EJERCICIOS

1 .- Encontrar el punto del intervalo (0.2) en el que la función $f(x)=\int_0^x \frac{t-1}{1+t^2}\,d\,t$, alcanza un valor mínimo

Solución:

f(x) se define como una integral definida, es decir:

$$f(x)=\int_0^x \frac{t-1}{1+t^2}\,\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,dt - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt=\left.\frac{Ln(1+t^{2)}}{2}\right|_0^x - A\tan \mathrm{t}\Big|_0^x =$$

$$=\frac{Ln(1+x^2)}{2}-Atan\ \mathrm{x} \Rightarrow \mathrm{f'(x)}=\frac{\mathrm{x}-1}{1+x^2}$$

lo que era de esperar; Dicha derivada se anula para x=1 ;como $f'(x)<0$ para (0,1) y $f'(x)>0$ para (1,2) el punto x=1 de el mínimo

---

2 .- Dada la función $f(x)=\mathrm{Cos\ x}$, hallar el intervalo (0,a) tal que

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{dx}=1$$

Solución;

$$\int_0^a Cos\ \mathrm{x\ dx}=\mathrm{Sen\ X}\Big|_0^a = Sen\,\mathrm{a}\ -\mathrm{Sen\ 0}=\mathrm{Sen\ a}=1\Rightarrow$$

$$a=\mathrm{arSen}\,1=\frac{\pi}{2}$$

luego el intervalo buscado es $(0,\frac{\pi}{2})$

3.-Calcular $\int_1^7 f(x)dx$, siendo $f(x)=\begin{cases} x\sqrt{2x+3} & \mathrm{si\ \ x<3} \\ \mathrm{x}^2 & \mathrm{si\ 3\le x\le 5} \\ 6\left(4+\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+5}\right) & \mathrm{si\ x>5}\end{cases}$

Solución:

$$\int_1^7 f(x)dx = \int_1^3 (x\sqrt{2x+3})dx + \int_3^5 x^2 dx + \int_5^7 6\left(4+\frac{x}{x^2+5}\right)dx$$

La primera integral la resolvemos haciendo el cambio $2x+3=t^2$:

$$\int_1^3 (x\sqrt{2x+3})dx = \int_{\sqrt{5}}^3 \frac{(t^2-3)t^2}{2}dt = \left[\frac{t^5}{10}-\frac{t^3}{2}\right]_{\sqrt{5}}^3 = \frac{54}{5}$$

La segunda integral es inmediata

$$\int_3^5 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_3^5 = \frac{98}{3}$$

Efectuando los arreglos correspondientes calculamos la tercera integral:

$$\int_5^7 6\left(4+\frac{x}{x^2+5}\right)dx = \int_5^7 24dx + 3\int \frac{2x}{x^2+5}dx = 48 + Ln\frac{3^6}{5^3}$$

luego

$$\int_1^7 f(x)dx = \frac{54}{5}+\frac{98}{3}+48+Ln\frac{3^6}{5^3} = \frac{1372}{15}+Ln\frac{729}{125} \cong 93{,}23$$

4.- Calcular la integral: definida $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \text{ Sen } 2x \text{ dx}$

Solución: Integrando por partes:

$$\begin{cases} u = x \quad \text{du} = \text{dx} \\ \text{dv} = \text{Sen } 2x \text{ dx} \qquad \text{v} = \dfrac{\text{- Cos } 2x}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \text{ Sen } 2x \text{ dx} =$$

$$= \left.\frac{-x \text{ Cos } 2x}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos } 2x}{2}dx = \left.\frac{-x \text{ Cos } 2x}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left.\frac{Sen\ 2x}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

5.- Calcular el valor de a para que se cumpla $\int_0^a SenxCosxdx = \frac{1}{2}$

Solución:

$\int_0^a SenxCosxdx = \left.\frac{Sen^2 x}{2}\right|_0^a = \frac{Sen^2 a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow Sen^2 a = 1 \Rightarrow a = \frac{\pi}{2}$; aparentemente $a = \frac{-\pi}{2}$ se podría tomar como otra solución; pero por tratarse del límite superior $a > 0$, luego la única solución válida es la indicada anteriormente.

6.- Calcular la integral definida $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$

Solución: Calculamos la integral $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ por partes:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \text{ tg x} - \int \text{tg x dx} = \text{xtg} - \text{Ln}(\cos \text{x}) + \text{C}$$

luego:

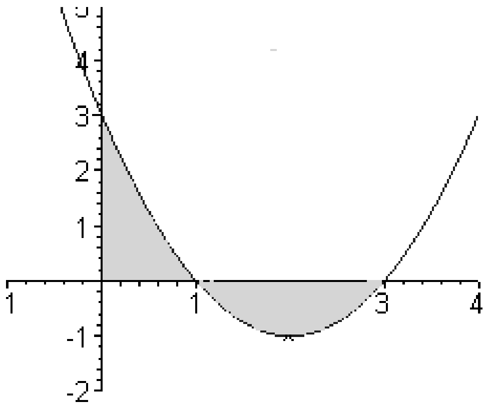
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \text{xtg} - \text{Ln}(\cos \text{x}) + \text{C}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} \bullet 1 - Ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) - \left(0 - Ln(1)\right) = \frac{\pi}{4} \bullet 1 - Ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

7.- Calcular el área limitada por la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y los ejes de coordenadas

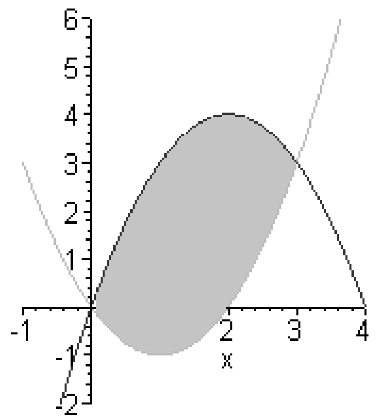
Solución:



La gráfica corta al eje de ordenadas en el punto y=3 y al eje de abscisas en los puntos $x^2 - 4x + 3 = 0$, es decir en $x = 1, x = 3$; así a la vista de la gráfica.

$$S = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} u.de a.$$

8.-Hallar el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 2x$; $y = 4x - x^2$



Solución:

Las gráficas se cortan en los puntos solución del sistema

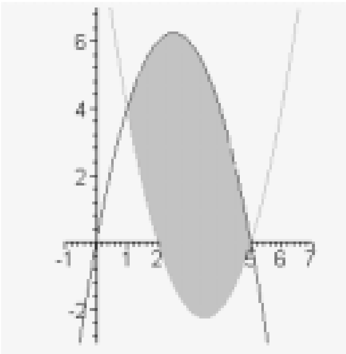
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 4x - x^2 \end{cases}$$, es decir x = 0 y x= 3

luego el área buscada es:

$$A = \int_0^3 \left[(4x - x^2) - (x^2 - 2x)\right]dx = 9 \text{ u.a.}$$

9.- Hallar el área de la región limitada por las curvas $f(x) = x^2 - 7x + 10$ **y** $g(x) = 5x - x^2$

Solución:



Las dos curvas se cortan en $x^2 - 7x + 10 = 5x - x^2$, es decir en $x = 1$ y en $x = 5$, luego el área buscada es

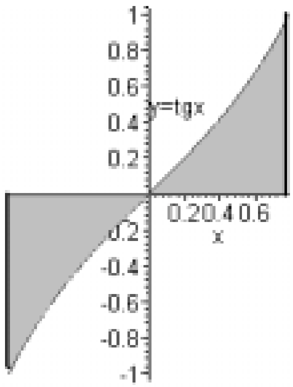
$$A = \int_1^5 \left[\left(5x - x^2\right) - \left(x^2 - 7x + 10\right)\right] dx =$$

$$= \frac{64}{3} \textit{unidades} \text{ de area}$$

10.- Calcular el área del recinto entre la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ el eje de abscisas y las rectas $x - \frac{\pi}{4} = 0$ y $x + \frac{\pi}{4} = 0$

Solución:

La gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas y como las rectas limites están a igual distancia del centro, podemos calcular el área de la mitad y multiplicar por dos para obtener el total . pedido:



$$\frac{A}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tanxdx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

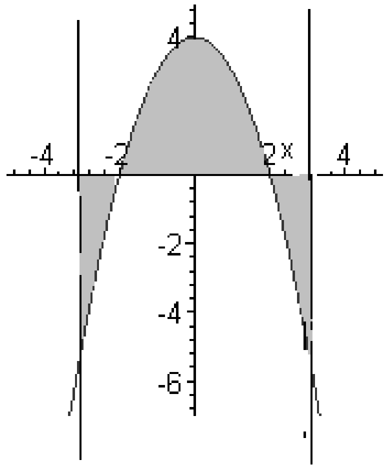
$$= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln(1) = -\left[\ln\sqrt{2} - \ln 2\right] = -\frac{\ln 2}{2} + \ln 2 =$$

$$= \frac{Ln2}{2} \text{ unidades de área}$$

11.-Calcular el área limitada entre la parábola $y = 4 - x^2$, las rectas $x = -3$, $x = 3$ y el eje de abscisas

Solución:

El área buscada es



La parábola corta al eje de abscisas en -2, y 2, luego el área buscada vendrá dada por la suma de las integrales:

$$A = -\int_{-3}^{-2} (4 - x^2)dx + \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx - \int_{2}^{3} (4 - x^2)dx =$$

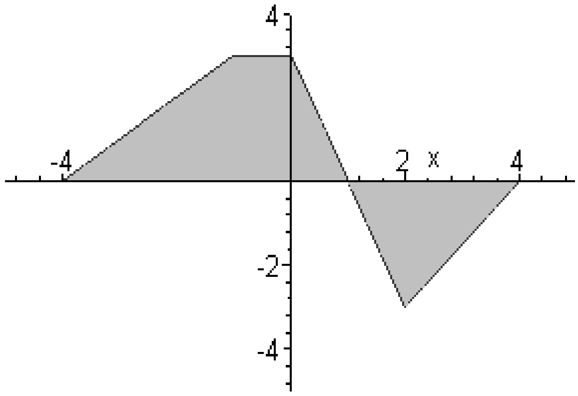
$$= -\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{-2} + \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} - \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{2}^{3} = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{46}{3} \text{ .U.de A.}$$

12.-Calcular el área limitada por la función F(x) y el eje de abscisas:

$$F(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si} \quad -4 \le x < -1 \\ 3 & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \\ -3x + 3 & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ \frac{3}{2}x - 6 & \text{si} \quad 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

Solución:

La función tiene la forma indicada en la figura siguiente:



Luego el área buscada es::

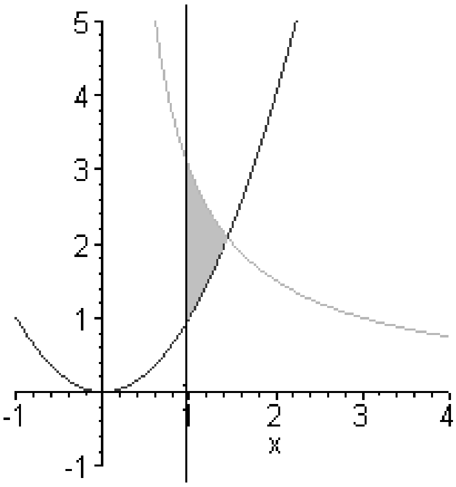
$$A = \int_{-4}^{-1}(x+4)dx + \int_{-1}^{0}3dx + \int_{0}^{1}(-3x+3)dx - \int_{1}^{2}(-3x+3)dx - \int_{2}^{4}\left(\frac{3}{2}x-6\right)dx =$$

$$= \frac{9}{2}+3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+3=\frac{27}{2} \text{ U. de A.}$$

13.- Encuentra el área limitada por $x = 1$ $y = x^2$ e $y = \frac{3}{x}$

Solución:

El área buscada es la subrayada en la figura:



Un límite de integración es x =1 y el otro es el punto de intersección de las curvas

$y = x^2$ e $y = \dfrac{3}{x}$ es decir

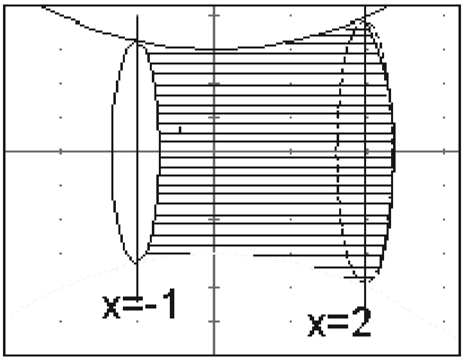
$\dfrac{3}{x} = x^2 \Rightarrow \mathrm{x} = \sqrt[3]{3}$ luego, observando la figura

$$S = \int_1^{\sqrt[3]{3}} \left(\frac{3}{x} - x^2 \right) dx = 3\,\mathrm{Ln\ x} - \left.\frac{\mathrm{x}^3}{3}\right|_1^{\sqrt[3]{3}} =$$

$$= \left(3\,Ln\,\sqrt[3]{3} - \frac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}{3} \right) - \left(3\mathrm{Ln}\,1 - \frac{1}{3} \right) =$$

$$= Ln\,3 - \frac{2}{3} \text{ uni. de área}$$

14.- Calcular el volumen generado por la parábola $Y = x^2 + 3$, las rectas $x = -1$, $x = 2$ al girar alrededor del eje de abscisas



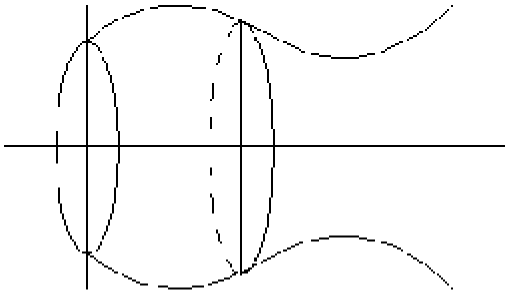
Solución:

$$V = \pi \int_{-1}^{2} y^2 \,\mathrm{dx} = = \pi \int_{-1}^{2} (x^2 + 3)^2 \,\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{153}{5} \text{ unidades de volumen}$$

15.- Calcular el volumen engendrado por la gráfica de la función $f(x) = 5 + \mathrm{sen}\,x$ al girar sobre el eje de abscisas y limitado por los planos perpendiculares al mismo que contienen a las rectas $x = 0$ y $x - \dfrac{\pi}{2} = 0$

Solución:



$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 + \operatorname{sen} x)^2 \, dx =$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (25 + 10 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x) dx =$$

$$\pi \left[25x - 10 \cos x + \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{51\pi^2}{4} + 10\pi \text{ unidades de volumen}$$

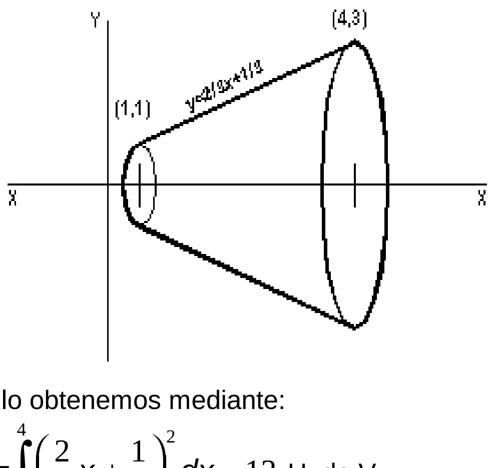
16.- Calcular el volumen del tronco de cono generado por el segmento que une los puntos A(1, 1) y B(4, 3) , cuando gira alrededor del eje de abscisas

Solución:

El segmento $\overline{AB}$ está contenido en la recta

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{3-1} \Rightarrow \mathrm{y} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

por lo que el volumen buscado es el representado en la figura:

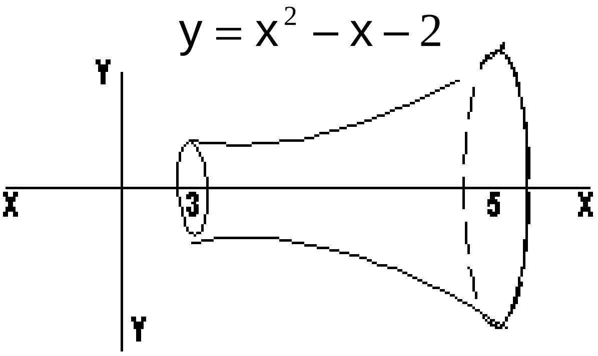


y el calculo del volumen lo obtenemos mediante:

$$\mathrm{V} = \pi \int_1^4 \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \right)^2 dx = 13 \text{ U. de V.}$$

17.-Calcular, entre x = 3 y x = 5, el volumen generado por la parábola $y = x^2 - x - 2$, cuando gira sobre el eje de abscisas.

Solución:



A la vista de la figura:

$$V = \pi \int_3^5 \left(x^2 - x - 2\right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_3^5 \left(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4\right) dx =$$

$$= \frac{1232}{5}\, \pi \text{ unidades de volumen}$$