

1.- Considera el plano  $\pi \equiv 2x + y - z + 2 = 0$  y la recta  $r \equiv \frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$

- Halla la posición relativa de  $r$  y  $\pi$ , según los valores del parámetro  $m$ .
  - Para  $m = -3$ , halla el plano que contiene a la recta  $r$  y es perpendicular al plano  $\pi$ .
  - Para  $m = -3$ , halla el plano que contiene a la recta  $r$  y es paralelo al plano  $\pi$ .
- (2 puntos)

2.- Sabiendo que las rectas  $r \equiv x = y = z$  y  $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$  se cruzan.

- Halla los puntos A (de  $r$ ) y B (de  $s$ ) que están a la mínima distancia.
  - Halla la distancia entre  $r$  y  $s$ .
- (2 puntos)

3.- Sea la recta  $r$  de ecuación  $x - 1 = \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 3}{-1}$  y el plano  $\pi \equiv x - y + z + 1 = 0$ .

Calcula el área del triángulo de vértices ABC, siendo A el punto de corte de la recta  $r$  y el plano  $\pi$ , B el punto (2,1,2) de la recta  $r$  y C la proyección ortogonal del punto B sobre el plano  $\pi$ .

(2,5 puntos)

4.- Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano  $\pi \equiv 2x - 3y - z + 5 = 0$

(1,5 puntos)

5.- Sea  $r$  la recta dada por  $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$

Determina razonadamente:

- Un plano perpendicular a ella
- Un plano paralelo a ella
- Una recta paralela a ella
- Una recta perpendicular a ella

(2 puntos)

## SOLUCIONES

$$1.- a) r \equiv \frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 6 + m\lambda \end{cases} \quad \text{para ver la posición relativa,}$$

$$\text{sustituimos: } 2(5 - 2\lambda) + \lambda - (6 + m\lambda) + 2 = 0 \Rightarrow 10 - 4\lambda + \lambda - 6 - m\lambda + 2 = 0 \\ -4\lambda + \lambda - m\lambda = -10 + 6 - 2 \Rightarrow (-3 - m)\lambda = -6$$

Luego, si  $m = -3 \Rightarrow$  no tiene solución, es decir la recta y el plano serían paralelos  
Y si  $m \neq -3 \Rightarrow$  la recta y el plano se cortan en un punto.

b) Para  $m = -3 \Rightarrow$  plano  $\pi'$  que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $\pi$   
contiene a  $r$ , entonces pasa por un punto cualquiera de la recta y tiene su vector de  
dirección  $\rightarrow P(5,0,6) \quad \vec{d}(-2,1,-3)$

perpendicular a  $\pi$ , entonces su vector normal me sirve como dirección de  $\pi'$ :  
 $\vec{e} = \vec{n}(2,1,-1)$ , por lo que el plano pedido, será:

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} -2 & 2 & x-5 \\ 1 & 1 & y \\ -3 & -1 & z-6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x - 8 - 4z + 14 = 0 \rightarrow \pi' \equiv x - 4y - 2z + 7 = 0$$

c) Para  $m = -3 \Rightarrow$  plano  $\pi'$  que contiene a  $r$  y es paralelo a  $\pi$   
contiene a  $r$ , entonces pasa por  $P(5,0,6)$  y paralelo a  $\pi$ , tiene el mismo vector normal, es  
decir que  $\pi' \equiv 2x + y - z + d = 0$  y como pasa por  $P$ , tiene que verificar la ecuación, es  
decir  $10 + 0 - 6 + d = 0 \Rightarrow d = -4 \Rightarrow \pi' \equiv 2x + y - z - 4 = 0$

$$2.- r \equiv x = y = z \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases} \quad \text{sabemos que las rectas se cruzan.}$$

a) Para hallar los puntos  $A$  y  $B$ , tomamos primero los puntos genéricos de  $r$  y  $s$  y  
sabemos que la dirección  $\overline{AB}$  tiene que ser perpendicular a  $r$  y también a  $s$ , es decir que  
los productos escalares de  $\overline{AB}$  por  $\vec{d}$  (vector dirección de  $r$ ) y por  $\vec{e}$  (vector dirección  
de  $s$ ) tienen que ser 0.

$$r \equiv x = y = z \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{punto genérico } A(\lambda, \lambda, \lambda)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases} \rightarrow \text{punto genérico } B(1 + \mu, 3 + \mu, -\mu) \rightarrow \overline{AB}(1 + \mu - \lambda, 3 + \mu - \lambda, -\mu - \lambda)$$

$$\overline{AB} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow 1 + \mu - \lambda + 3 + \mu - \lambda - \mu - \lambda = 0 \Rightarrow \mu - 3\lambda = -4$$

$$\overline{AB} \cdot \vec{e} = 0 \rightarrow 1 + \mu - \lambda + 3 + \mu - \lambda - (-\mu - \lambda) = 0 \Rightarrow 3\mu - \lambda = -4$$

tenemos que  $\mu = -1$  y  $\lambda = 1 \Rightarrow A(1,1,1)$  y  $B(0,2,1)$  son los puntos pedidos.

b) Para hallar la distancia entre las rectas:  $d(r, s) = d(A, B)$

$$d(A, B) = \sqrt{(0-1)^2 + (2-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2} \text{ u.l.}$$

3.- Para hallar el punto A necesitamos poner la recta en paramétricas, para hallar su

$$\text{intersección con el plano: } r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \text{ sustituimos en } \pi \equiv x - y + z + 1 = 0$$

$$(1+t) - (-2+3t) + (3-t) + 1 = 0 \Rightarrow 1+t+2-3t+3-t+1=0 \Rightarrow -3t = -7 \rightarrow t = \frac{7}{3}$$

$$A \begin{cases} x = 1 + \frac{7}{3} = \frac{10}{3} \\ y = -2 + 3t = -2 + 7 = 5 \rightarrow A\left(\frac{10}{3}, 5, \frac{2}{3}\right) \\ z = 3 - t = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Para hallar C (proyección ortogonal de B (2,1,2) sobre el plano), hallamos la recta perpendicular al plano y que pasa por B (tendrá vector de dirección el vector normal del plano) y luego su intersección con el plano nos dará el punto C

$$\pi \equiv x - y + z + 1 = 0 \rightarrow \vec{n}(1, -1, 1) \rightarrow \vec{d}(1, -1, 1) \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \text{ sustituimos en el plano}$$

$$\text{y tenemos } (2+\lambda) - (1-\lambda) + (2+\lambda) + 1 = 0 \Rightarrow 2+\lambda-1+\lambda+2+\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{3}$$

sustituyendo, tendremos el punto  $C\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$ , para hallar el área del triángulo

$$ABC \rightarrow \text{Area} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{32}{9}\right)^2 + \left(-\frac{64}{9}\right)^2 + \left(-\frac{32}{9}\right)^2}}{2} = \sqrt{\frac{512}{27}} = 4,35 \text{ u.a.}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \left(-\frac{4}{3}, -4, \frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}, 0\right) = \left(\frac{32}{9}, -\frac{64}{9}, -\frac{32}{9}\right)$$

4.-  $\pi \equiv 2x - 3y - z + 5 = 0$ , tenemos que hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas (OX, OY y OZ) con este plano:

$$OX \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \rightarrow A \rightarrow 2\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{5}{2} \rightarrow A\left(-\frac{5}{2}, 0, 0\right) \\ z = 0 \end{cases}$$

análogamente, obtenemos los otros dos puntos:  $B\left(0, \frac{5}{3}, 0\right)$  y  $C(0, 0, 5)$

$$\text{El volumen del tetraedro será: } V = \frac{1}{6} |(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{125}{36} \text{ u.v.}$$

$$5.- \begin{cases} x - y = 2 \\ 2y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \rightarrow P(2,0,1), \quad \vec{d}(1,1,-2)$$

a) Un plano perpendicular a ella

Vector normal  $\vec{n} = \vec{d} = (1,1,-2) \rightarrow x + y - 2z + d = 0$  uno de ellos:  $x + y - 2z = 0$

b) Un plano paralelo a ella

Su vector normal tiene que ser perpendicular a  $\vec{d}(1,1,-2)$ , por ejemplo  $\vec{n}(1,-1,0)$ , luego un plano paralelo sería, por ejemplo el plano:  $x - y = 0$

c) Una recta paralela a ella

Mismo vector de dirección, si, por ejemplo, tomamos como punto el origen de coordenadas (la recta dada no pasa por él), una recta paralela sería:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

d) Una recta perpendicular a ella, tendría como vector de dirección uno perpendicular (por ejemplo el del apartado b):  $(1,-1,0)$  y tomamos un punto de r (por ejemplo el  $P(2,0,1)$ ), para que sean perpendiculares (no se crucen, sino que se corten), luego una recta perpendicular puede ser:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$