1.- Sean las rectas $r \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{4}$ y $s \equiv \begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ -x+2y-3z=2 \end{cases}$

a) [2p] Determina su posición relativa.

b) [2p] Calcula la distancia entre ambas.

2.- [3p] Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x+3y+z=1 \\ y+z=1 \end{cases}$ que está más cercano al punto $P(1,-1,0)$.

3.- [3p] Halla las ecuaciones de una recta que corta a la recta $r \equiv x = y = z$, pasa por el punto $A(1,2,-1)$ y es paralela al plano $\pi \equiv 3x+2y-z=4$.

SOLUCIONES

1.- Sean las rectas $r \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{4}$ y $s \equiv \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$

a) Determina su posición relativa.

Las pasamos a paramétricas:

$$s \equiv \begin{cases} 3x - 2y = 2 - \mu \\ -x + 2y = 2 + 3\mu \end{cases} \rightarrow 2x = 4 + 2\mu \rightarrow x = 2 + \mu \rightarrow 2y = 2 + 3\mu + 2 + \mu$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ y = 4\lambda \end{cases} \quad \begin{matrix} \vec{d}(2,-1,4) \\ P(5,-2,0) \end{matrix} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = 2 + 2\mu \\ z = \mu \end{cases} \quad \begin{matrix} \vec{e}(1,2,1) \\ Q(2,2,0) \end{matrix} \quad \text{distinta dirección}$$

$$\left. \begin{matrix} 5 + 2\lambda = 2 + \mu \\ -2 - \lambda = 2 + 2\mu \\ 4\lambda = \mu \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} 2\lambda - \mu = -3 \\ \lambda + 2\mu = -4 \\ 4\lambda - \mu = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\left| A^* \right| \neq 0 \Rightarrow r(A^*) = 3, r(A) = 2 \Rightarrow$ Incompatible, las rectas se cruzan

b) Calcula la distancia entre ambas.

Hallamos el plano π paralelo a r (vector $\vec{d}$)y que contiene a s (punto Q y vector $\vec{e}$) y la distancia entre las rectas será la distancia de r a π:

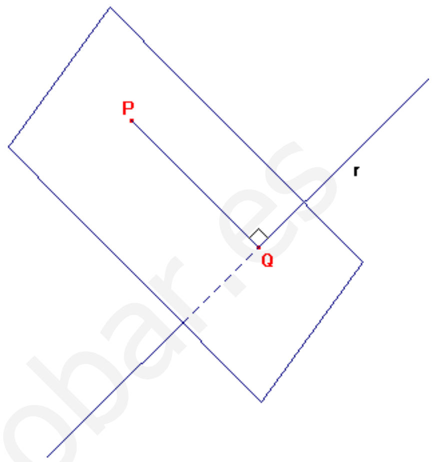
$$\pi \;: \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x - 16 + 2y - 4 - z - 4z + x - 2 - 4y + 8 = 0$$

$$\pi \equiv 9x - 2y - 5z - 14 = 0$$

$$d(r,s) = d(P,\pi) = \frac{|9 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 0 - 14|}{\sqrt{9^2 + (-2)^2 + (-5)^2}} = \frac{35}{\sqrt{110}} = \frac{35\sqrt{110}}{110} = \frac{7\sqrt{110}}{22} \text{u.}$$

2.- Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x+3y+z=1 \\ y+z=1 \end{cases}$ que está más cercano al punto $P(1,-1,0)$.

Para ello hallamos la ecuación del plano π que pasa por P y es perpendicular a r, y la intersección de ese plano π con la recta r



$$r \equiv \begin{cases} x+3y+z=1 \\ y+z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1-\lambda \\ x=1-\lambda-3(1-\lambda) \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x=-2+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{d}(2,-1,1)=\vec{n} \text{ del plano } \pi$$

$\pi \equiv 2x-y+z+D=0$, pasa por el punto P:

$2+1+0+D=0 \Rightarrow D=-3$

$\pi \equiv 2x-y+z-3=0$

Intersección de r y π: $2(-2+2\lambda)-(1-\lambda)+\lambda-3=0 \rightarrow -4+4\lambda-1+\lambda+\lambda-3=0$

$$6\lambda-8=0 \Rightarrow \lambda=\frac{4}{3} \rightarrow Q\begin{cases} x=-2+\dfrac{8}{3} \\ y=1-\dfrac{4}{3} \\ z=\dfrac{4}{3} \end{cases} \rightarrow Q\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$$

3.- Halla las ecuaciones de una recta que corta a la recta $r \equiv x=y=z$, pasa por el punto $A(1,2,-1)$ y es paralela al plano $\pi \equiv 3x+2y-z=4$. $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Hallamos un plano π', que sea paralelo al plano π y pase por A. Después hallamos el punto de corte P entre el plano π' y la recta r, la recta pedida será la que pasa por los puntos P y A

$\pi' \equiv 3x+2y-z+D=0 \rightarrow 3\cdot 1+2\cdot 2-1(-1)+D=0 \Rightarrow D=-8$

$\pi' \equiv 3x+2y-z-8=0$, ahora la intersección con r, que será el punto P:

$\pi' \equiv 3\lambda+2\lambda-\lambda-8=0 \Rightarrow 4\lambda-8=0 \Rightarrow \lambda=2 \rightarrow P(2,2,2)$

Recta pedida pasa por A y P $\rightarrow \vec{d}(2-1,2-2,2+1) \rightarrow \vec{d}(1,0,3)$

$$A(1,2,-1) \text{ y } \vec{d}(1,0,2) \rightarrow r' \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2 \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$$