

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{1} = \frac{n}{-1} \rightarrow m = 12, \ n = -3$$

(El punto $P(0, 1, -3) \in s$, pero $P \notin r$; luego las dos rectas son paralelas si $m = 12$ y $n = -3$).

7.- Calcula *m* y *n* para que los planos α: $mx + y - 3z - 1 = 0$ y β: $2x + ny - z - 3 = 0$ sean paralelos. ¿Pueden ser coincidentes?

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha(m, 1, -3) \\ \vec{n}_\beta(2, n, -1) \end{array}\right\} \text{Las coordenadas han de ser proporcionales:}$$

$$\frac{m}{2} = \frac{1}{n} = \frac{-3}{-1} \rightarrow m = 6, \ n = \frac{1}{3}$$

Así, quedaría:

$$\begin{cases} \alpha: 6x + y - 3z - 1 = 0 \rightarrow 6x + y - 3z - 1 = 0 \\ \beta: 2x + \frac{1}{3}y - z - 3 = 0 \rightarrow 6x + y - 3z - 9 = 0 \end{cases}$$

Los planos son paralelos, no coincidentes. No pueden ser coincidentes pues los términos independientes no son proporcionales a los anteriores.

8.- Escribe la ecuación del plano que pase por los puntos (0, 0, 0), (2, 2, 0) y (1, 1, 2).

$(2, 2, 0) \times (1, 1, 2) = (4, -4, 0) \quad \rightarrow \quad \vec{n}(1, -1, 0)$

$P(0, 0, 0)$

El plano es: $x - y = 0$

9.- Determina el valor de *a* para que las rectas *r* y *s* sean coplanarias. Halla el plano que las contiene.

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-a}{1} = \frac{z}{0} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

$\vec{d_r}(1, 1, 0); \ P(0, a, 0)$

$\vec{d_s}(1, -1, 1); \ P'(1, 1, -1)$

$\vec{PP'}(1, 1 - a, -1)$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1-a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Para que las rectas sean coplanarias, ha de ser } |M'| = 0.$$

$|M'| = a + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad a = -2$

Un vector normal al plano es: $\vec{d_r} \times \vec{d_s} = (1, 1, 0) \times (1, -1, 1) = (1, -1, -2)$

El plano que las contiene es: $1(x - 1) - 1(y - 1) - 2(z + 1) = 0$

$x - y - 2z - 2 = 0$

10.- Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos *A* (1, 3, 2) y *B* (–2, 5, 0) y es paralelo a la recta:

$$\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{cases}$$

El plano será paralelo a $\vec{AB}(-3, 2, -2)$ y a $\vec{d}(-1, 1, -3)$.

Un vector normal al plano es: $(-3, 2, -2) \times (-1, 1, -3) = (-4, -7, -1) \quad \rightarrow \quad \vec{n}(4, 7, 1)$

El plano es: $4(x - 1) + 7(y - 3) + 1(z - 2) = 0$

$4x + 7y + z - 27 = 0$

11.-

Dado el plano $\pi: 2x - 3y + z = 0$ y la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$, halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

El plano será paralelo a $(2, -3, 1)$ y a $(1, -1, 2)$.

Un vector normal al plano es: $(2, -3, 1) \times (1, -1, 2) = (-5, -3, 1) \quad \rightarrow \quad \vec{n}(5, 3, -1)$

El punto $(1, 2, -1)$ pertenece al plano.

La ecuación del plano es: $5(x - 1) + 3(y - 2) - 1(z + 1) = 0$

$5x + 3y - z - 12 = 0$

12.- Estudia la posición de los siguientes planos:

$$\text{a)}\left\{\begin{array}{l} x+2y-z-3=0\\ 3y+2z-1=0\\ x+y+z-2=0\end{array}\right.\quad \text{b)}\left\{\begin{array}{l} 2x-y+z-3=0\\ x-y+z-2=0\\ 3x-y+z-4=0\end{array}\right.\quad \text{c)}\left\{\begin{array}{l} x-y+z-1=0\\ 3x+y-2z=0\\ 2x+2y-3z+4=0\end{array}\right.$$

$$\text{a)}\left.\begin{array}{l} x+2y-z=3\\ 3y+2z=1\\ x+y+z=2\end{array}\right\}\ M'=\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)}_{M}$$

$|M| = 8 \ \rightarrow\ ran\,(M) = ran\,(M') = 3 \ \rightarrow$ Los tres planos se cortan en un punto.

$$\text{b)}\left.\begin{array}{l} 2x-y+z=3\\ x-y+z=2\\ 3x-y+z=4\end{array}\right\}\ M'=\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1 & 4\end{array}\right)}_{M}$$

La 3ª columna es –1 · 2ª; y la 4ª columna se obtiene sumando la 1ª y la 3ª.

Luego $ran\,(M) = ran\,(M') = 2 \ \rightarrow$ Los tres planos se cortan en una recta.

$$\text{c)}\left.\begin{array}{l} x-y+z=1\\ 3x+y-2z=0\\ 2x+2y-3z=-4\end{array}\right\}\ M'=\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -2 & 0\\ 2 & 2 & -3 & -4\end{array}\right)}_{M}$$

$\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 4 \neq 0$ y $|M| = 0 \ \rightarrow\ ran\,(M) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -4\end{vmatrix} = -12 \neq 0 \ \rightarrow\ ran\,(M') = 3$

Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

13.- Halla el valor de *a* para que las rectas *r* y *s* estén en un mismo plano y halla la ecuación de ese plano:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-2z=0\\ y-z=2\end{array}\right.\qquad s:\left\{\begin{array}{l} x+y=1\\ x+2z=a\end{array}\right.$$

Escribimos las ecuaciones de r y s en forma paramétrica:

$$r: \left\{\begin{array}{l} x \quad -2z = 0 \;\rightarrow\; x = 2z \\ \quad y - \; z = 2 \;\rightarrow\; y = 2 + z \end{array}\right\} \qquad r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$s: \left\{\begin{array}{l} x + y \qquad = 1 \;\rightarrow\; y = 1 - x \\ x \qquad + 2z = a \;\rightarrow\; z = \dfrac{a}{2} - \dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \qquad s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \dfrac{a}{2} - \lambda \end{cases}$$

Obtenemos un punto y un vector dirección de cada recta:

$\vec{d}_r(2, 1, 1)$; $P(0, 2, 0)$

$\vec{d}_s(2, -2, -1)$; $P'(0, 1, a/2)$

$\overrightarrow{PP'}(0, -1, a/2)$

Para que las rectas estén en el mismo plano, los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{PP'}$ han de ser coplanarios:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & a/2 \end{vmatrix} = -3a - 4 = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{-4}{3}$$

El plano será paralelo a $\vec{d}_r$ y a $\vec{d}_s$. Un vector normal al plano es:

$\vec{n} = (2, 1, 1) \times (2, -2, -1) = (1, 4, -6)$

El punto $P(0, 2, 0)$ pertenece al plano.

La ecuación del plano es: $1(x - 0) + 4(y - 2) - 6(z - 0) = 0$

$$x + 4y - 6z - 8 = 0$$

14.-

Halla la ecuación de la recta paralela a $r: \begin{cases} x \quad + 2z = 5 \\ \quad y + 3z = 5 \end{cases}$ que pase por el punto de intersección de la recta $s: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+2}{3}$ con el plano $\pi: x - y + z = 7$.

Un vector dirección de la recta es: $(1, 0, 2) \times (0, 1, 3) = (-2, -3, 1) \,//\, (2, 3, -1)$

Escribimos la recta s en forma paramétrica para hallar el punto de corte de s y π:

$$s: \begin{cases} x = \;\; 1 + 4\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \pi: \; x - y + z = 7 \\ \quad 1 + 4\lambda + 3 - 2\lambda - 2 + 3\lambda = 7 \\ \quad 5\lambda = 5 \;\rightarrow\; \lambda = 1 \end{array}$$

El punto de corte de s y π es $(5, -1, 1)$.

Por tanto, la recta que buscamos es:

$$\begin{cases} x = \;\; 5 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \;\; 1 - \;\lambda \end{cases} \text{ o bien } \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

15.- Estudia la posición de los siguientes planos según los valores de *m*:

$$\begin{cases} \mathbf{x + \qquad\quad y \qquad = 1} \\ \qquad\quad \mathbf{my + \quad z = 0} \\ \mathbf{x + (1 + m)y + mz = m + 1} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + \quad y \quad = 1 \\ \quad my + \quad z = 0 \\ x + (1+m)y + mz = m+1 \end{array}\right\} M' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{array}}_{M} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ m+1 \end{array}\right.\right)$$

$$|M| = m^2 - m = 0 \begin{array}{l} \nearrow m = 0 \\ \searrow m = 1 \end{array}$$

- Si $m = 0$, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ El 1º y el 3º son el mismo plano; el 2º los corta. Por tanto, se cortan en una recta.

- Si $m = 1$, queda:

$$M' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}}_{M} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array}\right.\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ y } |M| = 0 \rightarrow ran\,(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran\,(M') = 3$$

Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \rightarrow ran\,(M) = ran\,(M') = 3$. Los planos se cortan en un punto.

16.- Halla la ecuación de la recta *r* que pasando por el punto *P*(2, 0, –1) corta a las rectas:

$$s_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1} \qquad s_2: \left\{\begin{array}{l} x + y \quad\quad + 4 = 0 \\ \quad y - 3z + 3 = 0 \end{array}\right.$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$s_1: \left\{\begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array}\right. \qquad s_2: \left\{\begin{array}{l} x = -1 - 3\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

La recta r está determinada por los siguientes planos:

α: contiene a la recta s_1 y al punto P: $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

β: contiene a la recta s_2 y al punto P: $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Así, $r: \left\{\begin{array}{l} x - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 1 = 0 \end{array}\right.$