ESPACIO AFÍN

Vectores en el espacio

1. Sean los vectores $\vec{x}=(1,-5,2)$, $\vec{y}=(3,4,-1)$, $\vec{z}=(6,3,-5)$ y $\vec{w}=(24,26,-6)$. Halla a, b y c para que se cumpla: $a\vec{x}+b\vec{y}+c\vec{z}=\vec{w}$.

Definición: Diremos que los vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}$ son linealmente dependientes si $\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\alpha_1\vec{u_1}+\alpha_2\vec{u_2}+...+\alpha_n\vec{u_n}=\vec{0}$. En caso contrario diremos que los vectores son linealmente independientes, es decir, si la única posibilidad de que la igualdad anterior sea cierta es que $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$.

Criterio práctico: En un espacio vectorial tridimensional tres vectores son linealmente independientes si la matriz cuyas filas (o columnas) son las componentes de los vectores tiene rango 3, es decir, si el determinante de dicha matriz es no nulo.

Definición: Una combinación lineal de los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, ..., $\vec{v_n}$ es una expresión de la forma $\alpha_1\vec{v_1}+...+\alpha_n\vec{v_n}$ con $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Definición: Un conjunto de vectores de un espacio vectorial se dice que forman un sistema de generadores si cualquier vector del espacio se puede escribir como combinación lineal de los vectores de dicho conjunto.

Definición: Un conjunto de vectores forman una base si son linealmente independientes además forman un sistema de generadores.

Criterio práctico: En un espacio vectorial tridimensional tres vectores linealmente independientes siempre forman una base.

Definición: Si $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, ..., $\vec{u_n}$ es una base, cualquier otro vector $\vec{w}$ del espacio vectorial se puede escribir de forma única como:

$$\vec{w}=\alpha_1\vec{u_1}+\alpha_2\vec{u_2}+...+\alpha_n\vec{u_n}$$

Los escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ son las coordenadas del vector $\vec{w}$ respecto de dicha base.

2. Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:

a) $\vec{u}=(1,2,1)$, $\vec{v}=(-1,0,3)$, $\vec{w}=(1,2,-1)$

b) $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(1,4,11)$, $\vec{c}=(1,1,-1)$, $\vec{d}=(0,1,4)$

c) $\vec{x}=(1,1,0)$, $\vec{y}=(1,0,1)$, $\vec{z}=(5,2,3)$

3. Determina el valor de k para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:

a) $\vec{u}=(k,-3,2)$, $\vec{v}=(2,3,k)$, $\vec{w}=(4,6,-4)$

b) $\vec{a}=(3,2,5)$, $\vec{b}=(2,4,7)$, $\vec{c}=(1,-1,k)$

4. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de vectores forman una base?

a) $B_1 = \{(1,2,1),\ (1,0,1),\ (2,2,2)\}$

b) $B_2 = \{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (0,0,1)\}$

c) $B_3 = \{(-3,2,1),\ (1,2,-1),\ (1,0,1)\}$

5. ¿Para qué valores de a el conjunto de vectores $S = \{(1,1,1),\ (a,1,1),\ (1,a,0)\}$ es linealmente independiente? ¿Es una base para dichos valores?

6. Determina los valores de a para los que los vectores $(-2,a,a)$, $(a,-2,a)$, $(a,a,-2)$ son linealmente dependientes. Obtén en esos casos una relación de dependencia entre dichos vectores.

<u>**Ecuaciones de la recta**</u>

7. Expresa, en todas sus formas posibles, la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,-2,5)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (3,1,-2)$.

8. Expresa, en todas sus formas posibles, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(1,-2,5)$ y $Q(-2,1,0)$.

9. Halla las ecuaciones de la recta $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-y-2z=1 \end{cases}$ en forma paramétrica y continua.

10. Expresa cada una de las siguientes rectas de todas las formas vistas en clase:

a) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-4}{3}$

b) $\begin{cases} x-y-3z=1 \\ x-3y+z=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 3+2t \end{cases}$

11. Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta de ecuación $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y}{2} = -z$.

<u>**Incidencia de punto y recta. Puntos alineados**</u>

12. Estudia si los puntos $P(1,-2,5)$ y $Q(2,2,4)$ pertenecen a la recta $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-4}{3}$.

13. Estudia si los puntos $A(3,-4,2)$, $B(1,2,3,)$ y $C(-1,4,6)$ están alineados.

<u>**Posiciones relativas de dos rectas**</u>

14. Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de rectas:

a) $\begin{cases} r_1 \equiv \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-2y-z=3 \end{cases} \end{cases}$

b) $\begin{cases} s_1 \equiv \begin{cases} 2x+y=-5 \\ 4x-z=-10 \end{cases} \\ s_2 \equiv \begin{cases} 2y-z=-7 \\ 2x-3y=8 \end{cases} \end{cases}$

15. Estudia la posición relativa de las rectas $r \equiv \begin{cases} x+z=8 \\ y+z=4 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y+z=5 \end{cases}$.

16. Estudia, según los valores de k, la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv (x,y,z) = (1,0,2) + \lambda(-3,1,k) \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x+1}{3} = -y+1 = z$$

<u>Ecuaciones del plano</u>

17. Expresa las ecuaciones del plano determinado por el punto $P(1,2,3)$ y los vectores $\vec{u}=(1,1,0)$ y $\vec{v}=(1,0,1)$.

18. Halla las ecuaciones del plano que contiene los puntos $A(3,2,-1)$, $B(0,2,-5)$ y y $C(-2,4,-1)$.

19. Halla la ecuación general del plano que contiene a los puntos $P(1,2,-1)$, $Q(3,0,2)$, y tiene como vector director $\vec{u}=(1,1,-1)$.

20. Dado el plano $\pi \equiv 2x+3y+z-6=0$, halla:

a) Tres puntos del plano.
b) Dos vectores directores del plano.

21. Calcula el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano $(a,0,1)$, $(0,1,2)$, $(1,2,3)$, $(7,2,1)$. Calcula la ecuación del plano.

22. Halla la ecuación general del plano determinado por el punto $P(1,2,3)$ y los vectores directores $\vec{a}=(1-2,-1)$ y $\vec{b}=(2,-1,3)$.

23. Determinar las ecuaciones paramétricas del plano determinado por el punto P y los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $P(-2,3,1)$, $\vec{u}=(2,-3,0)$, $\vec{v}=(1,0,1)$
b) $P(0,1,1)$, $\vec{u}=(2,0,0)$, $\vec{v}=(0,-1,0)$

24. Determinar las ecuaciones paramétricas de los planos coordenados.

<u>Posiciones relativas de dos y tres planos</u>

25. Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de planos:

a) $\begin{cases} \pi_1 \equiv x-2y+z=0 \\ \pi_2 \equiv 3x-6y+3z=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \pi_1 \equiv x-2y+z=0 \\ \pi_2 \equiv x-2y-z=3 \end{cases}$

26. Determina la posición relativa de los planos: $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x+3y+z=1 \\ \pi_2 \equiv x-y+z=-2 \\ \pi_3 \equiv 2x-2y+2z=-3 \end{cases}$

27. Estudia para los diferentes valores de m la posición relativa de los planos:

a) $\begin{cases} \pi_1 \equiv mx + y + z = 1 \\ \pi_2 \equiv x + my + z = 1 \\ \pi_3 \equiv x + y + mz = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \pi_1 \equiv mx - y - z = -m \\ \pi_2 \equiv x - my + mz = m \\ \pi_3 \equiv x + y + z = -1 \end{cases}$

Posiciones relativas de una recta y un plano

28. Estudia la posición relativa de la recta y el plano en cada caso:

a) $\begin{cases} r \equiv \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{0} \\ \pi \equiv 5x - 7y = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = z + 3 \\ \pi \equiv 3x - 2y + z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1} \\ \pi \equiv x + y - 3z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(2, 1, -4) \\ \pi \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda - 4\mu \\ y = -2 - \lambda + 3\mu \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \end{cases}$