Aplicaciones de la integral definida. Cálculo de áreas.

1. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=-x^2+4x$, el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=3. Sol: 22/3.

a) Buscamos los puntos de cortes con el eje OX: $-x^2+4x=0$

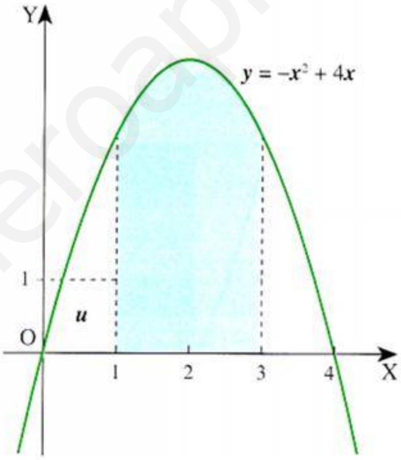
Obtenemos $x=0\ y\ x=4$

b) Seleccionamos aquellas que están comprendidas entre 1 y 3. En este caso no hay ninguna

c) Buscamos la una primitiva de

$$f(x)=-x^2+4x \Leftrightarrow F(x)=\int\left(-x^2+4x\right)dx=-\frac{x^3}{3}+2x^2$$

d) $$A=\left|\int_1^3\left(-x^2+4x\right)dx\right|=\left|\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_{x=1}^{x=3}\right|=\left|(-9+18)-\left(\frac{-1}{3}+2\right)\right|=\frac{22}{3}\ u^2$$



2. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=x^2-4x$, el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=3. Sol: 22/3.

a) Buscamos los puntos de cortes con el eje OX: $x^2-4x=0$.

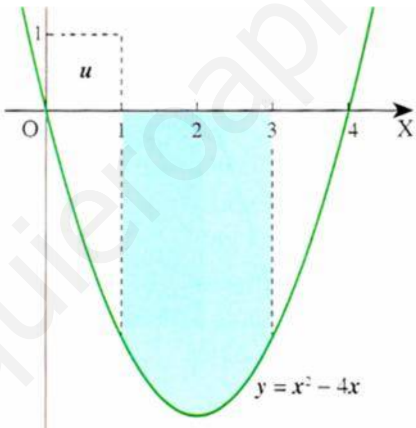
Obtenemos $x=0\ y\ x=4$

b) Seleccionamos aquellas que están comprendidas entre 1 y 3. En este caso no hay ninguna

c) Buscamos una primitiva de $f(x)=x^2-4x \Leftrightarrow F(x)=\int\left(x^2-4x\right)dx=\frac{x^3}{3}-2x^2$

d) $A=\left|\int_1^3\left(x^2-4x\right)dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_{x=1}^{x=3}\right|=\left|(9-18)-\left(\frac{1}{3}-2\right)\right|=\left|-\frac{22}{3}\right|=\frac{22}{3}u^2$

El área calculada es la de la figura y observa que es la misma que la calculada en el ejemplo anterior.



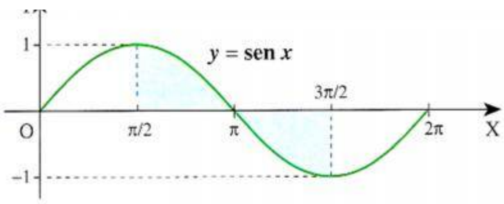
3. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=senx$ y el eje OX entre $x=\frac{\circledR}{2}\ y\ x=\frac{3\circledR}{2}$. Sol: 2

Los cortes con OX son $senx=0 \Rightarrow x=k\circledR$ Entre $x=\frac{\circledR}{2}\ y\ x=\frac{3\circledR}{2}$ solo hay uno $x=\circledR$

Luego

$$A=\left|\int_{\frac{\circledR}{2}}^{\circledR} senx\,dx\right|+\left|\int_{\circledR}^{\frac{3\circledR}{2}} senx\,dx\right|=\left|-\cos x\right|_{x=\frac{\circledR}{2}}^{x=\circledR}+\left|-\cos x\right|_{x=\circledR}^{x=\frac{3\circledR}{2}}=\left|-\cos\circledR+\cos\frac{\circledR}{2}\right|+\left|-\cos\frac{3\circledR}{2}+\cos\circledR\right|=2u^2$$

La gráfica del recinto es la zona sombreada:



por tanto el área pedida es:

4. Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=2x^2+x-3$ y $g(x)=x^2+3$ entre x=-1 y x=1. Sol: 34/3.

Hay que estudiar el signo de la función diferencia: $d(x) = f(x) - g(x)$

$$d(x) = 2x^2 + x - 3 - (x^2 + 3) = x^2 + x - 6$$

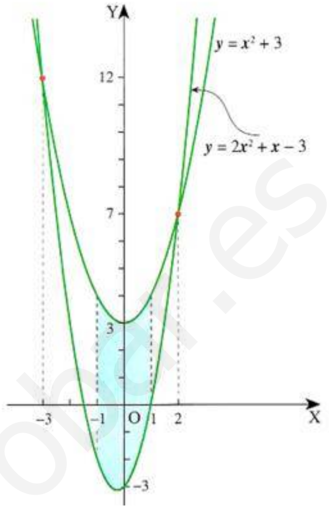
$d(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3$ y $x = 2$. Luego $d(x) < 0$ si $x \in \,]-3, 2[$ y como $[-1, 1] \subset \,]-3, 2[$ se verifica que $d(x) < 0$ en $[-1, 1]$

Por tanto el área pedida es:

$$A = -\int_{-1}^{1} d(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} (x^2 + x - 6)dx = -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= -\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 6\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 6\right)\right] = \frac{34}{3}\,u.a.$$

Observa que el área calculada es la suma del área que está por encima de OX: $\int_{-1}^{1} (x^2 + 3)dx$, mas la que está por debajo que es $-\int_{-1}^{1} (2x^2 + x - 3)dx$. Así: $\int_{-1}^{1} (x^2 + 3)dx - \int_{-1}^{1} (2x^2 + x - 3)dx$ $= \int_{-1}^{1} (-x^2 - x + 6)dx = -\int_{-1}^{1} (x^2 + x - 6)dx$ que es la integral definida calculada anteriormente.



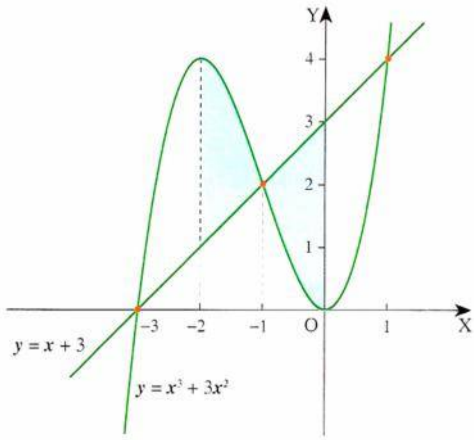
5. Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=x^3+3x^2$ y $g(x)=x+3$ entre x=-2 y x=0. Sol: 7/2.

$$A = \int_{-2}^{-1} (x^3 + 3x^2 - x - 3)dx - \int_{-1}^{0} (x^3 + 3x^2 - x - 3)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x\right]_{-1}^{0} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right) - (4 - 8 - 2 + 6) - \left[0 - \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right)\right] = \frac{7}{2}\,u.a.$$

El área calculada es la de la figura.



Si se hubiera hecho con una sola integral, hubiera resultado área cero, imposible después de haber observado la figura.

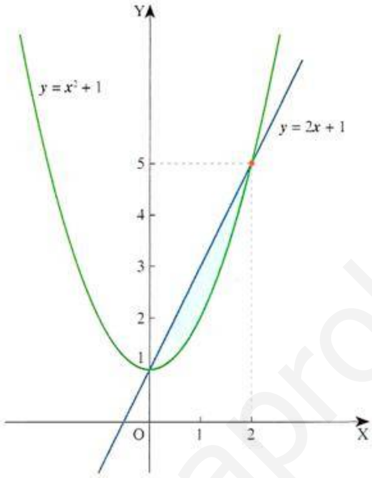
6. Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=2x+1$. Sol: 4/3.

Se calculan las abscisas de los puntos de corte de las gráficas resolviendo la ecuación $x^2+1=2x+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x=0$ y $x=2$.

Se calcula el signo de $d(x)=x^2+1-(x+1)=x^2-2x$ en $[0, 2]$ que es negativo en todo el intervalo. Por tanto:

$$A=-\int_0^2 (x^2-2x)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2=-\left(\frac{8}{3}-4\right)=\frac{4}{3}\,u.a.$$

El área calculada es la de la figura



7. Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=x$. Sol: 1/2.

Se calculan las abscisas de los puntos de corte de las gráficas

$$x^3=x \Rightarrow x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0, x=1 \text{ y } x=-1.$$

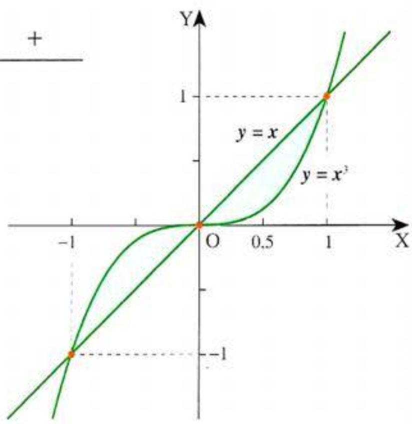
Se estudia el signo de $d(x)=x^3-x$ en el intervalo $[-1, 1]$ que es:

signo $x^3-x=x(x+1)(x-1)$	$-$	-1	$+$	0	$-$	1	$+$

El área pedida es:

$$A=\int_{-1}^0 (x^3-x)dx-\int_0^1 (x^3-x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=$$

$$=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,u.a.$$



8. Calcular el área limitada por la parábola $f(x) = x^2 - x - 2$ y el eje OX. Sol: 9/2.

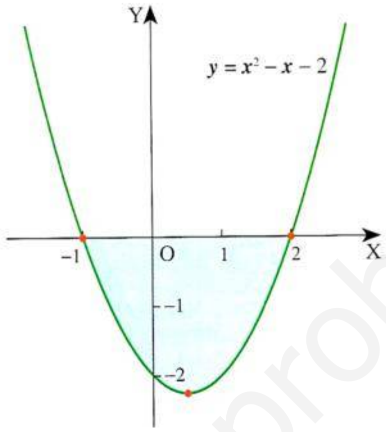
Este ejercicio se resuelve hallando el área encerrada por la parábola $y = x^2 - x - 2$ y la recta $y = 0$.

Se resuelve la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$, que tiene por soluciones $x = -1$ y $x = 2$.

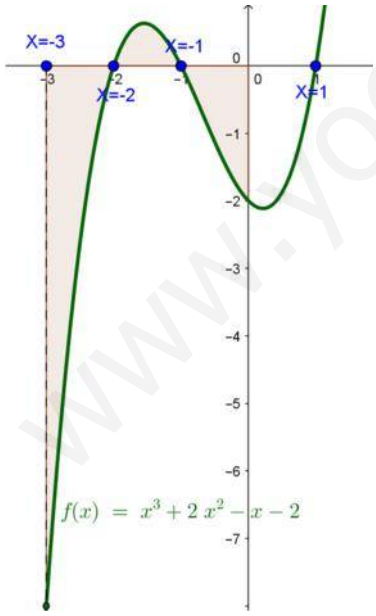
El signo de $f(x) - g(x) = x^2 - x - 2$ en $[-1, 2]$ es negativo, por tanto:

$$A = -\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{2} = -\left(\left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)\right) = \frac{9}{2} u.a.$$

El área obtenida es la de la figura



9. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$, el eje de abscisas y las rectas x=-3 y x=0. Sol: 55/12.



Buscamos los ceros de la función

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2;\ x = -1;\ x = 1.$

Nos fijamos que entre x=-3 y x=0 solo están x=-2 y x=1.

Así el área buscada es:

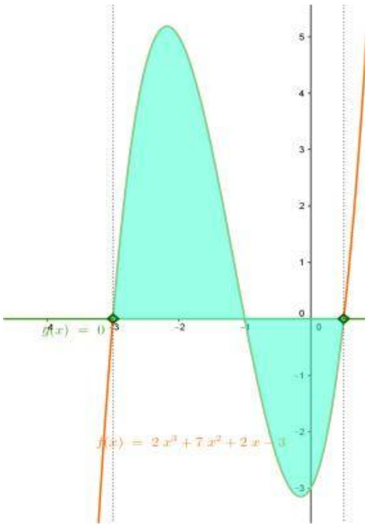
$$A = \left|\int_{-3}^{-2}\left(x^3 + 2x^2 - x - 2\right)dx\right| + \left|\int_{-2}^{-1}\left(x^3 + 2x^2 - x - 2\right)dx\right| +$$

$$+\left|\int_{-1}^{0}\left(x^3 + 2x^2 - x - 2\right)dx\right| == \left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{x=-3}^{x=-2}\right| +$$

$$+\left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{x=-2}^{x=-1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{x=-1}^{x=0}\right| =$$

$$= \left|\frac{2}{3} - \frac{15}{4}\right| + \left|\frac{13}{12} - \frac{2}{3}\right| + \left|0 - \frac{13}{12}\right| = \frac{37}{12} + \frac{5}{12} + \frac{13}{12} = \frac{55}{12}\ u^2$$

10. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $y=2x^3+7x^2+2x-3$, el eje de abscisas. Sol: 55/12.



Buscamos los puntos de corte con OX

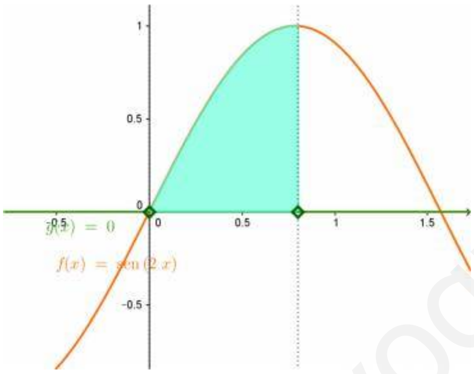
$$2x^3+7x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=-3;\ \ x=-1;\ \ x=\frac{1}{2}$$

El área buscada es:

$$A=\left|\int_{-3}^{-1}\left(2x^3+7x^2+2x-3\right)dx\right|+\left|\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(2x^3+7x^2+2x-3\right)dx\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{x^4}{2}+\frac{7x^3}{3}+x^2-3x\right]_{x=-3}^{x=-1}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{2}+\frac{7x^3}{3}+x^2-3x\right]_{x=-1}^{x=\frac{1}{2}}\right|=\frac{55}{12}\ u^2$$

11. Calcular el área del trapecio mixtilíneo que determina la gráfica de la función $f(x)=sen2x$ en el intervalo $\left[0,\frac{\text{®}}{4}\right]$. Sol: ½.



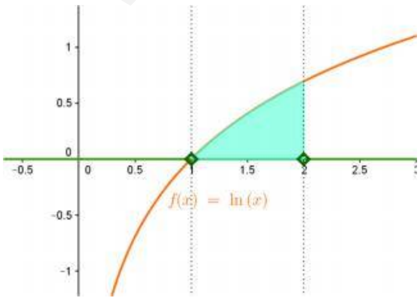
Buscamos los puntos de corte:

$$sen\,2x=0 \ \Rightarrow 2x=k\text{®} \ \Rightarrow x=\frac{k\text{®}}{2} \ \ k\in$$

En el intervalo $\left[0,\frac{\text{®}}{4}\right]$ no hay ninguno.

El área es: $A=\left|\int_0^{\frac{\text{®}}{4}} sen2x\,dx\right|=\left|\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{x=0}^{x=\frac{\text{®}}{4}}\right|=\frac{1}{2}\ u^2$

12. Calcular el área de la región del plano encerrado por la gráfica de la función $f(x)=\ln x$, el eje de abscisas y la recta de ecuación x=2. Sol: 2ln2 – 1



Puntos de corte con OX $\ln x=0 \Rightarrow x=1$

El área es: $A=\left|\int_1^2 \ln x\,dx\right|=\left|\left[x\ln x-x\right]_{x=1}^{x=2}\right|=2\ln 2-1\ u^2$

Hallamos la primitiva por partes

$$\int \ln x dx \underset{\begin{bmatrix} u=\ln x & dv=dx \\ du=\frac{dx}{x} & v=x\end{bmatrix}}{=} x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C$$

13. Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2+2x$ y $g(x)=x+2$ Sol: 9/2.

En primer lugar averiguamos sus puntos de intersección. Para ello resolvemos la ecuación $f(x) = g(x)$:

$$x^2 + 2x = x + 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1; \quad x = -2$$

Sus representaciones gráficas se muestran en la figura 7.24.

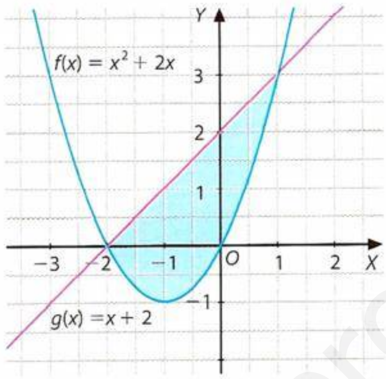


FIGURA 7.24.

El área buscada será:

$$A = \left| \int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))\, dx \right| = \left| \int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2)\, dx \right| =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^{1} = \left| \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) - \left(\frac{-8}{3} + 2 + 4 \right) \right| = 4{,}5 \text{ u}^2$$

14. Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\ln x$ y las rectas x=1 y x=e. Sol: 11,43.

Las dos curvas no tienen ningún punto de intersección, como se puede observar en la figura 7.25.

El área buscada será:

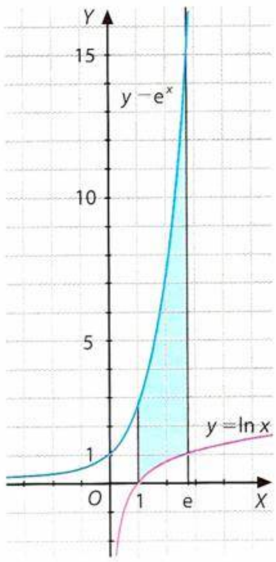
$$A = \left| \int_{1}^{e} (e^x - \ln x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[e^x - x(\ln x - 1) \right]_1^e \right| =$$

$$= \left| \left[e^e - e(\ln e - 1) \right] - \right.$$

$$\left. - \left[e^1 - 1(\ln 1 - 1) \right] \right| =$$

$$= \left| e^e - e - 1 \right| = 11{,}43 \text{ u}^2$$



15. Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=x$ y $g(x)=\sqrt[3]{x}$
Sol: 1/2.

En primer lugar se calculan sus puntos de intersección:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x=\sqrt[3]{x} \Rightarrow x^3=x \Rightarrow x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0$$

Se resuelve la ecuación y se obtiene: $x=-1$; $x=0$; $x=1$

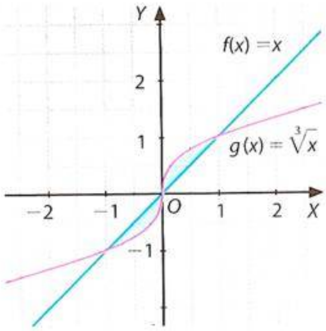


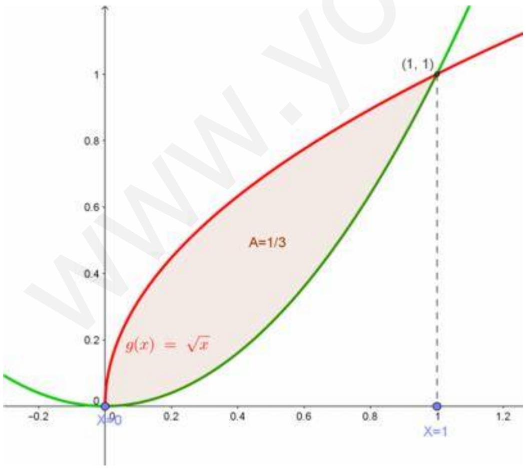
FIGURA 7.26.

El área buscada es:

$$A=\left|\int_{-1}^{0}(x-\sqrt[3]{x})\,dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x-\sqrt[3]{x})\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}\right]_{-1}^{0}\right|+$$

$$+\left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}\right]_{0}^{1}\right|=\frac{1}{4}+\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{2}\,u^2$$

16. Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$
Sol: 1/3.



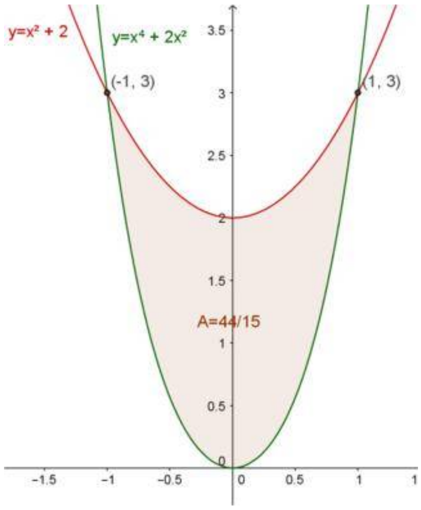
Buscamos los puntos de corte de ambas funciones:

$$x^2=\sqrt{x} \Rightarrow x^4=x \Rightarrow x=0;\ x=1$$

El área es:

$$A=\left|\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx\right|=\frac{1}{3}\,u^2$$

17. Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y=x^4+2x^2$ e $y=x^2+2$ Sol: 44/15.



Buscamos los puntos de cortes de las dos funciones:

$$x^4+2x^2=x^2+2 \Rightarrow x^4+x^2-2=0 \Rightarrow x=1;\ \ x=-1$$

El área buscada será:

$$A=\left|\int_1^{-1}\left(x^4+x^2-2\right)dx\right|=\left|\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}-2x\right]_{x=1}^{x=-1}\right|=\frac{44}{15}\ u^2$$

18. Calcular el valor del coeficiente b sabiendo que el área delimitada por la parábola $y=x^2+bx$ y la recta $x+y=0$ es 36 u^2. Sol: b=-7 o b=5

Buscamos los puntos de corte $\begin{cases} y=x^2+bx \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow x^2+bx=-x \Rightarrow x^2+(b+1)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-b-1 \end{cases}$

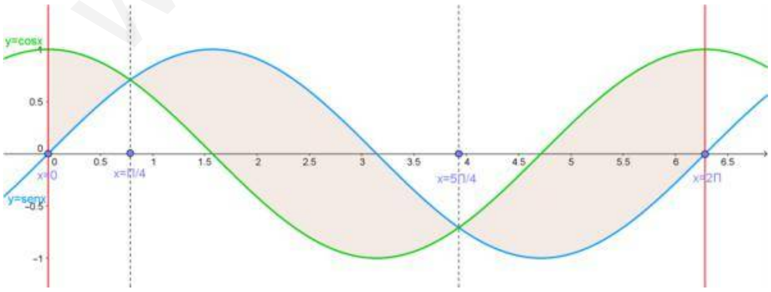
El área pedida es $A=\left|\int_0^{-b-1}\left(x^2+(b+1)\right)dx\right|=36$

Resolvemos la integral: $\left|\int_0^{-b-1}\left(x^2+(b+1)x\right)dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}+(b+1)\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=-b-1}\right|=\left|\frac{(b+1)^3}{6}\right|$

Como el área es 36

$$\left|\frac{(b+1)^3}{6}\right|=36 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{(b+1)^3}{6}=36 \Rightarrow (b+1)^3=6^3 \Rightarrow b+1=6 \Rightarrow b=5 \\ \frac{(b+1)^3}{6}=-36 \Rightarrow (b+1)^3=(-6)^3 \Rightarrow b+1=-6 \Rightarrow b=-7 \end{array}\right.$$

19. Calcular el área delimitada por las funciones $f(x)=senx$ y $g(x)=\cos x$ en $[0,2®]$. Sol: 5,66



Buscamos los puntos donde se cortan:

$$sen\,x=\cos x \Leftrightarrow tg(x)=1 \Rightarrow x=\frac{®}{4}+k® \quad k\in$$

En $[0,2®]$ hay dos valores:

$$x=\frac{®}{4};\ \ x=\frac{5®}{4}$$

El área buscada es:

$$A=\left|\int_0^{\frac{®}{4}}(sen\,x-\cos x)\,dx\right|+\left|\int_{\frac{®}{4}}^{\frac{5®}{4}}(sen\,x-\cos x)\,dx\right|=\left|\left[-\cos x-sen\,x\right]_{x=0}^{x=\frac{®}{4}}\right|+\left|\left[-\cos x-sen\,x\right]_{x=\frac{®}{4}}^{x=\frac{5®}{4}}\right|=5,66\ u^2$$

CASOS ALGO ESPECIALES:

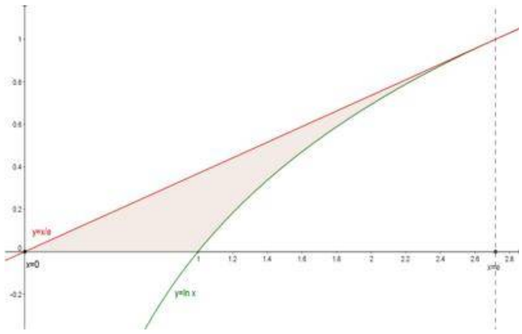
20. Calcular el área de la región del plano limitada por y=lnx, su recta tangente en x=e y el eje OX. Sol.: $\dfrac{e-2}{2}$

En primer lugar calculamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f\left(x\right)=\ln x$ en el punto de abscisa $x=e$.

Su pendiente será $m=f\,'(e)=\left.\dfrac{1}{x}\right|_{x=e}=\dfrac{1}{e}$ y $f(e)=\ln \mathrm{e}=1$

La ecuación de la tangente: $y-1=\dfrac{1}{e}\cdot\left(x-e\right)\Rightarrow y=\dfrac{x}{e}$.

El recinto del cual debemos obtener el área es:



Buscamos los puntos de corte de las funciones con los ejes: $\dfrac{x}{e}=0\Rightarrow x=0 \quad \ln x=0\Rightarrow x=1$.

Buscamos los puntos donde se cortan las dos funciones, que en este caso es el punto de tangencia $(e,1)$.

El área buscada será:

$$A=\int_0^1 \frac{x}{8}dx+\left|\int_1^e\left(\frac{x}{8}-\ln x\right)dx\right|=\frac{e-2}{2}$$

ó también $A=\displaystyle\int_0^e \frac{x}{8}dx-\int_1^e \ln x\ dx=\frac{e-2}{2}$

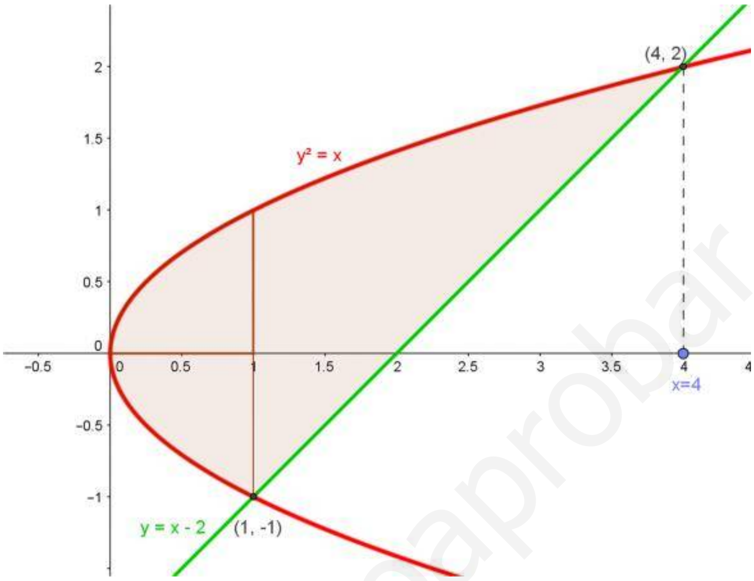
Pero la manera más sencilla es restar el área del triángulo determinando por (0,0), (e,0) y (e,1) y el área que determina y=lnx entre 1 y e, es decir:

$$A=\frac{e}{2}-\int_1^e \ln x\,dx=\frac{e}{2}-\left[x\ln x-x\right]_1^e=\frac{e}{2}-1=\frac{e-2}{2}\ u^2$$

21. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $y^2 = x$ y la recta $x - y - 2 = 0$.
Sol.: 9/2

Buscamos los puntos donde se cortan las dos curvas ($y^2 = x$ no es una función) y obtenemos como soluciones (1,-1) y (4,2).

El área buscada



$$A = 2\left|\int_0^1 \sqrt{x}dx\right| + \left|\int_1^4 \left(\sqrt{x} - (x-2)\right)dx\right| = 2\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{x=0}^{x=1} + \left|\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{x=1}^{x=4}\right| = \frac{9}{2}\,u^2$$