1º-Hallar **a** y **b** para que las rectas siguientes sean paralelas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + ay - z = 1 \\ 2x + 3y + bz = 3 \end{cases} \qquad s \equiv 4x = 2y + 6 = z$$ Sol: a=1 ; b=-2

2º-Dadas las rectas de ecuaciones $\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z-2}{2}$ $\quad (x,y,z) = (2,0,1) + \alpha(1,1,-2)$

a) Estudiar su posición relativa en el espacio.
b) Calcular las distancias entre ellas.
c) Trazar una recta que corte perpendicularmente a ambas.

Sol: a) Cruzan b) d(r,s)=2,06 c) $t \equiv \begin{cases} x = \frac{18}{53} + 4\lambda \\ y = \frac{62}{53} - 6\lambda \\ z = \frac{124}{53} - \lambda \end{cases}$

3º-Dados los planos de ecuaciones: **ax-2z=15 2x+y+z=-7 x+y+az=-8a**
a) Determinar los valores de **a** para que los tres planos pasen por una recta.
b) En este caso, determinar dos puntos de esta recta.
Sol: a) a=-1 b) A(-15,23,0) B(1,-1,-8).

4º-Encontrar las ecuaciones de todos los planos paralelos al plano $\pi \equiv 4x - 4y + 2z = 1$ y que disten de éste 1 unidad de longitud. Sol: $\pi' \equiv 4x - 4y + 2z = 7$ $\pi'' \equiv 4x - 4y + 2z = -5$

5º-Averiguar la posición relativa de las rectas: $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$

$s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{4}$

Sol: Se cruzan.

6º-Dada la recta **r** de ecuación $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{4}$ hallar:

a) Las ecuaciones implícitas de otra recta cualquiera **r'** que sea ortogonal a **r**, pase por el punto **A(0,-3,2)** y no corte a **r**.
b) Un punto **B** en **r** y otro **B'** en **r'** de modo que el módulo del segmento **BB'** sea la distancia entre **r** y **r'**.

Sol: a) $r' \equiv \begin{cases} z = 2 \\ 3x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$ b) B(-40/29, 41/29, 24/29) B'(-32/13, 9/13, 2)

7º-Determinar condiciones en el parámetro **a** para que la recta definida por las ecuaciones:

$r \equiv \begin{cases} 3x + ay + z - 1 = 0 \\ 2x + 6y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$ esté situada en el plano **x+y+z+1=0**

Sol: $r \equiv \begin{cases} 3x + 5y + z - 1 = 0 \\ 2x + 6y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$

8º-Determinar, en función de x, la distancia de un punto de coordenadas (x,0,0) a la recta de ecuaciones:

$r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ ¿Para qué punto (x,0,0) la distancia a dicha recta es igual a la distancia al plano **x=0** ?

Sol: a) $d(p,r) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |x|$ b) x=0

9º-Determinar t para que los puntos **A(1,1,1) B(3,0,2) C(5,-2,2) D(2,1,t)** sean coplanarios. Para el valor t calculado anteriormente, obtener el área del polígono **ABCD**. Sol: t=2 $Area = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

10º-Dados los puntos **A(3,-2,0)** y **B(1,-2,-2)** y la recta de ecuación $r \equiv x = y = z$ calcular la distancia desde el punto **B** al plano que contiene a **r** y al punto **A**.. Sol: $d = \frac{6}{\sqrt{38}} = 0,973$

11º-Hallar la ecuación del plano que pasa por **P(0,0,1)** y contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$

Sol: π =4x-3y+7z-7=0

12º-Hallar la distancia del punto **Q(5,5,-3)** al plano $\pi \equiv (x,y,z) = (0,0,4) + \lambda(2,2,-1) + \mu(-3,2,0)$

Sol: a) d=$\frac{45}{\sqrt{113}}$

13º-Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} \alpha x + \alpha\beta y + (1-\alpha)z = \beta \\ x + \beta y + z = 2 \\ \alpha x + \alpha y + (1-\alpha)z = \beta \end{cases}$

a) Demostrar que si α=0, dicho sistema representa una recta y hallar sus ecuaciones paramétricas.

b) Para que valores de α y ß representa un plano. Sol: b) $\alpha = \frac{1}{2}\ \beta = 1$

14º-Calcular el ángulo que forma la recta **r** y el plano **π** : $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$

$\pi \equiv x - y - z = 0$

Sol: Recta paralela al plano

15º-Dado el plano de ecuación $\pi \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0$ y el punto **A(1,0,2)**; sea B el pie de la perpendicular de A a π y **C(2,1,-2)** un punto Se pide el área del triángulo **ABC**. Sol: $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

16º-Dadas las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2z = -3 \\ 3x - kz = 3 - 4k \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 3y - 2z = -2 \\ kx - 2y = k - 4 \end{cases}$$

determinar los valores de **k** para los cuales las rectas están en un mismo plano y buscar una ecuación de este plano.

Sol: K=-2 3x+2z-11=0

17º-Determinar el plano que pasa por la recta de ecuación: $r \equiv \begin{cases} x + y + z = -5 \\ x - 2y - z = 3 \end{cases}$

y es paralelo a la recta de ecuación: $r' \equiv \frac{2x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{-z+174}{2}$

Sol: π≡ 13x-8y-z+9=0

18º-Hallar la distancia del punto A(1,2,3) a la recta $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y la ecuación del plano π que pasa por A y es perpendicular a la recta. Sol: d=$\sqrt{5}$ $\pi \equiv z = 3$

19º-Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(2,0,1) y contiene a la recta de ecuación

$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$ Sol: $\pi \equiv 4x - 3y + 5z - 13 = 0$

20º-Sean las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$

a) Hallar la ecuación de un plano que pasa por A(-1,-1,0) y es paralelo a las dos rectas.

b) Hallar las intersecciones de dicho plano con los ejes coordenados.

Sol: $\pi \equiv 14x + 35y - 18z + 49 = 0 \quad (-7/2,0,0) \quad (0,-7/5,0) \quad (0,0,49/18)$

21º-Comprobar que los puntos A,B,C forman un triángulo: A(1,1,1) B(0,-1,0) C(2,3,0). Hallar el área de dicho triángulo. Sol: $A = \sqrt{5}$

22º-Obtener las coordenadas del punto simétrico del A(1,-3,7) respecto de la recta:

$r \equiv x - 1 = y + 3 = \dfrac{z - 4}{2}$ Sol: A'=(3,-1,5)

23º-Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ $s \equiv \dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 1}{-1} = \dfrac{z + 2}{-2}$ estudiar su posición y, si fuese posible, la ecuación del plano que las contiene. Sol:Las rectas se cruzan. No hay plano que las contengan.

24º-Hallar la distancia entre el punto (3,2,7) y la recta diagonal del primer octante del espacio $\Re^3$.

Sol: $d = \sqrt{14}$

25º-Una recta es paralela a los planos **x+y=1 x+z=0** y pasa por el punto (2,0,0). Hallar sus ecuaciones.

Sol: $\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{-1}$

26º-Hallar la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos **2x+y-z=0 , x-y+z+3=0** y pasa por el punto (3,2,1). Sol: $\pi \equiv y + z = 3$

27º-Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (1,0,-1) es perpendicular al plano **x-y+2z+1=0** y además es paralelo a la recta $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Sol:

$\pi \equiv 2x - 4y - 3z - 5 = 0$

28º-Sean los planos: $\pi_1 \equiv x + y + z = \alpha - 1 \qquad \pi_2 \equiv 2x + y + \alpha z = \alpha \qquad \pi_3 \equiv x + \alpha y + z = 1$

Se pide: a) Estudiar, según los valores del parámetro la posición relativa de los tres planos anteriores.

b) Hallar la intersección de los planos cuando α=2.

Sol: a) $\alpha = 1$ No tienen ningún punto común. $\alpha = 2$ Se cortan según una recta.
$\alpha \neq 1 \neq 2$ Se cortan en un punto.

b) $r \equiv \begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{z}{1} \\ y = 0 \end{cases}$

29º-a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,2,3) y es perpendicular al plano de ecuación 2x-y+3z+5=0

b) Calcular la distancia del punto al plano.

Sol: a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{3}$ b) $d = \sqrt{14}$

30º-Dados dos planos de ecuaciones **3x-y+z=1** **x+y-2z=0** hallar un vector cuya dirección sea paralela a ambos. Sol: **v**=(1,7,4)

31º-Se consideran las rectas $r \equiv \begin{cases} x-2=0 \\ y+3=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-2z=1 \\ y+z=3 \end{cases}$.

Se pide :

-Estudiar la posición relativa de r y s.

-Hallar la mínima distancia entre ambas. Sol: Se cruzan $d_m = \frac{11\sqrt{5}}{5}$

32º-Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=4z \end{cases}$ y el punto P(3,4,1).Hallar el plano π que contiene a la recta **r** y al punto **P**. Calcular la distancia de **P** a **r**. Sol: d=3

33º-Sean los planos de ecuaciones: **x-y-1=0** **2x+3y-5z+16=0** **x+αy-z=0** donde α es un parámetro. Probar que, salvo para un cierto valor de α, dichos planos se cortan en un único punto. Determinar dicho valor. Sol: $\alpha_0 = 0$

34º-Calcular la ecuación de la recta que pasa por le punto (1,-1,2) y es perpendicular al plano determinado por los puntos (1,0,1) (3,2,1) y (2,-1,0). Expresarla como intersección de dos planos.

Sol: $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ \frac{z-2}{1} = \lambda \end{cases}$

35º-Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1,1,1) es paralela al plano **x-2y-z=0** y está en un mismo plano que la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ Sol:

$r \equiv \begin{cases} x-1 = z-1 \\ y = 1 \end{cases}$

36º-Dados los puntos A(1,0,-1) y el plano $\pi \equiv$ **2x-y+3z=4** se pide:

a) La ecuación de la recta que pasa por **A** es perpendicular a **π.**

b) El punto simétrico de **A** respecto a **π.**

c) De todos los planos que pasan por **A** y son perpendiculares a **π,** hallar el que pasa por B(2,1,2).

d) Ecuación del plano que pasa por **A** y es paralelo a **π.**

Sol: a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$ b)A'=(17/7, -5/7, 8/7) c) $\pi_1 \equiv 2x + y - z - 3 = 0$ d) $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z + 1 = 0$

37º-Calcula los planos bisectores de los planos **x+y-z=0 x-y+z=0** simplificando al máximo el resultado. ¿Que ángulo forman los planos bisectores? ¿Es esta una propiedad general? Razonar la respuesta.

Sol: $\pi_1 \equiv y - z = 0$ $\pi_2 \equiv x = 0$ $\alpha = 90''$

38º-Calcular el ángulo formado por las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1} \qquad s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$$ Sol: $\alpha = 90''$

39º-Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (1,2,3) y es paralela a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x - y + 3z = 4 \end{cases}$$ Sol: $\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-3}{5}$

40º-Hallar las coordenadas del punto de la recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto (3,2,1). Sol: P(1,1,2)

41º-Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ y la recta **s** determinada por los puntos A(2,1,0) y B(1,0,-1) estudiar su posición relativa y determinar un punto C de **r** tal que los segmentos **CA** y **CB** sean perpendiculares.

Sol: a) Se cortan b) C(2,0,0) C'(1,1,-1)

42º-Justificar que los puntos A(1,1,1) B(2,0,-1) C(5,2,1) y D(4,3,3) son los vértices consecutivos de un paralelogramo y obtener la ecuación del plano que lo contiene.

Sol: $\pi \equiv 2x - 8y + 5z + 1 = 0$

43º-a) Determinar la ecuación del plano π que pasa por le punto de coordenadas (1,-1,2) y es ortogonal a la recta de ecuación

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{1}$$

b) Hallar el punto de π cuya distancia al (3,-4,3) es mínima.

Sol: a) $\pi \equiv 2x - 3y + z - 7 = 0$ b) P(5/7, -4/7, 13/7)

44º-Calcular la distancia del punto (-2,4,-3) a la recta cuya ecuación es $\begin{cases} x = 2z + \dfrac{1}{2} \\ y = 4 - \dfrac{2z}{3} \end{cases}$

Sol: d=1'4

45º-Hallar una recta que sea perpendicular al plano **x-y+2z=-1** y que pase por el punto de dicho plano que está más próximo al origen de coordenadas.

Sol: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$