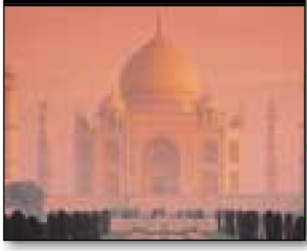
UNIDAD 7 PROBLEMAS MÉTRICOS EN EL ESPACIO



Página 180

Dirección de un plano

- **Halla la ecuación del plano paralelo a $5x - y + 4 = 0$ que pasa por (1, 0, –3).**

  $5(x - 1) - 1(y - 0) + 0(z + 3) = 0$; es decir: $5x - y - 5 = 0$

- **Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-4}{-6}$ que pasa por (1, 4, –6).**

  $5(x - 1) + 2(y - 4) - 6(z + 6) = 0$; es decir: $5x + 2y - 6z - 49 = 0$

- **Halla la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s:**

  $$r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$$

  El plano pasa por (5, –1, 8) y es paralelo a (1, 0, 2) y a (3, –1, 4). Un vector normal al plano es: $(1, 0, 2) \times (3, -1, 4) = (2, 2, -1)$.

  La ecuación del plano es: $2(x - 5) + 2(y + 1) - 1(z - 8) = 0$; es decir: $2x + 2y - z = 0$

Dirección de una recta

- **Halla las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a r que pasa por $P(0, -1, -3)$:**

  a) $r: \dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z}{5}$ b) $r: \begin{cases} 3x - 5y + 7z - 4 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$

  a) $\begin{cases} x = 8\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = -3 + 5\lambda \end{cases}$

  b) Un vector dirección de la recta es: $(3, -5, 7) \times (1, -2, 1) = (9, 4, -1)$

  Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = 9\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$

Página 181

- **Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a π y a σ:**

$$\pi: x - 2y = 5 \qquad\qquad \sigma: 2x + z = 7$$

Un vector normal al plano es: $(1, -2, 0) \times (2, 0, 1) = (-2, -1, 4)$

La ecuación del plano será: $-2x - y + 4z = 0$

Distancias

- **Siguiendo el proceso anterior, halla la distancia del punto $P(8, 6, 12)$ a la recta r:**

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}$$

Describe el proceso que seguirías para hallar la distancia de un punto P a un plano π, de modo que, finalmente, se reduzca al cálculo de la distancia entre dos puntos.

- Ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a r:

$$0 \cdot (x - 8) - 1 \cdot (y - 6) + 2 \cdot (z - 12) = 0; \text{ es decir, } \pi: -y + 2z - 18 = 0$$

- Punto, Q, de corte de r y π:

$$-(1 - \lambda) + 2(7 + 2\lambda) - 18 = 0$$

$$-1 + \lambda + 14 + 4\lambda - 18 = 0$$

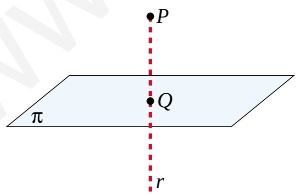
$$5\lambda - 5 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 1$$

El punto es $Q(2, 0, 9)$.

- Calculamos la distancia:

$$dist\,(P, r) = dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-6, -6, -3)| = \sqrt{36 + 36 + 9} = \sqrt{81} = 9$$

- **Halla, paso a paso, la distancia del punto $P(4, 35, 70)$ al plano $\pi: 5y + 12z - 1 = 0$**



— Hallamos la ecuación de la recta, r, que pasa por P y es perpendicular a π.

— Obtenemos el punto, Q, de intersección de r y π.

— La distancia de P a π es igual a la distancia entre P y Q.

Para el punto y el plano dados:

- Recta, r, que pasa por P y es perpendicular a π:

$$r: \begin{cases} x = 4 \\ y = 35 + 5\lambda \\ z = 70 + 12\lambda \end{cases}$$

- Punto, Q, de intersección de r y π:

$$5(35 + 5\lambda) + 12(70 + 12\lambda) - 1 = 0$$
$$175 + 25\lambda + 840 + 144\lambda - 1 = 0$$
$$169\lambda + 1014 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -6$$

El punto es $Q(4, 5, -2)$.

- Calculamos la distancia:

$$dist\ (P, \pi) = dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(0, -30, -72)| = \sqrt{900 + 5184} = \sqrt{6084} = 78$$

Página 183

1. Calcula el ángulo que forma la recta: $\dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$ con el plano $x + 3y - z + 1 = 0$.

Llamamos $90° - \alpha$ al ángulo formado por las direcciones de $\vec{d}$ y $\vec{n}$ sin tener en cuenta sus sentidos.

$$\vec{d}(7, -1, 3) \ // \ r \qquad \vec{n}(1, 3, -1) \perp \pi$$

$$cos\ (90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|7 - 3 - 3|}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{649}} \approx 0{,}039$$

$$90° - \alpha = 87°\ 45'\ 1'' \quad \rightarrow \quad \alpha = 2°\ 14'\ 59''$$

2. Determina la ecuación de la recta r que pasa por el punto A y es perpendicular al plano π:

$A(3, 0, -1)$ $\qquad$ π: $2x - 3y - z + 1 = 0$

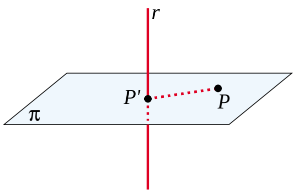
Un vector dirección de la recta es el vector normal al plano: $(2, -3, -1)$.

Las ecuaciones paramétricas de r son: $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

Página 185

1. Halla razonadamente la distancia de $P(5, 6, 6)$ a la recta r: $(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$. Hazlo por cada uno de los tres métodos aprendidos.

■ Solución, obteniendo previamente el punto P':



- Plano, π, que pasa por P y es perpendicular a r:

$$5(x - 5) - 1(y - 6) + 1(z - 6) = 0$$

es decir: π: $5x - y + z - 25 = 0$

- Intersección, P', de π y r:

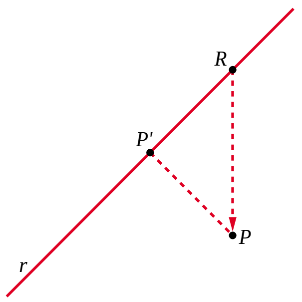
$$5(5\lambda) - (2 - \lambda) + \lambda - 25 = 0$$
$$25\lambda - 2 + \lambda + \lambda - 25 = 0$$
$$27\lambda - 27 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 1$$

El punto es $P'(5, 1, 1)$.

- Distancia entre P y r:

$$dist\ (P, r) = dist\ (P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(0, -5, -5)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$$

■ Segundo método:



$R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$ es un punto genérico de la recta r.

El vector $\overrightarrow{RP}(5 - 5\lambda, 4 + \lambda, 6 - \lambda)$ es variable.

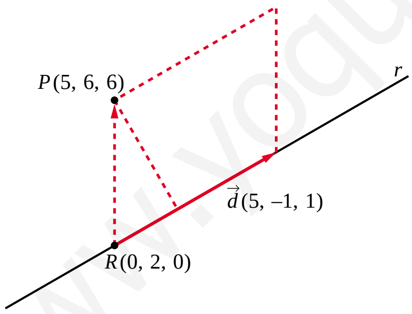
El vector que nos interesa es perpendicular a la recta. Por tanto, cumple:

$(5, -1, 1) \cdot \overrightarrow{RP} = 0$; es decir:

$$5(5 - 5\lambda) - 1(4 + \lambda) + 1(6 - \lambda) = 0$$
$$25 - 25\lambda - 4 - \lambda + 6 - \lambda = 0$$
$$-27\lambda + 27 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 1$$

El resto, es igual que con el método anterior.

■ Solución directa a partir del producto vectorial:



$$dist\ (P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$$

$$\overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (5, 4, 6) \times (5, -1, 1) = (10, 25, -25)$$

$$|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}| = \sqrt{100 + 625 + 625} = \sqrt{1\,350}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{25 + 1 + 1} = \sqrt{27}$$

$$dist\ (P, r) = \frac{\sqrt{1\,350}}{\sqrt{27}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$$

Página 186

2. Halla la distancia del punto $P(8, 5, -6)$ al plano π: $x + 2y - 2z + 3 = 0$.

$$dist\ (P, \pi) = \frac{|8 + 10 + 12 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{33}{3} = 11\text{u}$$

3. Halla la distancia de los puntos $Q(3, 0, 3)$ y $R(0, 0, 0)$ al plano del ejercicio anterior.

$$dist\ (Q, \pi) = \frac{|3 - 6 + 3|}{3} = 0 \quad (Q \in \pi) \qquad\qquad dist\ (R, \pi) = \frac{3}{3} = 1$$

Página 188

4. Calcula la distancia entre las dos rectas dadas mediante cada uno de los tres métodos aprendidos:

$$r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

- Primer método:

Hallamos el plano, π, que contiene a r y es paralelo a s:

$$\left.\begin{array}{l} (12, 0, 5) \, // \, r \\ (0, 1, 0) \, // \, s \end{array}\right\} (12, 0, 5) \times (0, 1, 0) = (-5, 0, 12) \perp \pi$$

El punto $(13, 2, 8)$ es de r, y, por tanto, de π.

Ecuación de π: $-5(x - 13) + 0(y - 2) + 12(z - 8) = 0$, es decir:

$$-5x + 12z - 31 = 0$$

$$dist\,(r, s) = dist\,(s, \pi) = dist\,[(6, 6, -9), \pi] = \frac{|-30 - 108 - 31|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{169}{13} = 13$$

- Segundo método:

Punto genérico de r: $R(13 + 12\lambda, 2, 8 + 5\lambda)$

Punto genérico de s: $S(6, 6 + \mu, -9)$

Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS} = (-7 - 12\lambda, 4 + \mu, -17 - 5\lambda)$$

De todos los posibles vectores $\overrightarrow{RS}$, buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (12, 0, 5) = 0 \;\rightarrow\; -169\lambda - 169 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = -1 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 1, 0) = 0 \;\rightarrow\; 4 + \mu = 0 \;\rightarrow\; \mu = -4 \end{cases}$$

Sustituyendo en r y en s, obtenemos los puntos R y S: $R(1, 2, 3)$, $S(6, 2, -9)$.

$$dist\,(r, s) = dist\,(R, S) = |(5, 0, -12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

- Tercer método:

$$dist\,(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}]|}{|\vec{d} \times \vec{d'}|}$$

$R(13, 2, 8)$ $\quad \vec{d}(12, 0, 5)$

$S(6, 6, -9)$ $\quad \vec{d'}(0, 1, 0)$

$\overrightarrow{RS}(-7, 4, -17)$

$$[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}] = \begin{vmatrix} -7 & 4 & -17 \\ 12 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -169 \quad \to \quad \text{Volumen} = 169$$

$$|\vec{d} \times \vec{d'}| = |(-5, 0, 12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Por tanto: $dist\ (r, s) = \dfrac{169}{13} = 13$

5. Calcula la distancia entre las dos rectas dadas mediante tres métodos distintos:

$$r: \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 5 + 7\mu \\ y = 1 - 5\mu \\ z = 1 - 5\mu \end{cases}$$

- Primer método:

Hallamos el plano, π, que contiene a r y es paralelo a s:

$$\left.\begin{array}{l} (5, -1, 1) \parallel r \\ (7, -5, -5) \parallel s \end{array}\right\} (5, -1, 1) \times (7, -5, -5) = (10, 32, -18) \parallel (5, 16, -9) \perp \pi$$

El punto $(0, 2, 0)$ es de r, y, por tanto, de π.

Ecuación de π: $5(x - 0) + 16(y - 2) - 9(z - 0) = 0$, es decir:

$5x + 16y - 9z - 32 = 0$

$$dist\ (r, s) = dist\ (s, \pi) = dist\ [(5, 1, 1), \pi] = \frac{|25 + 16 - 9 - 32|}{\sqrt{25 + 256 + 81}} = 0$$

(Las rectas r y s se cortan).

- Segundo método:

Punto genérico de r: $R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$

Punto genérico de s: $S(5 + 7\mu, 1 - 5\mu, 1 - 5\mu)$

Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS} = (5 + 7\mu - 5\lambda, -1 - 5\mu + \lambda, 1 - 5\mu - \lambda)$$

De todos los posibles vectores $\overrightarrow{RS}$, buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (5, -1, 1) = 0 \quad \to \quad 27 + 35\mu - 27\lambda = 0 \quad \to \quad \mu = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (7, -5, -5) = 0 \quad \to \quad 35 + 99\mu - 35\lambda = 0 \quad \to \quad \lambda = 1 \end{cases}$$

Sustituyendo en r y en s, obtenemos los puntos R y S: $R(5, 1, 1)$, $S(5, 1, 1)$.

$dist\ (r, s) = dist\ (R, S) = 0$

■ **Tercer método:**

$$dist\ (r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}]|}{|\vec{d} \times \vec{d'}|}$$

$R(0, 2, 0)$ $\quad \vec{d}(5, -1, 1)$

$S(5, 1, 1)$ $\quad \vec{d'}(7, -5, -5)$

$\overrightarrow{RS}(5, -1, 1)$

$$[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}] = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0 \text{ (las dos primeras filas son iguales).}$$

Por tanto: $dist\ (r, s) = 0$

Página 189

6. Calcula la distancia entre la recta y el plano:

$$\boldsymbol{r: (1 - 3\lambda, 2 + \lambda, 1 - \lambda) \qquad \pi: x + 3y = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}(-3, 1, -1) \ // \ r \\ \vec{n}(1, 3, 0) \perp \pi \end{array}\right\} \ \vec{d} \cdot \vec{n} = -3 + 3 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{d} \perp \vec{n} \ \Rightarrow \ r \ // \ \pi$$

Puesto que la recta es paralela al plano (o, acaso, contenida en él), la distancia de r a π se obtiene calculando la distancia de cualquier punto de r a π:

$$dist\ (r, \pi) = dist\ [(1, 2, 1), \pi] = \frac{|1 + 6|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{10}} \approx 2{,}21$$

7. Calcula la distancia entre los planos: π: $y - 5z + 4 = 0$ y π': $2y - 10z = 0$

Los planos son paralelos, pues sus coeficientes son proporcionales. Por tanto, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro:

$P(0, 5, 1)$ es un punto de π'. Por tanto:

$$dist\ (\pi, \pi') = dist\ (P, \pi) = \frac{|5 - 5 + 4|}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{4}{\sqrt{26}} \approx 0{,}78$$

Página 191

1. Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en estos puntos: $A(1, 3, 5)$, $B(2, 5, 8)$ y $C(5, 1, -11)$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(1, 2, 3) \\ \overrightarrow{AC}(4, -2, -16) \end{array}\right\} \ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-26, 28, -10)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{26^2 + 28^2 + 10^2} = \sqrt{1\,560}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1\,560}}{2} \approx 19{,}75 \text{ u}^2$$

2. Calcula el volumen de un tetraedro cuyos vértices son $A(2, 1, 4)$, $B(1, 0, 2)$, $C(4, 3, 2)$ y $D(1, 5, 6)$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(-1, -1, -2) \\ \overrightarrow{AC}(2, 2, -2) \\ \overrightarrow{AD}(-1, 4, 2) \end{array}\right\} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30$$

$$\text{Volumen} = \frac{30}{6} = 5 \text{ u}^3$$

Página 198

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 S **Estudia la posición de las rectas r y s y halla el ángulo que forman:**

$$r: \left\{\begin{array}{l} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{array}\right. \qquad s: \left\{\begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -14 + 5\lambda \end{array}\right.$$

$\vec{d}_r = (1, -1, 0) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1)$; $P(3, 0, 15)$

$\vec{d}_s = (3, 2, 5)$; $P'(0, 1, -14)$

$\overrightarrow{PP'}(-3, 1, -29)$

$$|M'| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -29 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Las rectas se cortan en un punto.}$$

El ángulo que forman es: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r|\,|\vec{d}_s|} = \dfrac{0}{|\vec{d}_r|\,|\vec{d}_s|} = 0 \rightarrow \alpha = 90°$

2 S **Hallar, en cada caso, el ángulo que forma la recta y el plano:**

a) $r: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z}{2}$ $\qquad \pi: x - 2y - z + 1 = 0$

b) $r: x = \lambda,\ y = 1 + 2\lambda,\ z = -2$ $\qquad \pi: 2x - y + z = 0$

c) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$ $\qquad \pi: x + z = 17$

a) $\vec{d}(-2, 4, 2)$; $\vec{n}(1, -2, -1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{|-2-8-2|}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}} = \frac{12}{12} = 1 \rightarrow 90° - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90°$$

Observación: Los vectores $\vec{d}$ y $\vec{n}$ tienen la misma dirección; luego la recta y el plano son perpendiculares, es decir, $\alpha = 90°$.

b) $\vec{d}(1, 2, 0)$; $\vec{n}(2, -1, 1)$

$$cos\ (90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{|2 - 2 + 0|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = 0 \quad \to \quad 90° - \alpha = 90° \quad \to \quad \alpha = 0°$$

c) $\vec{d}(2, 1, 1)$; $\vec{n}(1, 0, 1)$

$$cos\ (90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{|2 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \to$$

$$\to \quad 90° - \alpha = 30° \quad \to \quad \alpha = 60°$$

3 S **Calcula el ángulo que forman los planos α: $z = 3$ y β: $x - y + 2z + 4 = 0$.**

$\vec{n}_\alpha(0, 0, 1)$; $\vec{n}_\beta(1, -1, 2)$

$$cos\ \alpha = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha|\,|\vec{n}_\beta|} = \frac{2}{1\sqrt{6}} = 0{,}816 \quad \to \quad \alpha = 35°\ 15'\ 52''$$

4 **Halla el área de cada uno de los triángulos:**

a) $A(2, 7, 3)$, $B(1, -5, 4)$, $C(7, 0, 11)$

b) $A(3, -7, 4)$, $B(-1, 2, 5)$, $C(-5, 11, 6)$

Justifica la solución del segundo.

a) $\overrightarrow{AB}(-1, -12, 1)$; $\overrightarrow{AC}(5, -7, 8)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(-89, 13, 67)|}{2} = \frac{\sqrt{12\,579}}{2} \approx 56{,}08\ u^2$$

b) $\overrightarrow{AB}(-4, 9, 1)$; $\overrightarrow{AC}(-8, 18, 2)$

Las coordenadas son proporcionales, luego los puntos están alineados:

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 0$

5 S **Calcula la distancia del punto dado a la recta, en los siguientes casos:**

a) $P(0, 7, 0)$; $r: \begin{cases} x = -5 + 4\lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -10 + 3\lambda \end{cases}$

b) $P(1, 0, 0)$; $r: x - 1 = \dfrac{y + 1}{2} = z$

c) $A(1, 2, 3)$; $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

a) $R(-5, 5, -10) \in r$; $\vec{d}(4, 1, 3) \,//\, r$

$\overrightarrow{RP}(5, 2, 10)$

$\overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (5, 2, 10) \times (4, 1, 3) = (-4, 25, -3)$

$$dist\ (P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}\,|}{|\vec{d}\,|} = \frac{\sqrt{650}}{\sqrt{26}} = \sqrt{25} = 5$$

b) $R(1, -1, 0) \in r$; $\vec{d}(1, 2, 1) \,//\, r$

$\overrightarrow{RP}(0, 1, 0)$

$\overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (0, 1, 0) \times (1, 2, 1) = (1, 0, -1)$

$$dist\ (P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}\,|}{|\vec{d}\,|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$$

c) $R(0, 0, 1) \in r$; $\vec{d}(0, 0, 1) \,//\, r$

$\overrightarrow{RA}(1, 2, 2)$

$\overrightarrow{RA} \times \vec{d} = (1, 2, 2) \times (0, 0, 1) = (2, -1, 0)$

$$dist\ (A, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RA} \times \vec{d}\,|}{|\vec{d}\,|} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$$

6 S **Calcula la distancia entre las rectas, estudiando antes su posición relativa:**

$$r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

$\vec{d}_r(12, 0, 5)$; $P(13, 2, 8)$

$\vec{d}_s(0, 1, 0)$; $P'(6, 6, -9)$

$\overrightarrow{PP'}(-7, 4, -17)$

$$\begin{vmatrix} 12 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -17 \end{vmatrix} = -169 \neq 0 \ \rightarrow\ \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$dist\ (r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{PP'}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} = \frac{169}{|(-5, 0, 12)|} =$$

$$= \frac{169}{\sqrt{169}} = \frac{169}{13} = 13$$

7 **Calcula, en cada caso, el volumen del tetraedro con vértices:**

a) (2, 1, 4); (1, 0, 2); (4, 3, 2); (1, 5, 6)

b) (4, 1, 2); (2, 0, 1); (2, 3, 4); (6, 5, 1)

a) $A(2, 1, 4)$ $B(1, 0, 2)$ $C(4, 3, 2)$ $D(1, 5, 6)$

$\overrightarrow{AB}(-1, -1, -2)$ $\overrightarrow{AC}(2, 2, -2)$ $\overrightarrow{AD}(-1, 4, 2)$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

b) $A(4, 1, 2)$ $B(2, 0, 1)$ $C(2, 3, 4)$ $D(6, 5, 1)$

$\overrightarrow{AB}(-2, -1, -1)$ $\overrightarrow{AC}(-2, 2, 2)$ $\overrightarrow{AD}(2, 4, -1)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 30 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

8 Calcula el área total y el volumen del tetraedro de vértices:
$A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$

- Área del triángulo ABC:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -2, -3) \times (4, 0, 6) = (-12, -24, 8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{784}}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ABD:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (2, -2, -3) \times (-7, -7, 7) = (-35, 7, -28)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{2\,058}}{2} \approx 22{,}68 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ACD:

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = (4, 0, 6) \times (-7, -7, 7) = (42, -70, -28)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{7\,448}}{2} \approx 43{,}15 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo BCD:

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (2, 2, 9) \times (-9, -5, 10) = (65, -101, 8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{14\,490}}{2} \approx 60{,}19 \text{ u}^2$$

- Área total $= 14 + 22{,}68 + 43{,}15 + 60{,}19 = 140{,}02 \text{ u}^2$

- Volumen: $\overrightarrow{AB}(2, -2, -3)$ $\overrightarrow{AC}(4, 0, 6)$ $\overrightarrow{AD}(-7, -7, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{306}{6} \approx 51{,}33 \text{ u}^3$$

9 S **Calcula la mínima distancia entre los siguientes pares de rectas:**

a) $\begin{cases} x = -4 - 2\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 - 3\mu \\ y = 4 - \mu \\ z = 5 - 5\mu \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 5 - 7\lambda \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 3y + 2 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases}$

a) $\vec{d}(-2, 2, -3)$; $P(-4, -5, -1)$

$\vec{d}'(-3, -1, -5)$; $P'(5, 4, 5)$

$\overrightarrow{PP'}(9, 9, 6)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 2 & -1 & 9 \\ -3 & -5 & 6 \end{vmatrix} = -78 \neq 0 \ \to \ \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$dist = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{PP'}, \vec{d}, \vec{d}']|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|} = \frac{78}{|(-13, -1, 8)|} =$$

$$= \frac{78}{\sqrt{234}} = 5{,}1$$

b) $\vec{d}(1, -2, -7)$; $P(1, 1, 5)$

$\vec{d}'$: $(2, -3, 0) \times (3, -1, 0) = (0, 0, 7) \,//\, (0, 0, 1) = \vec{d}'$; $P'\left(-\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, 0\right)$

$\overrightarrow{PP'}\left(-\frac{8}{7}, -\frac{3}{7}, -5\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -8/7 \\ -2 & 0 & -3/7 \\ -7 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \frac{19}{7} \neq 0 \ \to \ \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$dist = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{PP'}, \vec{d}, \vec{d}']|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|} = \frac{19/7}{|(-2, -1, 0)|} =$$

$$= \frac{19/7}{\sqrt{5}} \approx 1{,}21$$

10 **Calcula la distancia entre las rectas:**

$$r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

dividiendo el volumen de un paralelepípedo entre el área de su base.

$\vec{d}_r(12, 0, 1)$; $P(13, 2, 8)$

$\vec{d}_s(0, 1, 0)$; $P'(6, 6, -9)$

$\overrightarrow{PP'}(-7, 4, -17)$

$$\begin{vmatrix} 12 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 4 & -17 \end{vmatrix} = -197 \neq 0 \quad \to \quad \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$dist\ (r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{PP'}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} = \frac{197}{|(-1, 0, 12)|} =$$

$$= \frac{197}{\sqrt{145}} \approx 16{,}36$$

11 S **Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano: $6x - 5y + 3z - 1 = 0$**

Recuerda que $V = 1/3 \cdot$ área base $\times$ altura.

En este caso es muy sencillo obtener ambas por ser un tetraedro con tres aristas perpendiculares entre sí.

Hazlo también utilizando el producto mixto y comprueba que obtienes el mismo resultado.

- Hallamos los vértices:

$$x = y = 0 \ \to \ z = \frac{1}{3} \ \to \ A\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$$

$$y = z = 0 \ \to \ x = \frac{1}{6} \ \to \ B\left(\frac{1}{6}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \ \to \ y = -\frac{1}{5} \ \to \ C\left(0, -\frac{1}{5}, 0\right)$$

$O(0, 0, 0)$

- Calculamos el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{540} \ \text{u}^3$$

- Lo calculamos utilizando el producto mixto:

$$V = \frac{1}{6}\ |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{540} \ \text{u}^3$$

12 S **Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z}{4}$ y que pasa por el punto $(-1, 1, 0)$, y calcula el volumen de la figura limitada por el plano anterior y los tres planos coordenados.**

Un vector normal al plano es $\vec{n}(2, 3, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x + 1) + 3(y - 1) + 4(z - 0) = 0$

$$2x + 3y + 4z - 1 = 0$$

Calculamos los vértices:

$$x = y = 0 \;\to\; z = \frac{1}{4} \;\to\; A\left(0,\, 0,\, \frac{1}{4}\right)$$

$$y = z = 0 \;\to\; x = \frac{1}{2} \;\to\; B\left(\frac{1}{2},\, 0,\, 0\right)$$

$$x = z = 0 \;\to\; y = \frac{1}{3} \;\to\; C\left(0,\, \frac{1}{3},\, 0\right)$$

$O(0, 0, 0)$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{144}\ \text{u}^3$$

Página 199

13 S **Determina la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 2, 2)$ y es perpendicular a las rectas r_1 y r_2:**

$$r_1: \begin{cases} x + 2y - 3z - 1 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} 3x - y + 3z = 0 \\ x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

Obtenemos los vectores dirección de las rectas r_1 y r_2:

$$r_1: (1, 2, -3) \times (1, 2, -1) = (4, -2, 0) \;\to\; \vec{d}_1(2, -1, 0)$$

$$r_2: (3, -1, 3) \times (1, 4, 0) = (-12, 3, 13) = \vec{d}_2$$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a r_1 y a r_2:

$$(2, -1, 0) \times (-12, 3, 13) = (-26, -52, -12) \;\to\; \vec{d}(13, 26, 6)$$

Como pasa por el punto $P(1, 2, 2)$, sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = 1 + 13\lambda \\ y = 2 + 26\lambda \\ z = 2 + 6\lambda \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \frac{x-1}{13} = \frac{y-2}{26} = \frac{z-2}{6}$$

PARA RESOLVER

14 S **Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y es ortogonal al plano $\sigma: 2x - y + 3z + 1 = 0$.**

Obtén también las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ.

Obtenemos un punto y un vector dirección de la recta r:

$$P(1, -1, 1) \in r \;\to\; P(1, -1, 1) \in \pi$$

$$(1, 1, -1) \times (1, 2, 1) = (3, -2, 1) = \vec{d} \,//\, r \;\to\; \vec{d}(3, -2, 1) \,//\, \pi$$

Si π es ortogonal a σ, el vector normal de σ es paralelo a π:

$$\vec{n}_\sigma(2, -1, 3) \perp \sigma \quad \to \quad (2, -1, 3) \, // \, \pi$$

Obtenemos un vector normal a π: $(3, -2, 1) \times (2, -1, 3) = (-5, -7, 1) \quad \to \quad (5, 7, -1)$

La ecuación del plano π es: $5(x - 1) + 7(y + 1) - 1(z - 1) = 0$

$$5x + 7y - z + 3 = 0$$

• Ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ:

$$\left.\begin{array}{l} \pi\text{: } 5x + 7y - z + 3 = 0 \\ \sigma\text{: } 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

Vector dirección de la recta: $(5, 7, -1) \times (2, -1, 3) = (20, -17, -19)$

Punto de la recta:

$$x = 0 \quad \to \quad \left.\begin{array}{r} 7y - z + 3 = 0 \\ -y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} R\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Ecuaciones de la recta: $\left\{\begin{array}{l} x = 20\lambda \\ y = -\dfrac{1}{2} - 17\lambda \\ z = -\dfrac{1}{2} - 19\lambda \end{array}\right.$

15 **S** **Dados la recta r: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - y}{1} = \dfrac{z + 1}{3}$ y el plano π: $x + 3y - 3z + 3 = 0$, halla el plano que contiene a r y es perpendicular a π.**

$$r\text{: } \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z + 1}{3} \quad \to \quad P(0, 1, -1); \; \vec{d}(2, -1, 3)$$

$$\pi\text{: } x + 3y - 3z + 3 = 0 \quad \to \quad \vec{n}(1, 3, -3)$$

El plano será paralelo a $\vec{d}$ y a $\vec{n}$ y contendrá a P.

Un vector normal será: $(2, -1, 3) \times (1, 3, -3) = (-6, 9, 7) \quad \to \quad (6, -9, -7)$

La ecuación del plano es: $6(x - 0) - 9(y - 1) - 7(z + 1) = 0$

$$6x - 9y - 7z + 2 = 0$$

16 **S** **Determina la perpendicular común a las rectas:**

$$r\text{: } \left\{\begin{array}{l} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{array}\right. \qquad s\text{: } \left\{\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{array}\right.$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$r: \left\{ \begin{array}{l} x + \ \ y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{array} \right\}$ Restando la 1ª ecuación a la 2ª: $y = 3 - z$
$x = 7 - 2y = 7 - 2(3 - z) = 1 + 2z$

$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow$ Un punto genérico de r es: $R(1 + 2\lambda, 3 - \lambda, \lambda)$

$s: \left\{ \begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow s: \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases} \rightarrow$ Un punto genérico de s es: $S(2, -3, \mu)$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es: $\overrightarrow{RS}(1 - 2\lambda, -6 + \lambda, \mu - \lambda)$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot (2, -1, 1) = 0 \ \rightarrow \ 2 - 4\lambda + 6 - \lambda + \mu - \lambda = 0 \ \rightarrow \ -6\lambda + \mu + 8 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 0, 1) = 0 \ \rightarrow \ \mu - \lambda = 0 \ \rightarrow \ \mu = \lambda \end{array} \right\}$$

$-5\lambda + 8 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = \dfrac{8}{5};\ \mu = \dfrac{8}{5}$

Así:

$$\left. \begin{array}{l} R\left(\dfrac{21}{5}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{8}{5}\right) \\ S\left(2, -3, \dfrac{8}{5}\right) \end{array} \right\} \overrightarrow{RS}\left(-\dfrac{11}{5}, -\dfrac{22}{5}, 0\right) \ \rightarrow \ \vec{d}(1, 2, 0)$$

La perpendicular común a las rectas es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 8/5 \end{cases}$$

17 S **a) Halla p para que las rectas r_1 y r_2 sean perpendiculares:**

$$r_1: \frac{x}{4} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z}{2} \qquad r_2: \frac{x - 1}{1} = \frac{y - p}{p - 1} = \frac{z - 3}{3}$$

b) Calcula su punto de intersección y la ecuación del plano que las contiene.

a) $(4, -2, 2) \cdot (1, p - 1, 3) = 4 - 2p + 2 + 6 = 12 - 2p = 0 \ \rightarrow \ p = 6$

b) $r_1: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}$

• Punto de intersección:

$$\left.\begin{array}{r} 4\lambda = 1 + \mu \\ 1 - 2\lambda = 6 + 5\mu \\ 2\lambda = 3 + 3\mu \end{array}\right\}$$ Sumando las dos últimas ecuaciones:

$1 = 9 + 8\mu \;\rightarrow\; -8 = 8\mu \;\rightarrow\; \mu = -1$

$\lambda = \dfrac{3 + 3\mu}{2} = \dfrac{3 - 3}{2} = 0$

1ª ecuación: $4 \cdot 0 = 1 - 1$. Luego $\lambda = 0$, $\mu = -1$.

Sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r_1 (o bien $\mu = -1$ en las de r_2), obtenemos el punto de corte: (0, 1, 0).

• Ecuación del plano que las contiene:

$(4, -2, 2) \times (1, 5, 3) = (-16, -10, 22) \;\rightarrow\; (8, 5, -11)$ es un vector normal al plano.

Ecuación: $8(x - 0) + 5(y - 1) - 11(z - 0) = 0$

$8x + 5y - 11z - 5 = 0$

18 **S** **Dados la recta** $\boldsymbol{r}: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ **y el plano** π: $\boldsymbol{x + 2y + 3z - 1 = 0}$, **halla la ecuación de una recta situada en el plano** π, **que pase por el punto** $\boldsymbol{P(2, 1, -1)}$ **y sea perpendicular a** $\boldsymbol{r}$.

Un vector dirección de r es: $(1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a (2, 1, 1) y perpendicular a (1, 2, 3) (pues está situada en el plano π). Un vector dirección de la recta es:

$(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$

El punto $P(2, 1, -1)$ pertenece al plano y debe pertenecer a la recta buscada. Luego la recta es:

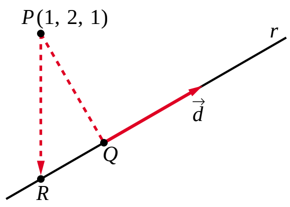
$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

19 **S** **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 1) y corta perpendicularmente a la recta** $\boldsymbol{r}: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$

Escribimos r en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 & \rightarrow \quad y = x - z - 1 = 2 - z - z - 1 = 1 - 2z \\ x + z = 2 & \rightarrow \quad x = 2 - z \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{ Un punto genérico de } r \text{ es: } R(2 - \lambda,\ 1 - 2\lambda,\ \lambda)$$



Si llamamos al punto $P(1, 2, 1)$, el vector $\overrightarrow{PR}$ ha de ser perpendicular a r, es decir, perpendicular a $\vec{d}(-1, -2, 1)$.

Por tanto, como $\overrightarrow{PR}(1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda)$:

$\overrightarrow{PR} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda) \cdot (-1, -2, 1) = 0$

$-1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0 \rightarrow 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$

La recta que buscamos pasa por el punto $P(1, 2, 1)$ y por el punto $Q(2, 1, 0)$ (Q se obtiene sustiuyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r).

Un vector dirección será: $\overrightarrow{PQ}(12, -1, -1)$

La recta es: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

20 **S** **Los vértices del triángulo *ABC* son los puntos de corte del plano $2x + y - 3z = 6$ con los ejes coordenados. Halla la ecuación de la altura que parte del vértice *B* que está en el eje *OY*.**

Los vértices del triángulo son:

$y = z = 0 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3 \rightarrow A(3, 0, 0)$

$x = z = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow B(0, 6, 0)$

$x = y = 0 \rightarrow -3z = 6 \rightarrow z = -2 \rightarrow C(0, 0, -2)$

Debemos hallar la ecuación de la altura que parte de B.

Su vector dirección $\vec{d}(a, b, c)$ debe ser:

— Ortogonal a $\overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d} = 0$

— Ortogonal al vector normal del plano ABC, es decir, del plano $2x + y - 3z = 6$, puesto que la altura debe estar contenida en dicho plano $\rightarrow (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0$

Luego tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (-3, 0, -2) \cdot (a, b, c) = 0 \rightarrow 3a + 2c = 0 \\ (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (2, 1, -3) \cdot (a, b, c) = 0 \rightarrow 2a + b - 3c = 0 \end{array}\right\}$$

Soluciones: $(-2t, 13t, 3t) \rightarrow$ Si $t = -1$, $\vec{d}(2, -13, -3)$

Ecuación de la altura que pasa por B:

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 6 - 13\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

21 S **Halla el punto P de la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$ que equidiste de los planos:**

$$\alpha: x + y + z = -3 \quad \text{y} \quad \beta: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = \quad -\lambda + \mu \\ z = -6 + \mu \end{cases}$$

- Un punto genérico de la recta r es: $R(1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 3\lambda)$
- Escribimos el plano β en forma implícita:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \beta: x + y - z - 3 = 0$$

- La distancia de R a α y a β ha de ser la misma: $dist\ (R, \alpha) = dist\ (R, \beta)$

$$\frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda + 3\lambda + 3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda - 3\lambda - 3|}{\sqrt{1+1+1}}, \text{ es decir:}$$

$$|6\lambda + 3| = 3 \begin{cases} 6\lambda + 3 = 3 \quad \rightarrow \quad 6\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0 \\ 6\lambda + 3 = -3 \quad \rightarrow \quad 6\lambda = -6 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $P(1, -1, 0)$ y $P'(-1, -2, -3)$

22 S **Sea r la recta de intersección de los planos $ax + 9y - 3z = 8$ y $x + ay - z = 0$.**

Determina el valor de a para que:

a) Los dos planos sean paralelos.

b) Los dos planos sean perpendiculares.

c) La recta r corte al plano OXY en un punto cuya distancia al origen de coordenadas sea $\sqrt{2}$.

a) Las coordenadas de $(a, 9, -3)$ y $(1, a, -1)$ han de ser proporcionales:

$$\frac{a}{1} = \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \begin{cases} \frac{a}{1} = \frac{-3}{-1} \quad \rightarrow \quad a = 3 \\ \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \quad \rightarrow \quad a = 3 \end{cases} \quad a = 3$$

b) Los vectores normales han de ser perpendiculares:

$$(a, 9, -3) \cdot (1, a, -1) = a + 9a + 3 = 10a + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{-3}{10}$$

c) El plano OXY es el plano $z = 0$. Hallamos el punto de corte de r con el plano OXY:

$$\left.\begin{array}{r} ax + 9y - 3z = 8 \\ x + ay - z = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} ax + 9y = 8 \\ x + ay = 0 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} a & 9 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 9$$

(El problema solo tiene solución si $a^2 - 9 \neq 0$, es decir, si $a \neq 3$ y $a \neq -3$. Si $a = 3$ ó $a = -3$, el sistema es incompatible).

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 8a; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} a & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$x = \frac{8a}{a^2 - 9}; \quad y = \frac{-8}{a^2 - 9}; \quad z = 0$$

El punto de corte es $P\left(\frac{8a}{a^2 - 9}, \frac{-8}{a^2 - 9}, 0\right)$. Su distancia al origen ha de ser $\sqrt{2}$:

$$dist\ (P, O) = \sqrt{\left(\frac{8a}{a^2 - 9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2 - 9}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{8a}{a^2 - 9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2 - 9}\right)^2 = 2 \quad \to \quad \frac{64a^2 + 64}{(a^2 - 9)^2} = 2$$

$$64a^2 + 64 = 2(a^4 + 81 - 18a^2) \quad \to \quad 64a^2 + 64 = 2a^4 + 162 - 36a^2$$

$$0 = 2a^4 - 100a^2 + 98 \quad \to \quad a^4 - 50a^2 + 49 = 0$$

$$a^2 = \frac{50 \pm \sqrt{2\,500 - 196}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{2\,304}}{2} = \frac{50 \pm 48}{2} = \begin{cases} a^2 = 49 \quad \to \quad a = \pm 7 \\ a^2 = \ \ 1 \quad \to \quad a = \pm 1 \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones: $a_1 = -7$, $a_2 = 7$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$

23 S **Halla la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones paramétricas: $(-1 + 3\lambda,\ 1 + 2\lambda,\ 2 + \lambda)$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0$.**

Determina también el ángulo formado por la recta y el plano dados.

Un vector normal al plano es: $(3, 2, 1) \times (2, 1, -3) = (-7, 11, -1) \quad \to \quad (7, -11, 1)$

Un punto del plano es $(-1, 1, 2)$ (pues contiene a la recta).

- La ecuación del plano será:

$$7(x + 1) - 11(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$

$$7x - 11y + z + 16 = 0$$

- Ángulo formado por la recta y el plano dados:

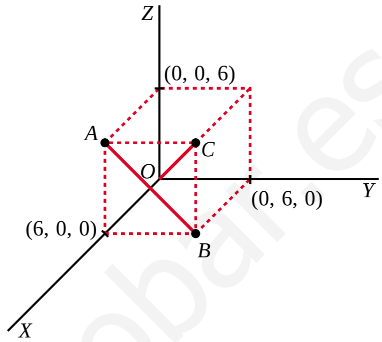
$$\vec{d}(3, 2, 1); \quad \vec{n}(2, 1, -3)$$

$$cos\ (90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{6 + 2 - 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{14} = 0{,}357$$

$$90° - \alpha = 69°\ 4'\ 31'' \quad \to \quad \alpha = 20°\ 55'\ 29''$$

24 S **Dado un cubo (hexaedro regular) de lado 6 cm, halla la mínima distancia de una diagonal del cubo a una diagonal de una de sus caras, sabiendo que las rectas de ambas diagonales se cruzan.**

Dibuja el cubo con un vértice en el origen y los contiguos sobre los ejes coordenados.



- La diagonal del cubo pasa por $O(0, 0, 0)$ y por $C(6, 6, 6)$:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- La diagonal de la cara pasa por $A(6, 0, 6)$ y por $B(6, 6, 0)$:

$$s: \begin{cases} x = 6 \\ y = \mu \\ z = 6 - \mu \end{cases}$$

- $dist\ (r, s) = \dfrac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \dfrac{|[\vec{d}, \vec{d'}, \overrightarrow{OA}]|}{|\vec{d} \times \vec{d'}|}$

$$[\vec{d}, \vec{d'}, \overrightarrow{OA}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

$$\vec{d} \times \vec{d'} = (1, 1, 1) \times (0, 1, -1) = (-2, 1, 1) \quad \rightarrow \quad |\vec{d} \times \vec{d'}| = \sqrt{6}$$

Por tanto: $dist\ (r, s) = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

25 S **Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es (1, 3, 2).**

Si el punto más próximo al origen es $P(1, 3, 2)$, el vector $\overrightarrow{OP}(1, 3, 2)$ es normal al plano. Por tanto, la ecuación del plano es:

$1(x - 1) + 3(y - 3) + 2(z - 2) = 0$

$x + 3y + 2z - 14 = 0$

Página 200

26 S **Determina, razonadamente, si las rectas**

$$r: \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

se cortan o se cruzan. Halla también el coseno del ángulo que forman sus direcciones.

Obtenemos un punto y un vector dirección de cada una de las dos rectas:

$$\vec{d}_r: (1, 1, -2) \times (2, -1, 1) = (-1, -5, -3) \quad \rightarrow \quad \vec{d}_r(1, 5, 3);\ \ P(0, -1, 0)$$

$\vec{d}_s$: $(2, 1, -1) \times (1, -1, -2) = (-3, 3, -3) \;\rightarrow\; \vec{d}_s(1, -1, 1)$; $P'(0, 1, 0)$

$\overrightarrow{PP'}(0, 2, 0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r|\,|\vec{d}_s|} = \frac{|1 - 5 + 3|}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{105}} = 0{,}0976$$

27 **Determina las condiciones que deben cumplir *a* y *b* para que estos tres planos: $ax + z - 1 = 0$, $x + bz + 2 = 0$, $\sqrt{5}x + 3y + 2z - 3 = 0$ se corten en un punto.**

Haciendo $a = 2$ y $b = 1$, obtén las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por los dos primeros, así como el ángulo que esta forma con el tercero.

$$\left.\begin{array}{r} ax \quad\quad + z = 1 \\ x \quad\quad + bz = -2 \\ \sqrt{5}x + 3y + 2z = 3 \end{array}\right\}$$ Para que los tres planos se corten en un punto, el sistema ha de tener solución única, es decir:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ \sqrt{5} & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3(ab - 1) \neq 0 \;\rightarrow\; ab \neq 1$$

- **Si $a = 2$ y $b = 1$**, la recta determinada por los dos primeros planos es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + z - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Restando: } x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = 3 \\ z = -2 - x = -2 - 3 = -5 \end{array}$$

$$\text{Ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -5 \end{cases}$$

- **Ángulo que forma la recta con el 3^er^ plano:**

$\vec{d}(0, 1, 0)$ $\vec{n}(\sqrt{5}, 3, 2)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{3}{1\sqrt{18}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; 90° - \alpha = 45° \;\rightarrow\; \alpha = 45°$$

28 **a) Encuentra los puntos de $r: \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ que disten $\frac{1}{3}$ del plano $\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$.**

b) Obtén los puntos de π que distan $\frac{1}{3}$ de los puntos hallados en el apartado anterior.

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} y = -x \\ z = \ \ x \end{array}\right\} \rightarrow \ r: \begin{cases} x = \ \ \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \ \ \lambda \end{cases} \rightarrow \text{ Un punto de } r \text{ es de la forma } R(\lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$dist\,(R, \pi) = \frac{|2\lambda + \lambda + 2\lambda + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|5\lambda + 1|}{3} = \frac{1}{3} \begin{cases} 5\lambda + 1 = \ \ 1 \ \rightarrow \ \lambda = 0 \\ 5\lambda + 1 = -1 \ \rightarrow \ \lambda = -2/5 \end{cases}$$

Hay dos puntos: (0, 0, 0) y $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

b) Los dos puntos obtenidos están a distancia $\frac{1}{3}$ de π.

Se trata de encontrar la proyección de estos puntos sobre el plano π.

- Para (0, 0, 0):

  Obtenemos la recta que pasa por (0, 0, 0) y es perpendicular a π:

  $$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

  Hallamos el punto de corte de esta recta con π:

  $$4\lambda + \lambda + 4\lambda + 1 = 0 \ \rightarrow \ 9\lambda = -1 \ \rightarrow \ \lambda = -\frac{1}{9}$$

  El punto es $\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$.

- Para $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$:

  Hallamos la recta que pasa por este punto y es perpendicular a π:

  $$\begin{cases} x = -2/5 + 2\lambda \\ y = \ \ 2/5 - \ \lambda \\ z = -2/5 + 2\lambda \end{cases}$$

  Obtenemos el punto de corte de esta recta con π:

  $$2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) - \left(\frac{2}{5} - \lambda\right) + 2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) + 1 = 0$$

  $$-\frac{4}{5} + 4\lambda - \frac{2}{5} + \lambda - \frac{4}{5} + 4\lambda + 1 = 0$$

  $$9\lambda - 1 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = \frac{1}{9}$$

  El punto es $\left(-\frac{8}{45}, \frac{13}{45}, -\frac{8}{45}\right)$.

29 S **Sean los puntos $P(3, 1, 5)$ y $Q(-1, 7, 3)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento. Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C.**

a) Escribe la ecuación de π.

b) Calcula el área del triángulo ABC.

a) El plano es perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}(-4, 6, -2)$; un vector normal al plano es $(2, -3, 1)$.

Pasa por el punto medio del segmento PQ: $M(1, 4, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x-1) - 3(y-4) + 1(z-4) = 0$

$$\pi: 2x - 3y + z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del triángulo:

$y = z = 0 \to 2x + 6 = 0 \to x = -3 \to A(-3, 0, 0)$

$x = z = 0 \to -3y + 6 = 0 \to y = 2 \to B(0, 2, 0)$

$x = y = 0 \to z + 6 = 0 \to z = -6 \to C(0, 0, -6)$

$\overrightarrow{AB}(3, 2, 0)$ $\overrightarrow{AC}(3, 0, -6)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-12, 18, -6) \to |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{504}$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{504}}{2} \approx 11{,}22 \text{ u}^2$$

30 S **Calcula el volumen de un cubo que tiene aristas sobre cada una de las rectas r y s:**

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 6t \\ z = -1 - t \end{cases} \qquad s: \frac{x}{13} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-6}{14}$$

• Hallamos la posición relativa de las dos rectas:

$\vec{d}_r = (2, 6, -1)$; $P(1, -2, -1)$

$\vec{d}_s = (13, 2, 14)$; $P'(0, 8, 6)$

$\overrightarrow{PP'}(-1, 10, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 13 & -1 \\ 6 & 2 & 10 \\ -1 & 14 & 7 \end{vmatrix} = -1\,014 \to \text{Las rectas se cruzan.}$$

• La arista del cubo es la distancia entre las dos rectas:

$$dist\ (r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{1\,014}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} = \frac{1\,014}{|(86, -41, -74)|} =$$

$$= \frac{1\,014}{\sqrt{14\,553}} = \text{arista del cubo}$$

• El volumen del cubo es:

$$V = \left(\frac{1\,014}{\sqrt{14\,553}}\right)^3 \approx 593{,}86 \text{ u}^3$$

31 **Determina la ecuación continua de la recta r que es perpendicular y corta a las rectas s y t de ecuaciones:**

s: $(1 + 2\lambda,\ 2 - \lambda,\ 1 + \lambda)$ $\quad$ t: $(4 + \mu,\ 6 + \mu,\ 5 - 2\mu)$

Un vector genérico de origen en s y extremo en t es:

$$\overrightarrow{ST}(3 - 2\lambda + \mu,\ 4 + \lambda + \mu,\ 4 - \lambda - 2\mu)$$

Este vector ha de ser perpendicular a las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{ST} \cdot (2, -1, 1) = 0 \ \rightarrow\ 6 - 4\lambda + 2\mu - 4 - \lambda - \mu + 4 - \lambda - 2\mu = 0 \ \rightarrow\ 6\lambda + \mu = 6 \\ \overrightarrow{ST} \cdot (1, 1, -2) = 0 \ \rightarrow\ 3 - 2\lambda + \mu + 4 + \lambda + \mu - 8 + 2\lambda + 4\mu = 0 \ \rightarrow\ \lambda + 6\mu = 1 \end{array}\right\}$$

$\lambda = 1,\ \mu = 0$

La recta que buscamos, corta a s en $S(3, 1, 2)$, y corta a t en $T(4, 6, 5)$.

Un vector dirección es $\overrightarrow{ST}(1, 5, 3)$.

Su ecuación continua es: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-2}{3}$

32 S **Halla los puntos simétricos de $P(1, 2, 3)$ respecto del plano α: $x - 3y - 2z + 4 = 0$ y respecto de la recta r: $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$**

■ Simétrico respecto del plano:

• Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a α:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

• Punto de corte de α con la recta anterior:

$$(1 + \lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 4 = 0$$

$$1 + \lambda - 6 + 9\lambda - 6 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$14\lambda - 7 = 0 \ \rightarrow\ \lambda = \frac{1}{2}$$

La recta y el plano se cortan en $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$. Este es el punto medio del segmento PP', siendo P' el simétrico de P respecto del plano α. Luego, si $P'(x, y, z)$, entonces: $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \ \rightarrow\ P'(2, -1, 1)$

- Simétrico respecto de la recta:
  - Escribimos la recta en paramétricas:

$$\left.\begin{cases} x - y + 3 = 0 & \to \quad y = x + 3 \\ 4x - z = 0 & \to \quad z = 4x \end{cases}\right\} \to \quad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

  - Hallamos la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P:

$$1(x - 1) + 1(y - 2) + 4(z - 3) = 0$$

$$x + y + 4z - 15 = 0$$

  - Obtenemos el punto de intersección de la recta r con el plano:

$$\lambda + 3 + \lambda + 16\lambda - 15 = 0$$

$$18\lambda - 12 = 0 \quad \to \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

El punto de corte es $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Este es el punto medio del segmento PP'', siendo P'' el simétrico de P respecto de la recta r. Así, si $P''(a, b, c)$, entonces: $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right) \quad \to \quad P''\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$

33 S **Halla la distancia entre el punto $P(2, 1, 3)$ y la recta $r: \begin{cases} 2x - y - z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$**

- Escribimos la recta r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 + z \\ x - y &= 2 - z \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \text{Restando: } \quad x &= 1 + 2z \\ y = x + z - 2 &= -1 + 3z \end{aligned}\right\} \quad r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r:

$$2(x - 2) + 3(y - 1) + 1(z - 3) = 0$$

$$\pi: 2x + 3y + z - 10 = 0$$

- Obtenemos el punto de corte de r con π:

$$2(1 + 2\lambda) + 3(-1 + 3\lambda) + \lambda - 10 = 0$$

$$2 + 4\lambda - 3 + 9\lambda + \lambda - 10 = 0$$

$$14\lambda - 11 = 0 \quad \to \quad \lambda = \frac{11}{14}$$

El punto de corte es $Q\left(\frac{18}{7}, \frac{19}{14}, \frac{11}{14}\right)$.

- Calculamos la distancia:

$$dist\,(P, r) = dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(\frac{4}{7}, \frac{5}{14}, \frac{-31}{14}\right)\right| = \sqrt{\frac{1\,050}{196}} = \sqrt{\frac{75}{14}} \approx 2{,}31$$

34 S **Dados los puntos $A(1, 5, -2)$, $B(4, 0, 1)$ y $C(-3, 2, 0)$:**

a) Prueba que son los vértices de un triángulo.

b) Halla la longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC.

a) Hay que probar que los puntos no están alineados.

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(3, -5, 3)\\ \overrightarrow{AC}(-4, -3, 2)\end{array}\right\}$ Sus coordenadas no son proporcionales, luego los puntos no están alineados. Son los vértices de un triángulo.

b) • Obtenemos la ecuación del lado AC:

$$r: \begin{cases} x = -3 - 4\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

• Hallamos el plano que pasa por B y es perpendicular a r:

$$-4(x - 4) - 3(y - 0) + 2(z - 1) = 0$$

$$\pi: -4x - 3y + 2z + 14 = 0$$

• Obtenemos el punto de intersección de r con π:

$$-4(-3 - 4\lambda) - 3(2 - 3\lambda) + 4\lambda + 14 = 0$$

$$12 + 16\lambda - 6 + 9\lambda + 4\lambda + 14 = 0$$

$$29\lambda + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-20}{29}$$

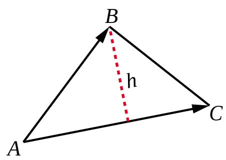
El punto (proyección de B sobre AC) es: $B'\left(\frac{-7}{29}, \frac{118}{29}, \frac{-40}{29}\right)$

• La longitud del segmento es la distancia entre B y B':

$$|\overrightarrow{B'B}| = \left|\left(\frac{123}{29}, \frac{-118}{29}, \frac{69}{29}\right)\right| = \sqrt{\frac{33\,814}{841}} = \sqrt{\frac{1\,166}{29}} \approx 6{,}34$$

De otra forma:

$$\text{h} = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|(1, 18, 29)|}{\sqrt{16 + 9 + 4}} = \sqrt{\frac{1\,166}{29}} \approx 6{,}34$$



35 S **Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano de la ecuación $x - 2y + 3z + 6 = 0$ y que dista 12 unidades del origen.**

Un plano paralelo a $x - 2y + 3z + 6 = 0$ es de la forma $\pi: x - 2y + 3z + k = 0$. Tenemos que hallar k para que la distancia al origen sea de 12 unidades:

$$dist\,[(0, 0, 0), \pi] = \frac{|k|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{|k|}{\sqrt{14}} = 12 \begin{cases} k = 12\sqrt{14} \\ k = -12\sqrt{14} \end{cases}$$

Hay dos planos: $x - 2y + 3z + 12\sqrt{14} = 0$ y $x - 2y + 3z - 12\sqrt{14} = 0$

36 S **Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta** $r: \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

y otro sobre $s: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+5}{-2}$

a) Calcula el área del cuadrado.

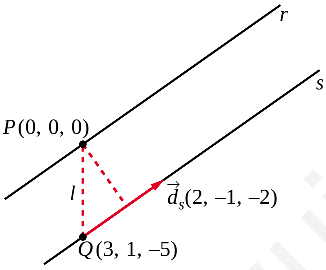
b) Encuentra cuatro puntos (dos en r **y dos en** s**) que puedan ser los vértices de un cuadrado, si uno de ellos es (0, 0, 0).**

a) Escribimos la recta r en forma paramétrica:

$$(3, 2, 2) \times (1, -2, 2) = (8, -4, -8) \;//\; (2, -1, -2)$$

$$r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \quad \to \quad \vec{d}_r(2, -1, -2);\; P(0, 0, 0)$$

$\vec{d}_s(2, -1, -2)$; las dos rectas tienen la misma dirección; además $P(0, 0, 0) \in r$, pero $P(0, 0, 0) \notin s$. Las rectas son paralelas.



El lado del cuadrado es la distancia entre las dos rectas.

$$dist\,(r, s) = dist\,(P, s) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} =$$

$$= \frac{|(-7, -4, -5)|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{9}} = \sqrt{10} =$$

$= \text{lado del cuadrado}$

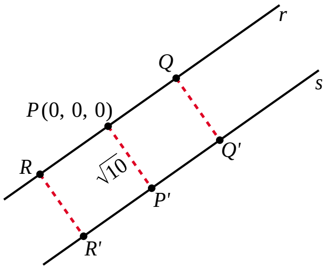
Por tanto: Área $= (\sqrt{10})^2 = 10\ u^2$

b) Obtenemos los vértices que pueden estar en r:

Un punto de r es $(2\lambda, -\lambda, -2\lambda)$:

$$dist\,(P, Q) = \sqrt{4\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{10} \quad \to$$

$$\to \quad 9\lambda^2 = 10 \quad \to \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{10}}{3}$$



Hay dos posibles vértices:

$$Q\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}, \frac{-\sqrt{10}}{3}, \frac{-2\sqrt{10}}{3}\right); \quad R\left(\frac{-2\sqrt{10}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{2\sqrt{10}}{3}\right)$$

• Obtenemos P': Un punto de s es de la forma: $S(3 + 2\mu, 1 - \mu, -5 - 2\mu)$

$$\overrightarrow{PS} \cdot \vec{d}_s = 0 \quad \to \quad (3 + 2\mu, 1 - \mu, -5 - 2\mu) \cdot (2, -1, -2) = 0$$

$$6 + 4\mu - 1 + \mu + 10 + 4\mu = 0 \quad \to \quad 9\mu = -15 \quad \to \quad \mu = \frac{-5}{3}$$

$$P'\left(\frac{-1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$

• Si $Q'(x, y, z)$, como $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$, entonces:

$$\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}, \frac{-\sqrt{10}}{3}, \frac{-2\sqrt{10}}{3}\right) = \left(x + \frac{1}{3}, y - \frac{8}{3}, z + \frac{5}{3}\right)$$

$$Q'\left(\frac{2\sqrt{10} - 1}{3}, \frac{8 - \sqrt{10}}{3}, \frac{-5 - 2\sqrt{10}}{3}\right)$$

• Si $R'(a, b, c)$, como $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{P'R'}$, entonces:

$$\left(\frac{-2\sqrt{10}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{2\sqrt{10}}{3}\right) = \left(a + \frac{1}{3}, b - \frac{8}{3}, c + \frac{5}{3}\right)$$

$$R'\left(\frac{-2\sqrt{10} - 1}{3}, \frac{8 + \sqrt{10}}{3}, \frac{-5 + 2\sqrt{10}}{3}\right)$$

Los dos cuadrados son $PQQ'P'$ y $PRR'P'$.

37 S **Estudia la posición relativa de las rectas r y s y calcula el ángulo que forman:**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \qquad s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases}$$

$\vec{d}_r(2, 3, 4)$; $P(1, 0, 0)$

$\vec{d}_s(1, 2, 3)$; $P'(3, 3, 4)$

$\overrightarrow{PP'}(2, 3, 4) = \vec{d}_r$

Las dos rectas se cortan en el punto (3, 3, 4).

• Ángulo que forman:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r|\,|\vec{d}_s|} = \frac{2 + 6 + 12}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{14}} = \frac{20}{\sqrt{406}} = 0{,}99 \quad \rightarrow \quad \alpha = 6°\ 58'\ 57''$$

Página 201

38 S **Sea r_1 la recta que pasa por $A(2, 4, 0)$ y $B(6, 2, 0)$ y sea r_2 la recta que pasa por $C(0, 0, 7)$ y $D(3, 2, 0)$.**

Obtén, de manera razonada, la distancia entre r_1 y r_2.

• Escribimos las rectas en forma paramétrica:

r_1: $\overrightarrow{AB}(4, -2, 0)$ // $(2, -1, 0)$

$$r_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

r_2: $\overrightarrow{CD}(3, 2, -7)$

$$r_2: \begin{cases} x = 3\mu \\ y = 2\mu \\ z = 7 - 7\mu \end{cases}$$

• Estudiamos la posición relativa de r_1 y r_2:

$\overrightarrow{AC}(-2, -4, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -21 \neq 0 \quad \to \quad \text{Las rectas se cruzan.}$$

• Hallamos la distancia entre r_1 y r_2:

$$dist\,(r_1, r_2) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{21}{|(2, -1, 0) \times (3, 2, -7)|} =$$

$$= \frac{21}{|(7, 14, 7)|} = \frac{21}{\sqrt{294}} \approx 1{,}22$$

39 S **Halla la ecuación general del plano determinado por los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(-2, 0, -1)$, $C(1, -2, 0)$, y calcula el volumen del tetraedro que limita con los planos cartesianos.**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(-3, -1, -2) \\ \overrightarrow{AC}(0, -3, -1) \end{array}\right\} \text{Son paralelos al plano.}$$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y-1 & 1 & 3 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \to \quad 5x + 3y - 9z + 1 = 0$$

• Vértices del tetraedro: $O(0, 0, 0)$

$$y = z = 0 \;\to\; 5x = -1 \;\to\; x = -\frac{1}{5} \;\to\; A\left(-\frac{1}{5}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \;\to\; 3y = -1 \;\to\; y = -\frac{1}{3} \;\to\; B\left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$x = y = 0 \;\to\; -9z = -1 \;\to\; z = \frac{1}{9} \;\to\; C\left(0, 0, \frac{1}{9}\right)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{810}\ \text{u}^3$$

40 **S** **Calcula la distancia entre las siguientes rectas:**

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} x - z = -2 \\ y - z = -4 \end{cases} \qquad \boldsymbol{s}: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

- Escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - z = -2 & \to & x = -2 + z \\ y - z = -4 & \to & y = -4 + z \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x - z = 0 & \to & x = z \\ y + z = 0 & \to & y = -z \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Estudiamos la posición relativa de las dos rectas:

$\vec{d}_r(1, 1, 1);\ P(-2, -4, 0)$

$\vec{d}_s(1, -1, 1);\ P'(0, 0, 0)$

$\overrightarrow{PP'}(2, 4, 0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \to \quad \text{Las rectas se cruzan.}$$

- Hallamos la distancia entre las rectas:

$$dist\,(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{4}{|(1, 1, 1) \times (1, -1, 1)|} =$$

$$= \frac{4}{|(2, 0, -2)|} = \frac{4}{\sqrt{4 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

41 **S** **Sean los puntos $P(5, 1, 3)$ y $Q(3, 7, -1)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento.**

Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C:

a) Escribe la ecuación del plano π.

b) Calcula el volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C (O es el origen de $\mathbb{R}^3$).

a) El plano es perpendicular a $\overrightarrow{PQ}(-2, 6, -4)$ // $(1, -3, 2)$. Pasa por el punto medio del segmento PQ: $M = (4, 4, 1)$.

La ecuación del plano es: $1(x - 4) - 3(y - 4) + 2(z - 1) = 0$

$$\pi: x - 3y + 2z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del tetraedro:

$y = z = 0 \;\rightarrow\; x + 6 = 0 \;\rightarrow\; x = -6 \;\rightarrow\; A(-6, 0, 0)$

$x = z = 0 \;\rightarrow\; -3y + 6 = 0 \;\rightarrow\; y = 2 \;\rightarrow\; B(0, 2, 0)$

$x = y = 0 \;\rightarrow\; -2z + 6 = 0 \;\rightarrow\; z = -3 \;\rightarrow\; C(0, 0, -3)$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6}(6 \cdot 2 \cdot 3) = 6 \text{ u}^3$$

42 S **Halla el punto del plano de ecuación $x - z = 3$ que está más cerca del punto $P(3, 1, 4)$, así como la distancia entre el punto P y el plano dado.**

- Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por $P(3, 1, 4)$:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

- El punto que buscamos es el punto de corte de r y el plano:

$$(3 + \lambda) - (4 - \lambda) = 3$$

$$3 + \lambda - 4 + \lambda = 3 \;\rightarrow\; 2\lambda = 4 \;\rightarrow\; \lambda = 2$$

El punto es $P'(5, 1, 2)$

- La distancia entre P y el plano es igual a la distancia entre P y P':

$$dist\,(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(2, 0, -2)| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2{,}83$$

43 S **Se consideran los puntos $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 4, 1)$ y $R(1, 3, 1)$:**

a) Comprueba que no están alineados y halla el área del triángulo que determinan.

b) Si desde el punto $V(1, 1, -1)$ se trazan rectas a cada uno de los puntos P, Q y R, se obtiene una pirámide. Halla la altura de dicha pirámide y su volumen.

a) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}(-1, 3, 2) \\ \overrightarrow{PR}(-1, 2, 2) \end{array}\right\}$ No tiene las coordenadas proporcionales; luego los puntos no están alineados.

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1) \;\rightarrow\; |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12 \text{ u}^2$$

b) La altura es la distancia de V al plano determinado por P, Q y R.

Un vector normal al plano es $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1)$. La ecuación del plano es:

$$2(x - 2) + 1(z + 1) = 0$$

$$\pi: 2x + z - 3 = 0$$

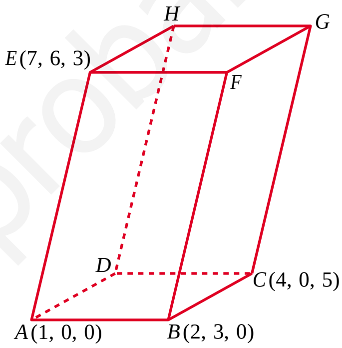
$$\text{Altura} = dist\ (V, \pi) = \frac{|2 - 1 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\ [\text{Área base} \times \text{altura}] = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 1\ \text{u}^3$$

44 **S** **Halla el volumen de un paralelepípedo de bases *ABCD* y *EFGH* sabiendo que *A* (1, 0, 0), *B* (2, 3, 0), *C* (4, 0, 5) y *E* (7, 6, 3).**

Halla las coordenadas de los restantes vértices del paralelepípedo.

Hallamos las coordenadas de los restantes vértices:



- Vértice $D(d_1, d_2, d_3)$:

  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \ \rightarrow \ (-1, -3, 0) = (d_1 - 4, d_2, d_3 - 5)$

  $D(3, -3, 5)$

- Vértice $F(f_1, f_2, f_3)$:

  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} \ \rightarrow \ (6, 6, 3) = (f_1 - 2, f_2 - 3, f_3)$

  $F(8, 9, 3)$

- Vértice $G(g_1, g_2, g_3)$ y vértice $H(h_1, h_2, h_3)$:

  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG} \ \rightarrow \ (6, 6, 3) = (g_1 - 4, g_2, g_3 - 5) \ \rightarrow \ G(10, 6, 8)$

  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} \ \rightarrow \ (6, 6, 3) = (h_1 - 3, h_2 + 3, h_3 - 5) \ \rightarrow \ H(9, 3, 8)$

$\overrightarrow{AB}(1, 3, 0)\ \ \overrightarrow{AD}(2, -3, 5),\ \ \overrightarrow{AE}(6, 6, 3)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 33 \ \rightarrow \ \text{Volumen} = 33\ \text{u}^3$$

45 **S** **Dadas las rectas:**

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1} \qquad\qquad s: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

determina la posición relativa de ambas rectas y el área de uno de los cuadrados, dos de cuyos lados están sobre *r* y *s*.

- Escribimos la recta s en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} -y + z = 2 - x \\ -y - z = -4 - 3x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } -2y = -2 - 4x \ \rightarrow \ y = 1 + 2x \\ z = 2 - x + y = 3 + x \end{array}$$

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

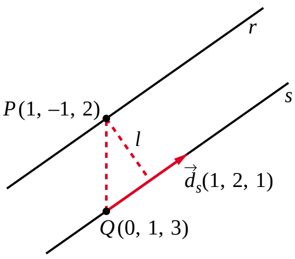
• Estudiamos la posición relativa de las dos rectas:

$$\vec{d}_r(1, 2, 1); \; P(1, -1, 2)$$

$$\vec{d}_s(1, 2, 1); \; Q(0, 1, 3)$$

Las rectas tienen la misma dirección; $P \in r$, pero $P \notin s$; luego las rectas r y s son paralelas.

• El lado del cuadrado es igual a la distancia entre las rectas r y s.



$$\overrightarrow{QP}(1, -2, -1)$$

$$\overrightarrow{QP} \times \vec{d}_s = (1, -2, -1) \times (1, 2, 1) = (0, -2, 4)$$

$$dist\,(r, s) = dist\,(P, s) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(0, -2, 4)|}{|(1, 2, 1)|} =$$

$$= \frac{\sqrt{4 + 16}}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{\frac{20}{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

• El área del cuadrado es:

$$\text{Área} = \left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^2 = \frac{10}{3} \; u^2$$

46 S **Dadas las rectas *r* y *s*:**

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

Halla los puntos que dan la mínima distancia y determina la ecuación de la perpendicular común a *r* y *s*.

Un punto genérico de r es $R(3 + 2\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$

Un punto genérico de s es $S(\mu, -\mu, -\mu)$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS}(-3 - 2\lambda + \mu, -\lambda - \mu, -1 - \lambda - \mu)$$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (2, 1, 1) = 0 \;\rightarrow\; -6\lambda - 7 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = -\dfrac{7}{6} \\[2ex] \overrightarrow{RS} \cdot (1, -1, -1) = 0 \;\rightarrow\; -2 + 3\mu = 0 \;\rightarrow\; \mu = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Los puntos que dan la mínima distancia son:

$$R\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right) \text{ y } S\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

La perpendicular común es la recta que pasa por R y S:

$$\overrightarrow{RS}\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \vec{d}(0, 1, -1)$$

La recta es: $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{7}{6} + \lambda \\ z = -\dfrac{1}{6} - \lambda \end{cases}$

47 S **Halla la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ sobre el plano $\alpha: x - 3y + 2z + 12 = 0$.**

La proyección ortogonal de r sobre α es la recta intersección del plano α con otro plano π, perpendicular a α y que contiene a r.

$P(1, 1, 2)$; $\vec{d}_r(2, 1, 2)$; $\vec{n}(1, -3, 2)$

$\vec{d}_r \times \vec{n} = (2, 1, 2) \times (1, -3, 2) = (8, -2, -7)$

La ecuación de π es: $8(x-1) - 2(y-1) - 7(z-2) = 0$

$$\pi: 8x - 2y - 7z + 8 = 0$$

La proyección ortogonal de r sobre α es:

$$r': \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

48 S **Los puntos $P(0, 1, 0)$ y $Q(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S, pertenece a la recta $r: \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r.**

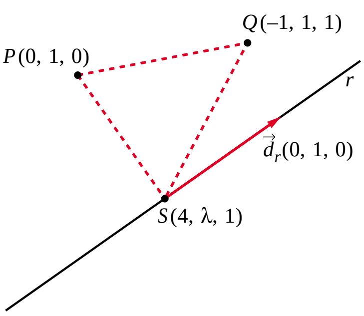
a) Determina las coordenadas de S.

b) Calcula el área del triángulo PQS.

a) $\overrightarrow{PS} \perp \vec{d}_r \rightarrow \overrightarrow{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$

$(4, \lambda - 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1$

$S(4, 1, 1)$



b) $\overrightarrow{PS}(4, 0, 1)$ $\overrightarrow{PQ}(-1, 0, 1)$

$\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ} = (4, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = (0, -5, 0)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ}|}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ u}^2$$

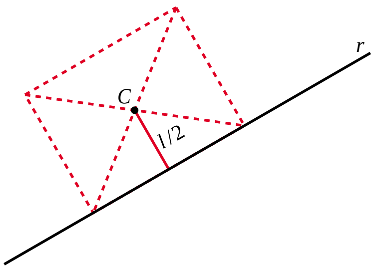
49 **Considera un cuadrado cuyo centro es el punto $C(1, 1, -1)$ y tiene uno de sus lados en la recta:**

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$$

a) Halla la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado.

b) Calcula la longitud del lado del cuadrado.

a) Es el plano, π, que contiene a C y a r: $\vec{d}_r(1, 1, 0)$; $P(2, 1, 1) \in r$.



$C(1, 1, -1)$

$\overrightarrow{PC}(-1, 0, -2) \; // \; \pi$

Un vector normal al plano es:

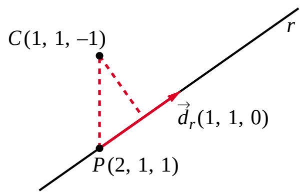
$\vec{n} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 2) = (2, -2, -1)$

La ecuación del plano es:

$2(x-1) - 2(y-1) - 1(z+1) = 0$

$2x - 2y - z - 1 = 0$

b) La distancia de C a r es la mitad del lado del cuadrado.



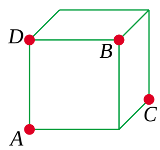
$\vec{d}_r \times \overrightarrow{PC} = (1, 1, 0) \times (-1, 0, -2) = (-2, 2, 1)$

$|\vec{d}_r| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$dist\,(C, r) = \frac{|\vec{d}_r \times \overrightarrow{PC}|}{|\vec{d}_r|} = \frac{\sqrt{4+4+1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

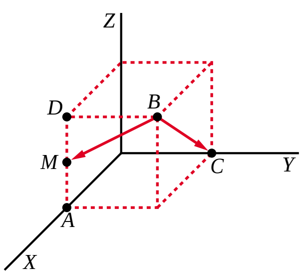
$\frac{l}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \;\to\;$ lado del cuadrado $= l = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$

50 **S** **En la figura adjunta, calcula el ángulo que forma la recta BC con la recta que une B con el punto medio del lado AD.**



Vamos a considerar el cubo de lado 1 con un vértice en el origen:

Así: $A(1, 0, 0)$ $B(1, 1, 1)$ $C(0, 1, 0)$ $D(1, 0, 1)$ $M\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$



$\overrightarrow{BC}(-1, 0, -1)$; $\overrightarrow{BM}\left(0, -1, -\frac{1}{2}\right)$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{BM}|} = \frac{1/2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5/4}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}316 \;\to\; \alpha = 71°\ 33'\ 54''$$

Página 202

51 S **Sea la recta** $\boldsymbol{r}: \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

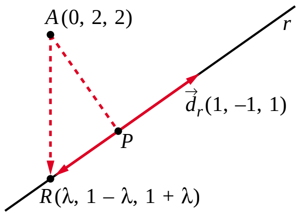
a) Determina la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por (0, 2, 2), y las coordenadas del punto P intersección de r y s.

b) Halla la ecuación del plano π que contiene a r y s y la de la recta t perpendicular a π por el punto P.

c) Si Q es cualquier punto de t, explica, sin hacer ningún cálculo, qué relación hay entre las distancias de Q a r, a s y a π.

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 & \to \quad z = 3x + 2y - 1 = 1 + x \\ x + y - 1 = 0 & \to \quad y = 1 - x \end{cases}\right\} \quad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$



Un punto genérico de r es $R(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$.

$\overrightarrow{AR}$ ha de ser perpendicular a r; es decir: $\overrightarrow{AR} \cdot \vec{d}_r = 0$

$(\lambda, -1 - \lambda, -1 + \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0$

$\lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \quad \to \quad 3\lambda = 0 \quad \to \quad \lambda = 0$

$R(0, 1, 1)$

La recta s pasa por $A(0, 2, 2)$ y por $R(0, 1, 1)$.

$$\overrightarrow{RA}(0, 1, 1) \quad \to \quad s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

El punto de intersección de r y s es $P(0, 1, 1)$.

b) Ecuación del plano π que contiene a r y a s:

$\vec{n} = (1, -1, 1) \times (0, 1, 1) = (-2, -1, 1); \quad P(0, 1, 1) \in \pi$

$-2(x - 0) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$

$\pi: -2x - y + z = 0$

Ecuación de la recta t perpendicular a π por el punto P:

$$t: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

c) Si $Q \in t \quad \to \quad dist\,(Q, r) = dist\,(Q, s) = dist\,(Q, \pi) = dist\,(Q, P)$

Las tres distancias coinciden con la distancia de Q al punto P, luego las tres son iguales entre sí.

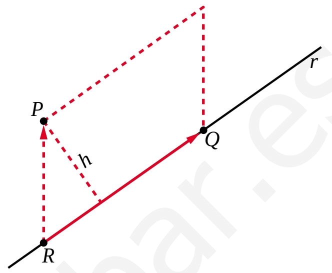
52 **S** **a) Halla la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1, 2, 1)$ y $R(1, 0, -1)$.**

b) Encuentra todos los puntos S del plano determinado por P, Q y R de manera que el cuadrilátero de vértices P, Q, R y S sea un paralelogramo.

a) Si r es la recta que pasa por R y por Q; entonces:

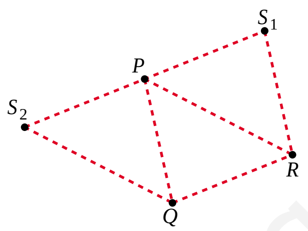
$$dist\,(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ}|}{|\overrightarrow{RQ}|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RP}(0, -1, 4) \\ \overrightarrow{RQ}(0, 2, 2) \end{array}\right\} \quad \overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ} = (-10, 0, 0)$$



$$dist\,(P, r) = \frac{|(-10, 0, 0)|}{|(0, 2, 2)|} = \frac{10}{\sqrt{4+4}} = \frac{10}{\sqrt{8}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3{,}54\text{u}$$

b) Hay dos posibilidades: que P y Q sean vértices consecutivos, o que lo sean P y R.



- Si P y Q son consecutivos, obtenemos $S_1(x, y, z)$:

  $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS_1} \;\rightarrow\; (0, -3, 2) = (x - 1, y, z + 1)$

  $S_1(1, -3, 1)$

- Si P y R son consecutivos, obtenemos $S_2(a, b, c)$:

  $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QS_2} \;\rightarrow\; (0, -1, 4) = (a - 1, b - 2, c - 1)$

  $S_2(1, 1, 5)$

53 **S** **Dadas la rectas:** $r: \begin{cases} x = 1 + a(y - 2) \\ x = z \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ ax - z = 2a - 2 \end{cases}$

a) Averigua su posición relativa según los valores de a.

b) Tomando $a = 0$, determina los puntos $P \in r$ y $Q \in s$ tales que la distancia entre P y Q sea mínima.

a) Escribimos r y s en forma paramétrica, obteniendo un punto y un vector dirección de cada una de ellas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + a(y - 2) & \rightarrow \quad x - ay + (2a - 1) = 0 \\ x = z & \rightarrow \quad x - z = 0 \end{cases}$$

Vector dirección: $\vec{d}_r = (1, -a, 0) \times (1, 0, -1) = (a, 1, a)$

Punto: $y = 2 \;\rightarrow\; x = z = 1 \;\rightarrow\; P(1, 2, 1)$

$$r: \begin{cases} x = 1 + a\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + a\lambda \end{cases}$$

$s: \begin{cases} \quad y - z + 1 = 0 \\ ax \quad - z \quad = 2a - 2 \end{cases}$

Vector dirección: $\vec{d}_s = (0, 1, -1) \times (a, 0, -1) = (-1, -a, -a)$

Punto: $x = z = 2 \;\rightarrow\; y = 1 \;\rightarrow\; P'(2, 1, 2)$

$s: \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = 1 - a\mu \\ z = 2 - a\mu \end{cases}$

- Estudiamos su posición relativa:

$\vec{d}_r(a, 1, a) \quad \vec{d}_s(-1, -a, -a) \quad \overrightarrow{PP'}(1, -1, 1)$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & -a & -a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

• Si $a = 1$: $M' = [\vec{d}_r \,|\, \vec{d}_s \,|\overrightarrow{PP'}]$; $M = [\vec{d}_r \,|\, \vec{d}_s]$

$$M' = \Bigg(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix}}_{M} \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\Bigg)$$

$ran\ (M') = 2 \quad ran\ (M) = 1$

Las rectas son paralelas.

• Si $a = -1$:

$$M' = \Bigg(\underbrace{\begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}}_{M} \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\Bigg)$$

$ran\ (M) = 2 = ran\ (M')$

Las rectas se cortan en un punto, son secantes.

• Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \;\rightarrow\; ran\ (M') = 3 \;\rightarrow\;$ Las rectas se cruzan.

b) Tomando $a = 0$ (las rectas se cruzan), tenemos que:

$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

Un punto genérico de r es $R(1, 2 + \lambda, 1)$.

Un punto genérico de s es $S(2 - \mu, 1, 2)$.

Un vector genérico con origen en r y extremo en s es: $\overrightarrow{RS}(1 - \mu, -1 - \lambda, 1)$

Este vector debe ser perpendicular a $\vec{d}_r$ y a $\vec{d}_s$:

$\overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_r = 0 \;\rightarrow\; (1 - \mu, -1 - \lambda, 1) \cdot (0, 1, 0) = 0 \;\rightarrow\; -1 - \lambda = 0 \;\rightarrow\; \lambda = -1$

$\overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_s = 0 \;\rightarrow\; (1 - \mu, -1 - \lambda, 1) \cdot (-1, 0, 0) = 0 \;\rightarrow\; -1 + \mu = 0 \;\rightarrow\; \mu = 1$

Los puntos son $P(1, 1, 1)$ y $Q(1, 1, 2)$.

54 S **Sean A, B y C los puntos de la recta: $r: x - 12 = \dfrac{y+6}{2} = \dfrac{z-6}{3}$ que están en los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.**

a) Determina razonadamente cuál de los tres puntos se encuentra entre los otros dos.

b) Siendo D un punto exterior a la recta, indica, razonadamente, cuál de los triángulos DAB, DAC o DBC tiene mayor área.

a) Obtenemos las coordenadas de los puntos A, B y C:

$$x = 0 \;\to\; \left.\begin{cases} \dfrac{y+6}{2} = -12 \;\to\; y = -30 \\[2mm] \dfrac{z-6}{3} = -12 \;\to\; z = -30 \end{cases}\right\} A(0, -30, -30)$$

$$y = 0 \;\to\; \left.\begin{cases} x - 12 = 3 \;\to\; x = 15 \\[2mm] \dfrac{z-6}{3} = 3 \;\to\; z = 15 \end{cases}\right\} B(15, 0, 15)$$

$$z = 0 \;\to\; \left.\begin{cases} x - 12 = -2 \;\to\; x = 10 \\[2mm] \dfrac{y+6}{2} = -2 \;\to\; y = -10 \end{cases}\right\} C(10, -10, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (15, 30, 45) = 15(1, 2, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (10, 20, 30) = 10(1, 2, 3) \end{array}\right\}$$ Tienen el mismo sentido y $|\overrightarrow{AC}| < |\overrightarrow{AB}| \;\to$
$\to$ C está entre A y B.

b) La altura de los tres triángulos es la misma en los tres casos, pues es igual a la distancia de D a r. Tendrá mayor área el que tenga mayor base. Como C está entre A y B, el de mayor base es el que tienen como base AB; es decir, el triángulo de mayor área es DAB.

55 S **Halla el plano de la familia: $mx + y + z - (m + 1) = 0$ que está situado a distancia 1 del origen.**

Hallamos la distancia del origen, (0, 0, 0), al plano y la igualamos a 1:

$$dist = \frac{|m \cdot 0 + 0 + 0 - (m+1)|}{\sqrt{m^2 + 1 + 1}} = \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+2}} = 1$$

$$|m + 1| = \sqrt{m^2 + 2} \;\to\; (m+1)^2 = m^2 + 2 \;\to\; m^2 + 1 + 2m = m^2 + 2$$

$$2m = 1 \;\to\; m = \frac{1}{2}$$

El plano es: $\dfrac{1}{2}x + y + z - \dfrac{3}{2} = 0$; es decir: $x + 2y + 2z - 3 = 0$

CUESTIONES TEÓRICAS

56 **La ecuación $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano del espacio. Explica qué característica tiene ese plano en cada uno de estos casos:**

I) $a = 0,\ b = 0$ **II)** $b = 0,\ c = 0$

III) $a = 0,\ c = 0$ **IV)** $d = 0$

I) Es perpendicular al eje OZ. (Paralelo al plano OXY).

II) Es perpendicular al eje OX. (Paralelo al plano OYZ).

III) Es perpendicular al eje OY. (Paralelo al plano OXZ).

IV) Pasa por el origen, (0, 0, 0).

57 **Define la proyección ortogonal de un punto P sobre un plano π y explica el procedimiento que emplearías para obtenerla.**

- La proyección ortogonal de un punto, P, sobre un plano, π, es un punto, P', tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular a π. Un procedimiento para obtener P' sería el siguiente:

  Se halla la recta, r, perpendicular a π que pasa por P. El punto de corte entre r y π es el punto buscado, P'.

58 **Dada una recta r y un punto P de ella, ¿cuántas rectas perpendiculares a r que pasen por el punto P se pueden trazar?**

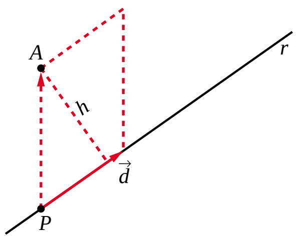
Infinitas. Todas las que, pasando por P, están contenidas en el plano perpendicular a r que pasa por P.

59 **Dado el plano π: $x - 3y + 2z - 1 = 0$, escribe las condiciones que deben cumplir las coordenadas de un vector $\vec{v}(a, b, c)$ para que tenga la dirección de alguna recta contenida en el plano.**

$\vec{v}(a, b, c)$ debe ser perpendicular al vector normal del plano π, $\vec{n}(1, -3, 2)$; es decir: $(a, b, c) \cdot (1, -3, 2) = a - 3b + 2c = 0$

60 **Justifica que la distancia del punto $A(x_2, y_2, z_2)$ a la recta $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ se puede calcular mediante la fórmula:**

$$d(A, r) = \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Llamamos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{d}(a, b, c)$. P es un punto de la recta y $\vec{d}$ un vector dirección de esta.

La distancia de A a la recta r es igual a la altura del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{PA}$ y $\vec{d}$, es decir:

$$dist\,(A, r) = \frac{\text{Área paralelogramo}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{d}\,|}{|\vec{d}\,|} =$$

$$= \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

61 **Sean r la recta determinada por el punto A y el vector $\vec{d}_r$ y s la recta determinada por el punto B y el vector $\vec{d}_s$. Sabemos que r y s se cruzan.**

a) Justifica que la distancia entre r y s se puede calcular así:

$$d\,(r, s) = \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]\right|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) Justifica que la perpendicular común a r y s se puede obtener así:

$$\begin{cases} det\,(\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ det\,(\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$$

a) $dist\,(r, s)$ = altura del paralelepípedo determinado por:

$$\overrightarrow{AB},\ \vec{d}_r \text{ y } \vec{d}_s = \frac{\text{Volumen}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) La recta, p, perpendicular a r y a s, tiene por vector dirección $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$. Esta recta, p, es la intersección de los planos α y β, siendo:

α: Plano que contiene a s y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir:

α: $det\,(\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$, donde $X = (x, y, z)$

β: Plano que contiene a r y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$, es decir:

β: $det\,(\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$

Por tanto: $p: \begin{cases} det\,(\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ det\,(\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$

62 **S** **Si $A(x_1, y_1, z_1)$ es un punto del plano π: $ax + by + cz + d = 0$, y $B(x_2, y_2, z_2)$ un punto tal que $\overrightarrow{AB} \cdot (a, b, c) = 0$, demuestra que $B \in \pi$.**

$$\overrightarrow{AB} \cdot (a, b, c) = 0 \;\rightarrow\; a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; (ax_2 + by_2 + cz_2) - \underbrace{(ax_1 + by_1 + cz_1)}_{-d \text{ (pues } A \in \pi)} = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \;\rightarrow\; B \in \pi$$

Página 203

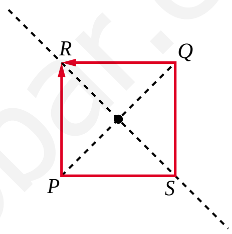
PARA PROFUNDIZAR

63 S **Los puntos $P(1, -1, 1)$ y $Q(3, -3, 3)$ son dos vértices opuestos de un cuadrado que está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación $x + y = 0$.**

a) Halla los vértices restantes.

b) Calcula el perímetro del cuadrado.

a) Los otros dos vértices, R y S, pertenecen a la mediatriz del segmento PQ.



La mediatriz del segmento PQ tiene como vector dirección el vector normal al plano $x + y = 0$; es decir, $(1, 1, 0)$.

Pasa por el punto medio del segmento PQ, es decir, por $M(2, -2, 2)$. Luego la ecuación de la mediatriz es:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Un punto de r es de la forma $R(2 + \lambda, -2 + \lambda, 2)$.

Buscamos R tal que $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$ (es decir $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QR}$):

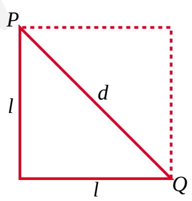
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PR}(1 + \lambda, -1 + \lambda, 1) \\ \overrightarrow{QR}(-1 + \lambda, 1 + \lambda, -1) \end{array}\right\} \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = \lambda^2 - 1 + \lambda^2 - 1 - 1 = 2\lambda^2 - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\lambda = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Los vértices son: $R\left(\frac{4 + \sqrt{6}}{2}, \frac{-4 + \sqrt{6}}{2}, 2\right)$ y $S\left(\frac{4 - \sqrt{6}}{2}, \frac{-4 - \sqrt{6}}{2}, 2\right)$

b)



La longitud de la diagonal es:

$d = |\overrightarrow{PQ}| = |(2, -2, 2)| = \sqrt{12}$

$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d^2 = 2l^2 \rightarrow 12 = 2l^2 \rightarrow l = \sqrt{6}$

El perímetro será: $P = 4\sqrt{6}$

64 **Dados los puntos $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, prueba que la distancia, d, del origen de coordenadas al plano ABC verifica:**

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

El plano que pasa por A, B y C es:

$$\pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ (véase ejercicio 55 de la unidad 6),}$$

$$\text{es decir: } \pi: \frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z - 1 = 0$$

Así, si $O(0, 0, 0)$, entonces:

$$dist\,(O, \pi) = \frac{\left|\frac{1}{a} \cdot 0 + \frac{1}{b} \cdot 0 + \frac{1}{c} \cdot 0 - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = d \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{d} \;\rightarrow\; \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{d^2}$$

65 Dadas las rectas r, s y t:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x + z = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

Halla las coordenadas de un punto P que está en la recta t y que determina con la recta s un plano que contiene a r.

- Escribimos las ecuaciones de r, s y t en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -2 - 2\mu \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x = k \\ y = -1 - k \\ z = k \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano, π, que contiene a r y a s:

  Las rectas r y s se cortan en el punto $(-2, 2, 2)$, luego el plano π contiene a este punto.

  Un vector normal al plano es:

  $$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (0, 1, 1) \times (1, -1, -2) = (-1, 1, -1) \;\rightarrow\; \vec{n}(1, -1, 1)$$

  Luego el plano es: $\pi: 1(x + 2) - 1(y - 2) + 1(z - 2) = 0$

  $$\pi: x - y + z + 2 = 0$$

- P es el punto de corte de π con la recta t:

  $k - (-1 - k) + k + 2 = 0 \;\rightarrow\; k + 1 + k + k + 2 = 0 \;\rightarrow\; 3k + 3 = 0 \;\rightarrow\; k = -1$

  El punto es $P(-1, 0, -1)$

66 **Determina los valores de los parámetros *a* y *b* para que las rectas**

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} 2x - y \quad\;\; = 0 \\ ax \quad\;\; - z = 0 \end{cases} \qquad\qquad \boldsymbol{s}: \begin{cases} x + by \quad\; = 3 \\ \quad\;\; y + z = 3 \end{cases}$$

se corten ortogonalmente.

• Escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = a\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{d}_r(1, 2, a);\; P(0, 0, 0)$$

$$s: \begin{cases} x = 3 - b\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \rightarrow \vec{d}_s(-b, 1, -1);\; P'(3, 0, 3)$$

$\overrightarrow{PP'}(3, 0, 3)$

• Para que las rectas se corten, los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{PP'}$ han de ser coplanarios:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ -b & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 3a + 6b = -3(1 + a - 2b) = 0 \rightarrow a - 2b = -1$$

• Para que sean ortogonales, ha de ser $\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = 0$, es decir:

$$(1, 2, a) \cdot (-b, 1, -1) = -b + 2 - a = 0 \rightarrow a + b = 2$$

• Con las dos condiciones anteriores, obtenemos los valores de a y b:

$$\left.\begin{array}{l} a - 2b = -1 \\ a + \;\; b = \;\; 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -a + 2b = 1 \\ \;\; a + \;\; b = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 3b = 3 \rightarrow b = 1 \\ a = 2 - b = 2 - 1 = 1 \rightarrow a = 1 \end{array}$$

Solución: $a = 1,\; b = 1$

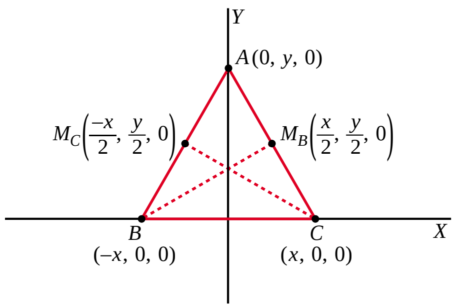
67 **Sea *ABC* un triángulo isósceles, cuyo ángulo desigual es *A*. Halla el coseno del ángulo *A* sabiendo que las medianas trazadas desde los vértices *B* y *C* son perpendiculares entre sí.**

Toma los ejes coordenados OXY de modo que el eje OX coincida con BC y OY coincida con la altura que va del vértice A al lado BC.

Tomamos los ejes coordenados *OXY* de modo que el eje *OX* coincida con *BC*, y *OY* coincida con la altura que va del vértice *A* al lado *BC*. Así:

$$\overrightarrow{BM_B}\left(\frac{3x}{2}, \frac{y}{2}, 0\right)$$

$$\overrightarrow{CM_C}\left(\frac{-3x}{2}, \frac{y}{2}, 0\right)$$



Las medianas correspondientes son perpendiculares:

$$\overrightarrow{BM_B} \cdot \overrightarrow{CM_C} = 0 \;\rightarrow\; \frac{-9x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 0 \;\rightarrow\; y^2 = 9x^2 \;\;(1)$$

Por otra parte:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(-x, -y, 0) \\ \overrightarrow{AC}(x, -y, 0) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -x^2 + y^2 \\ |\overrightarrow{AB}| = x^2 + y^2 = |\overrightarrow{AC}| \end{array}$$

Luego:

$$\cos \hat{A} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|-x^2 + y^2|}{(x^2 + y^2)^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{-x^2 + 9x^2}{(x^2 + 9x^2)^2} = \frac{8x^2}{(10x^2)^2} = \frac{4}{50x^2} = \frac{2}{25x^2}$$

Por tanto: $\cos \hat{A} = \dfrac{2}{25x^2}$

68 **Halla la ecuación de la recta paralela al plano determinado por los puntos (0, 0, 0), (1, 4, 1), (–1, –1, 1), que pasa por el punto (1, 1, 1) y corta a la recta *r*:**

$$r: \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

- Escribimos la recta r en paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 13/5 \\ y = -4/5 \\ z = \lambda \end{cases} \;\rightarrow\; \vec{d}_r(0, 0, 1);\;\; R\left(\frac{13}{5}, \frac{-4}{5}, 0\right)$$

- Sea s la recta que buscamos. Pasa por $P(1, 1, 1)$ y su vector dirección es $\vec{d}_s(a, b, c)$.
- Para que las rectas r y s se corten, los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{RP}$ han de ser coplanarios:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ -8/5 & 9/5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{9}{5}a + \frac{8}{5}b = \frac{9a + 8b}{5} = 0 \;\rightarrow\; 9a + 8b = 0$$

- Si s es paralela al plano determinado por los tres puntos dados, s será perpendicular al vector normal al plano:

$$\left.\begin{array}{l} A(0, 0, 0) \\ B(1, 4, 1) \\ C(-1, -1, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(1, 4, 1);\; \overrightarrow{AC}(-1, -1, 1) \\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (5, -2, 3) = \vec{n} \end{array}$$

$$\vec{d}_s \cdot \vec{n} = 0 \;\rightarrow\; (a, b, c) \cdot (5, -2, 3) = 0 \;\rightarrow\; 5a - 2b + 3c = 0$$

- Con las dos ecuaciones obtenidas, hallamos un vector dirección de s:

$$\left.\begin{array}{l} 9a + 8b = 0 \\ 5a - 2b + 3c = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Soluciones: } (-24t, 27t, 58t) \\ \text{Con } t = 1, \text{ obtenemos } \vec{d}_s(-24, 27, 58). \end{array}$$

• La recta es:

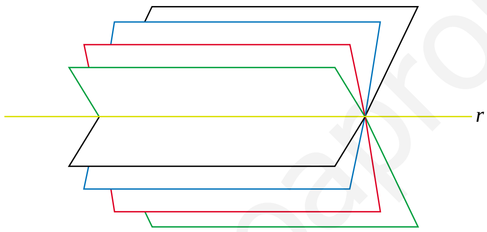
$$s: \begin{cases} x = 1 - 24\lambda \\ y = 1 + 27\lambda \\ z = 1 + 58\lambda \end{cases}$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

69 Haz de planos

La recta $r: \begin{cases} \pi: 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ \sigma: \ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ **es la intersección de los planos** π **y** σ**.**

El conjunto de todos los planos que contienen a r **se llama** ***HAZ DE PLANOS*** **de arista** r**, y su expresión analítica es:** $a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$



Para cada par de valores de a **y** b **(salvo para** $a = 0$ **y** $b = 0$**) se obtiene la ecuación de un plano del haz.**

a) Halla el plano del haz que pasa por el origen de coordenadas.

b) ¿Para qué valor de k **uno de los planos del haz es perpendicular a la recta** $t: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z}{k}$**? ¿Cuál es ese plano del haz?**

c) Halla dos puntos que pertenezcan a todos los planos del haz anterior.

d) Pon la expresión del haz de planos cuya arista es la recta s**:**

$$s: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

e) ¿Cuál de los planos de este haz dista más del origen de coordenadas?

a) El término independiente será cero: $-4a + b = 0 \ \rightarrow \ b = 4a$. Luego:

$a(2x + 3y - z - 4) + 4a(x - 2y + z + 1) = 0$; es decir:

$2x + 3y - z - 4 + 4(x - 2y + z + 1) = 0$

$2x + 3y - z - 4 + 4x - 8y + 4z + 4 = 0$

$6x - 5y + 3z = 0$

b) Un plano del haz es:

$(2a + b)x + (3a - 2b)y + (-a + b)z + (-4a + b) = 0$

Un vector normal al plano es: $\vec{n}(2a + b, 3a - 2b, -a + b)$

Para que el plano sea perpendicular a la recta, el vector normal del plano y el vector dirección de la recta han de ser paralelos, es decir, sus coordenadas deben ser proporcionales:

$$\frac{2a+b}{3} = \frac{3a-2b}{5} = \frac{-a+b}{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10a + 5b = 9a - 6b \\ 2ka + kb = -3a + 3b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a + 11b = 0 \quad \to \quad a = -11b \\ (2k+3)a + (k-3)b = 0 \end{array}$$

$$-11(2k+3) + (k-3) = 0 \quad \to \quad -22k - 33 + k - 3 = 0$$

$$-21k - 36 = 0 \quad \to \quad k = \frac{-36}{21} = \frac{-12}{7} \quad \to \quad k = \frac{-12}{7}$$

El plano del haz es:

$$-11b(2x+3y-z-4) + b(x-2y+z+1) = 0$$

$$-11(2x+3y-z-4) + (x-2y+z+1) = 0$$

$$-22x - 33y + 11z + 44 + x - 2y + z + 1 = 0$$

$$-21x - 35y + 12z + 45 = 0$$

Otra resolución:

Si la recta es perpendicular a un cierto plano del haz, será perpendicular a todas las rectas contenidas en ese plano, y, en concreto, a la recta r, arista del haz.

Vector dirección de r: $\vec{d} = (2, 3, -1) \times (1, -2, 1) = (1, -3, -7)$

Vector dirección de t: $\vec{d'} = (3, 5, k)$

$$\vec{d} \cdot \vec{d'} = 0 \quad \to \quad (1, -3, -7) \cdot (3, 5, k) = 3 - 15 - 7k = 0 \quad \to \quad k = \frac{-12}{7}$$

A partir de aquí, obtendríamos la relación entre a y b, y el plano del haz como en el caso anterior.

c) Los puntos que pertenecen a todos los planos del haz son los puntos de la recta r. Por ejemplo: $(1, 0, -2)$ y $(0, 3, 5)$.

d) Escribimos la recta s en forma implícita:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} \quad \to \quad -2x + 10 = 3y + 3 \quad \to \quad -2x - 3y + 7 = 0$$

$$\frac{x-5}{3} = \frac{z-3}{1} \quad \to \quad x - 5 = 3z - 9 \quad \to \quad x - 3z + 4 = 0$$

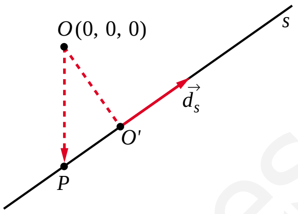
$$s: \left\{\begin{array}{l} 2x + 3y - 7 = 0 \\ x - 3z + 4 = 0 \end{array}\right.$$

La expresión del haz de planos cuya arista es s es:

$$a(2x + 3y - 7) + b(x - 3z + 4) = 0$$

e) Es el plano que contiene a la recta (puesto que es del haz) y es perpendicular a $\overrightarrow{OO'}$, siendo $O(0, 0, 0)$ y O' la proyección de O sobre la recta.

Lo calculamos en el caso de la recta s:



Un punto genérico de la recta s es:

$P(5 + 3\lambda, -1 - 2\lambda, 3 + \lambda)$

Un vector dirección de s es $\vec{d}_s(3, -2, 1)$.

El vector $\overrightarrow{OP}$ ha de ser perpendicular a $\vec{d}_s$:

$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{d}_s = 0 \quad \rightarrow \quad 3(5 + 3\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + (3 + \lambda) = 0$

$15 + 9\lambda + 2 + 4\lambda + 3 + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad 14\lambda + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \dfrac{-20}{14} = \dfrac{-10}{7}$

Luego: $O'\left(\dfrac{5}{7}, \dfrac{13}{7}, \dfrac{11}{7}\right)$; y el vector normal al plano es $\overrightarrow{OO'}\left(\dfrac{5}{7}, \dfrac{13}{7}, \dfrac{11}{7}\right)$; o bien $(5, 13, 11)$.

El plano será: $5\left(x - \dfrac{5}{7}\right) + 13\left(y - \dfrac{13}{7}\right) + 11\left(z - \dfrac{11}{7}\right) = 0$

$5x + 13y + 11z - 45 = 0$