VECTORES EN EL ESPACIO

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL, COMBINACIÓN LINEAL, BASE

EJERCICIO 1 : **Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(1, 1, 1)$, $\vec{c}(1, 0, 5)$ y $\vec{d}(-1, 1, 3)$:**

a) ¿Forman una base de R^3?

b) Expresa, si es posible, el vector $\vec{d}$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Solución:

a) No forman una base, pues cuatro vectores en $\mathbf{R}^3$ siempre son linealmente dependientes.

b) Debemos encontrar tres números, x, y, z, tales que: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

(-1, 1, 3) = x(1, 2, 3) + y(1, 1, 1) + z(1, 0, 5) (-1, 1, 3) = ($x + y + z$, $2x + y$, $3x + y + 5z$)

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = -1 \\ 2x + y \quad = 1 \\ 3x + y + 5z = 3 \end{array}\right\} \text{Resolvemos el sistema por Gauss y obtenemos} : x = 2, y = -3, z = 0 \Rightarrow \vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 0\vec{c}$$

EJERCICIO 2 :

a) Se sabe que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes. ¿Podemos asegurar que $\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Justifica tu respuesta.

b) Halla las coordenadas del vector $\vec{a}(4, 3, 7)$ respecto de la base *B* = {(2, 1, 0), (1,0,-2),(0, 0, 3)}.

Solución:

a) No. Por ejemplo, si tomamos $\vec{u}(1, 0, 0)$, $\vec{v}(0, 1, 0)$, y $\vec{w}(0, 2, 0)$:

– Son linealmente dependientes, pues $\vec{w} = 2\vec{v}$.

– Sin embargo, $\vec{u}$ no es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) Llamamos $\vec{b}(2, 1, 0)$, $\vec{c}(1, 0, -2)$, $\vec{d}(0, 0, 3)$ a los vectores de la base B. Tenemos que encontrar tres números, x, y, z, tales que: $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} + z\vec{d}$

(4, 3, 7) = x(2, 1, 0) + y(1, 0, -2) + z(0, 0, 3) (4, 3, 7) = ($2x + y$, x, $-2y + 3z$)

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 4 \\ x = 3 \\ -2y + 3z = 7 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 - 2x = -2 \\ 3z = 7 + 2y \quad \rightarrow \quad z = \dfrac{7 + 2y}{3} = 1 \end{array}$$

Las coordenadas de $\vec{a}$ respecto de la base B son $(3, -2, 1)$, es decir: $\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c} + \vec{d}$

EJERCICIO 3 : **Dados los vectores $\vec{u}(2, -1, 0)$ y $\vec{v}(3, 2, -1)$:**

a) ¿Son linealmente independientes? **b) ¿Forman una base de R^3?**

c) Halla un vector, $\vec{w}$, tal que $2\vec{u} + 3\vec{w} = \dfrac{1}{2}\vec{v}$.

Solución:

a) Sí son linealmente independientes, puesto que si escribimos:
x(2,-1, 0) + y(3, 2, -1) = (0, 0, 0), es decir:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 0 \\ -x + 2y = 0 \\ -y = 0 \end{array}\right\} \text{Este sistema solo tiene la solución trivial: } x = y = 0$$

b) No forman una base de $\mathbf{R}^3$, pues para obtener una base de $\mathbf{R}^3$ necesitamos tres vectores (linealmente independientes).

c) $2\vec{u} + 3\vec{w} = \dfrac{1}{2}\vec{v} \rightarrow 3\vec{w} = \dfrac{1}{2}\vec{v} - 2\vec{u} \rightarrow \vec{w} = \dfrac{1}{6}\vec{v} - \dfrac{2}{3}\vec{u} \Rightarrow \vec{w} = \dfrac{1}{6}(3, 2, -1) - \dfrac{2}{3}(2, -1, 0) = \left(\dfrac{-5}{6}, 1, \dfrac{-1}{6}\right)$

EJERCICIO 4 :

a) Halla los valores de x, y, z tales que x $\vec{u}$ + y $\vec{v}$ + z $\vec{w}$ = 0, siendo $\vec{u}$ (2,0,-3), $\vec{v}$ (1,-2,0) y $\vec{w}$ (3,2,-6)

b) ¿Son linealmente independientes los tres vectores anteriores? ¿Forman una base de R^3?

Solución:

a) $x(2, 0, -3) + y(1, -2, 0) + z(3, 2, -6) = (0, 0, 0) \Rightarrow (2x + y + 3z,\ \ -2y + 2z,\ -3x - 6z) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 0 \\ -2y + 2z &= 0 \\ -3x \quad\quad - 6z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Resolviendo el sistema por Gauss} \Rightarrow \text{Soluciones: } x = -2\lambda,\ \ y = \lambda,\ \ z = \lambda$$

b) Según los resultados obtenidos en el apartado a), deducimos que los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, no son base.

EJERCICIO 5 : Consideramos la base de R^3 formada por los vectores : $\vec{a}$ (2,-1,3), $\vec{b}$ (0,2,-1), $\vec{c}$ (3,0,1)

a) Halla las coordenadas de $\vec{u}(4,\ -7,\ 14)$ respecto de la base anterior.

b) Expresa, si es posible, el vector $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{u}$.

Solución:

a) Tenemos que encontrar tres números x, y, z, tales que: $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, es decir:

$(4, -7, 14) = x(2, -1, 3) + y(0, 2,-1) + z(3, 0, 1) \Rightarrow (4, -7, 14) = (2x + 3z,\ -x + 2y,\ \ 3x - y + z)$

$$\left.\begin{aligned} 2x \quad\quad + 3z &= 4 \\ -x + 2y \quad\quad &= -7 \\ 3x - y + z &= 14 \end{aligned}\right\} \quad \text{Resolviendo el sistema por Gauss} \Rightarrow \text{Solución: } \ x = 5,\ \ y = -1,\ \ z = -2$$

Por tanto, las coordenadas de $\vec{u}$ respecto de la base dada son $(5,\ -1,\ -2)$, es decir: $\vec{u} = 5\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$

b) De la igualdad obtenida en a), tenemos

que: $\vec{u} = 5\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c} \quad \rightarrow \quad 2\vec{c} = 5\vec{a} - \vec{b} - \vec{u} \quad \rightarrow \quad \vec{c} = \frac{5}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{u}$

PRODUCTO ESCALAR Y APLICACIONES (Módulo de un vector, ángulo que forman dos vectores, proyección ortogonal,…)

EJERCICIO 6 : Dados los vetores $\vec{u}(2,\ -1,\ 3)$, $\vec{v}(4,\ 2,\ -2)$ y $\vec{w}(1,\ 2,\ x)$:

a) Halla $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Obtén el valor de x para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ formen un ángulo de 60°.

Solución:

a) $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74 \qquad |\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} \approx 4{,}90$

Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenemos que:

$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{8-2-6}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, es decir, $\alpha = 90°$.

b) Ha de cumplirse que: $\cos 60^o = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|}$, es decir: $\frac{1}{2} = \frac{2-2+3x}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5+x^2}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{3x}{\sqrt{70+14x^2}}$

$\sqrt{70+14x^2} = 6x \quad \rightarrow \quad 70 + 14x^2 = 36x^2 \quad \rightarrow \quad 70 = 22x^2$

$$x^2 = \frac{70}{22} = \frac{35}{11} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{35}{11}} & \text{(no vale, pues } \vec{u}\cdot\vec{v} = 3x > 0) \\ x = \sqrt{\dfrac{35}{11}} \end{cases}$$

EJERCICIO 7 : **Dados los vectores $\vec{u}(1,\ 0,\ 0)$ y $\vec{v}(1,\ 1,\ 0)$:**

a) Halla la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, así como el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Encuentra un vector $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que sea perpendicular a (1, 0, 0).

Solución:

Proyección de u sobre v: $\vec{u}' = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \dfrac{1}{2}(1,1,0) = (\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0)$

Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenemos que: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{1}{1\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45^{o}$

b) Un vector que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es de la forma $a\vec{u}+b\vec{v}$, es decir:

$a\vec{u}+b\vec{v} = a(1,0,0)+b(1,1,0) = (a+b,\ b,\ 0)$

Para que sea perpendicular a (1, 0, 0), su producto escalar ha de ser cero:

$(a + b, b, 0)\cdot(1, 0, 0) = 0 \quad\Rightarrow\quad a + b = 0 \quad\Rightarrow\quad b = -a$

Por tanto, cualquier vector de la forma: (0, *b*, 0), con $b \neq 0$ cumple las condiciones exigidas.

EJERCICIO 8 : **Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores que forman un ángulo de 45^{o} y que tienen, el mismo módulo $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$.**

a) ¿Cuál es el módulo de $\vec{u}+\vec{v}$? ¿Y el de $\vec{u}-\vec{v}$?

b) Demuestra que $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son perpendiculares.

Solución:

a) $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2+2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2 =$

$= 4+2\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})+4 = 4+8\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+4 = 8+4\sqrt{2} \quad\rightarrow\quad |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{8+4\sqrt{2}} \approx 3{,}70$

$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2 = 4-2\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos 45^{o}+4 = 8-4\sqrt{2}$

$|\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{8-4\sqrt{2}} \approx 1{,}53$

b) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2 = 4-4 = 0 \Rightarrow (\vec{u}+\vec{v}) \perp (\vec{u}-\vec{v})$

EJERCICIO 9 : **Dados los vectores $\vec{a}(1,\ -1,\ 0)$, $\vec{b}(0,\ 1,\ -1)$ y $\vec{c} = m\vec{a}-\vec{b}$:**

a) Halla el valor de *m* para que $\vec{a}$ y $\vec{c}$ sean perpendiculares.

b) Para $m = 2$, halla el ángulo que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Solución:

a) $\vec{c} = m\vec{a}-\vec{b} = m(1,-1,0)-(0,1,-1) = (m,-m-1,1)$

$\vec{a}\perp\vec{c} \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{c} = (1,-1,0)\cdot(m,-m-1,1) = m+m+1 = 2m+1 = 0 \quad\rightarrow\quad m = -\dfrac{1}{2}$

b) Para $m = 2$, queda $\vec{c}(2,-3,1)$. Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$,

tenemos que: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} = \dfrac{-4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}} = \dfrac{-4}{\sqrt{28}} \approx 0{,}76 \quad\rightarrow\quad \alpha = 139^{o}\ 27'\ 51''$

EJERCICIO 10 : **Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; halla x e y de forma que $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sea perpendicular a $\vec{b}$ y tenga el mismo módulo que $\vec{a}$.**

Solución: $\vec{a}(2,\ -1,\ 0)$ $\quad \vec{b}(1,\ 2,\ -1)$ $\quad \vec{c}(x,\ y,\ 0)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{c} \perp \vec{b} \ \rightarrow \ \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \ \rightarrow \ x + 2y = 0 \\ |\vec{c}| = |\vec{a}| \ \rightarrow \ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \ \rightarrow \ x^2 + y^2 = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -2y \\ 4y^2 + y^2 = 5 \end{array} \ 5y^2 = 5 \ \rightarrow \ y^2 = 1 \ \rightarrow \ \begin{cases} y = -1 \ \rightarrow \ x = 2 \\ y = 1 \ \rightarrow \ x = -2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- $x = 2,\ y = -1,$ que corresponde a $\vec{c}(2, -1, 0)$.
- $x = -2,\ y = 1,$ que corresponde a $\vec{c}(-2, 1, 0)$.

PRODUCTO VECTORIAL

EJERCICIO 11 : **Dados los vectores $\vec{u}(1,\ 3,\ 0)$ y $\vec{v}(2,\ 1,\ 1)$:**

a) Halla un vector, $\vec{w}$, de módulo 1, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

b) ¿Cuál es el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

Solución:

a) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ es: $\vec{u} \times \vec{v} = (1, 3, 0) \times (2, 1, 1) = (3, -1, -5)$

Dividimos por su módulo para conseguir que tenga módulo 1: $\vec{w} = \dfrac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{35}}, \dfrac{-1}{\sqrt{35}}, \dfrac{-5}{\sqrt{35}}\right)$

Hay dos soluciones: $\left(\dfrac{3}{\sqrt{35}}, \dfrac{-1}{\sqrt{35}}, \dfrac{-5}{\sqrt{35}}\right)$ y $\left(\dfrac{-3}{\sqrt{35}}, \dfrac{1}{\sqrt{35}}, \dfrac{5}{\sqrt{35}}\right)$

b) Área $= |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{35} \approx 5{,}92\ u^2$

EJERCICIO 12 :

a) Demuestra que, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores cualesquiera, se tiene que:

$$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$$

b) Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2,\ -1,\ 1)$ y a $\vec{v}(3,\ 0,\ -1)$.

Solución:

a) $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} - \vec{v} \times \vec{v} \overset{(*)}{=} \vec{0} + \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{0} = 2(\vec{u} \times \vec{v})$

(*) Tenemos en cuenta que $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ y que $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.

b) $u \times v = (2,\ -1,\ 1) \times (3,\ 0,\ -1) = (1,\ 5,\ 3)$

EJERCICIO 13 : **Halla el valor de m para que el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ (2,0,1) y $\vec{v}$ (0,m,1) sea 2.**

Solución:

- El área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual a $|\vec{u} \times \vec{v}|$.
- Calculamos $\vec{u} \times \vec{v}$ y hallamos su módulo: $\vec{u} \times \vec{v} = (2,\ 0,\ 1) \times (0,\ m,\ 1) = (-m,\ -2,\ 2m)$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-m)^2 + (-2)^2 + (2m)^2} = \sqrt{m^2 + 4 + 4m^2} = \sqrt{5m^2 + 4}$$

Igualamos a 2: $\quad$ Área $= \sqrt{5m^2 + 4} = 2 \ \rightarrow \ 5m^2 + 4 = 4 \ \rightarrow \ 5m^2 = 0 \ \rightarrow \ m = 0$

EJERCICIO 14 :

a) Halla un vector unitario que sea perpendicular a (3, -1, 1) y a (1,-2,0)
b) ¿Es cierto que $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$? Pon un ejemplo.

Solución:

a) Un vector perpendicular a los dos dados es: (3,-1, 1) x (1, -2, 0) = (2, 1, -5)

Dividiendo por su módulo, tendrá módulo 1: $\left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}\right)$

También cumple las condiciones su opuesto: $\left(\frac{-2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$

b) En general, no es cierto. Por ejemplo: $\vec{u}=(1,\ 0,\ 0)$ $\quad\vec{v}=(1,\ 0,\ 0)$ $\quad\vec{w}=(0,\ 1,\ 0)$

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=\vec{0}\times\vec{w}=\vec{0}\\ \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{u}\times(0,\ 0,\ 1)=(1,\ 0,\ 0)\times(0,\ 0,\ 1)=(0,\ -1,\ 0)\end{array}\right\}\text{ Por tanto, } (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}\neq\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}).$$

EJERCICIO 15 : **Halla el área de un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ x $\vec{v}$ y $\vec{u}$ x $\vec{w}$, siendo: $\vec{u}(2,-1,1)$, $\vec{v}(0,1,-1)$ y $\vec{w}(1,0,1)$**

Solución:

- Calculamos $\vec{u}\times\vec{v}$ y $\vec{u}\times\vec{w}$: $\quad\vec{a}=\vec{u}\times\vec{v}=(0,\ 2,\ 2)$ $\quad\vec{b}=\vec{u}\times\vec{w}=(-1,\ -1,\ 1)$

El área del paralelogramo determinado por a y b es igual al módulo del producto vectorial:

$\vec{a}\times\vec{b}=(0,\ 2,\ 2)\times(-1,\ -1,\ 1)=(4,\ -2,\ 2)$

$\text{Área}=\sqrt{4^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{16+4+4}=\sqrt{24}\approx 4{,}90\ u^2$

PRODUCTO MIXTO

EJERCICIO 16 :

a) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}$ (2,-1,1), $\vec{v}$ (3,0.-2), $\vec{w}$ (2,-3,0)
b) ¿Cuánto valen cada uno de los siguientes productos mixtos?: $[2\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]$; $\quad[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{u}+\vec{v}]$

Solución:

a) El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al valor absoluto de su producto mixto: $[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ 2 & -3 & 0\end{vmatrix}=-17 \quad\rightarrow\quad \text{Volumen}=17\ u^3$

b) Utilizando las propiedades de los determinantes, tenemos que: $[2\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]=2[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]=2\cdot(-17)=-34$

$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{u}+\vec{v}]=0$ (el tercer vector depende linealmente de los dos primeros).

EJERCICIO 17 :

a) Halla los valores de m para que los vectores $\vec{u}$ (0,1,1), $\vec{v}$ (-2,0,1) y $\vec{w}$ (m,m-1,1) sean linealmente independientes.
b) Estudia si el vector $(2, 1, 0)$ depende linealmente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $m=3$.

Solución:

a) Para que sean linealmente independientes, su producto mixto debe ser distinto de cero:

$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ m & m-1 & 1\end{vmatrix}=4-m=0 \quad\rightarrow\quad m=4 \quad\Rightarrow$ Ha de ser $m\neq 4$.

b) Para $m=3$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, y forman una base de $\mathbf{R}^3$.

Por tanto, cualquier vector de $\mathbf{R}^3$, en particular (2, 1, 0), depende linealmente de ellos.

<u>EJERCICIO 18</u> : Dados los vectores $\vec{u}$ (1,2,3), $\vec{v}$ (1,1,1) y $\vec{w}$ (1,λ,5), halla el valor de λ para que:
a) determinen un paralelepípedo de volumen 10. **b) sean linealmente dependientes.**

Solución:

a) El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al valor absoluto de su producto mixto: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 5 \end{vmatrix} = 2\lambda - 6$

Volumen $= |2\lambda - 6| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda - 6 = 10 & \rightarrow \quad 2\lambda = 16 \quad \rightarrow \quad \lambda = 8 \\ 2\lambda - 6 = -10 & \rightarrow \quad 2\lambda = -4 \quad \rightarrow \quad \lambda = -2 \end{cases}$

Hay dos soluciones : $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$

b) Su producto mixto ha de ser cero: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2\lambda - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 3$

<u>EJERCICIO 19</u> : Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$, $\vec{v}(0, 2, -1)$ y $\vec{w}(2, -2, 1)$, se pide:
a) El volumen del paralelepípedo determinado por ellos.
b) Halla, si existe, el valor de α para que el vector $\vec{a}(\alpha, \alpha, -6)$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución:

a) Es igual al valor absoluto de su producto mixto: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad \rightarrow \quad \text{Volumen} = 4 \text{ u}^3$

b) Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$ han de ser linealmente dependientes ($\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes); por tanto, su producto mixto ha de ser cero: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{vmatrix} = 3\alpha - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 4$

<u>EJERCICIO 20</u> :
a) Demuestra que los vectores $\vec{u}(k, -3, 2)$, $\vec{v}(k, 3, 2)$ y $\vec{w}(1, 0, 0)$ son linealmente independientes, cualquiera que sea el valor de *k*.
b) ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

Solución:

a) Tenemos que probar que su producto mixto es distinto de cero, sea cual sea el valor de *k*.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} k & -3 & 2 \\ k & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \text{ para todo } k.$$

b) El volumen es igual al valor absoluto de su producto mixto. Por tanto: *Volumen* = 12 u^3

REPASO

<u>EJERCICIO 21</u> : Dados los vectores $\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(3, -1, 0)$ y $\vec{w}(m, 2, -m)$:
a) Halla el valor de *m* para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares.
b) Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **c) Halla el área del triángulo que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

Solución:

a) Para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero :

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (2, -1, 1) \cdot (m, 2, -m) = 2m - 2 - m = m - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad m = 2$

b) Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenemos que:

$\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{7}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{7}{\sqrt{60}} \approx 0{,}904 \quad \rightarrow \quad \alpha = 25^o\ 21'\ 6''$

c) $\text{Área} = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}| = \frac{1}{2}|(1, 3, 1)| = \frac{1}{2}\sqrt{1+9+1} = \frac{1}{2}\sqrt{11} \approx 1{,}66 \text{ u}^2$

<u>EJERCICIO 22</u> : Consideramos los vectores $\vec{a}(1, 1, 2)$, $\vec{b}(0, -2, 1)$ y $\vec{c}(3, 2, 1)$. Calcula:

a) El área del triángulo que determinan $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

b) El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Solución:

a) $\text{Área} = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{1}{2}|(1, 1, 2)\times(0, -2, 1)| = \frac{1}{2}|(5, -1, -2)| = \frac{1}{2}\sqrt{25+1+4} = = \frac{1}{2}\sqrt{30} \approx 2{,}74 \text{ u}^2$

b) El volumen es igual al valor absoluto del producto mixto de los tres vectores:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 11 \rightarrow \text{Volumen} = 11 \text{ u}^3$$

<u>EJERCICIO 23</u> : Dados los vectores $\vec{u}(-1, 1, 1)$, $\vec{v}(2, 0, -3)$ y $\vec{w}(k, 1, k)$:

a) Halla el valor de *k* para que el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ valga $11u^3$.

b) Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución:

a) El volumen del paralelepípedo es igual al valor absoluto del producto mixto de los tres vectores:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ k & 1 & k \end{vmatrix} = -5k - 1 \Rightarrow \text{Volumen} = |-5k-1| = 11 \rightarrow \begin{cases} -5k - 1 = 11 \rightarrow k = \frac{-12}{5} \\ -5k - 1 = -11 \rightarrow k = 2 \end{cases}$$

b) Si llamamos α al ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenemos que:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|-5|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{39}} \approx 0{,}80 \rightarrow \alpha = 36^\circ\ 48'\ 31''$$

<u>EJERCICIO 24</u> : Dados los puntos *A*(-2,0,1), *B* (1,-3,2), *C* (-1, 4, 5) y *D* (3, 1, -2), calcula:
a) El área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C*.
b) El volumen del tetraedro de vértices *A*, *B*, *C* y *D*.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}(3, -3, 1)$; $\overrightarrow{AC}(1, 4, 4)$

$\text{Área} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|(-16, -11, 15)| = \frac{1}{2}\sqrt{(-16)^2+(-11)^2+15^2} = = \frac{1}{2}\sqrt{602} = 12{,}27 \text{ u}^2$

b) $\overrightarrow{AB}(3, -3, 1)$; $\overrightarrow{AC}(1, 4, 4)$; $\overrightarrow{AD}(5, 1, -3)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -136 \rightarrow \text{Volumen} = 136 \text{ u}^3$$

<u>EJERCICIO 25</u> : Sean los puntos *A* (2, -1, 3), *B*(-1,5,m), *C* (*m*, 2, -2) y *D* (0, 1,-3). Calcula el valor de *m*, sabiendo que el paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ tiene un volumen de 40 u^3.

Solución:

$\overrightarrow{AB}(-3, 6, m-3)$; $\overrightarrow{AC}(m-2, 3, -5)$; $\overrightarrow{AD}(-2, 2, -6)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -3 & 6 & m-3 \\ m-2 & 3 & -5 \\ -2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = [54 + 2(m-2)(m-3) + 60] - [-6(m-3) + 30 - 36(m-2)] = 2m^2 + 32m + 6$$

Volumen: V = $|2m^2 + 32m + 6| = 40$. Dos posibilidades:

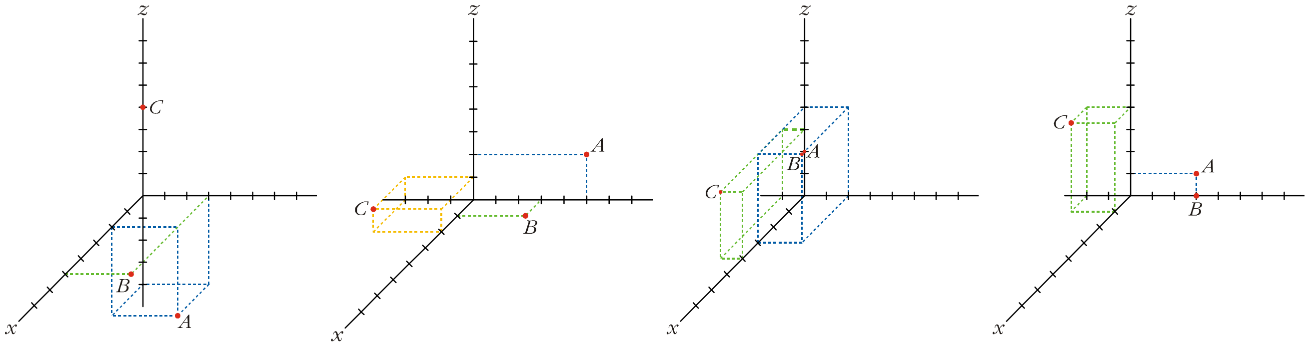
- $2m^2 + 32m + 6 = 40 \;\Rightarrow\; 2m^2 + 32m - 34 = 0 \;\Rightarrow\; m^2 + 16m - 17 = 0$
  $m = \dfrac{-16 \pm \sqrt{256+68}}{2} = \dfrac{-16 \pm \sqrt{324}}{2} = \dfrac{-16 \pm 18}{2} \begin{cases} m = 1 \\ m = -17 \end{cases}$
- $2m^2 + 32m + 6 = -40 \;\Rightarrow\; 2m^2 + 32m + 46 = 0 \;\Rightarrow\; m^2 + 16m + 23 = 0$
  $\mathrm{m} = \dfrac{-16 \pm \sqrt{256-92}}{2} = \dfrac{-16 \pm \sqrt{164}}{2} = \dfrac{-16 \pm 2\sqrt{41}}{2} = -8 \pm \sqrt{41}$

Hay cuatro soluciones: $m_1 = -17$; $m_2 = 1$; $m_3 = -8 + \sqrt{41}$; $m_4 = -8 - \sqrt{41}$

REPRESENTAR PUNTOS EN EL ESPACIO

<u>EJERCICIO 26</u> : Representa los puntos siguientes:
a) *A*(2, 3, -4), *B*(5, 3, 0) y *C*(0, 0, 4) **b) *A*(0, 5, 2), *B*(1, 3, 0) y *C*(2, -3, 1)**
c) *A*(0, 0, 2), *B*(3, 2, 4) y *C*(4, -1, 3) **d) *A*(0, 3, 1), *B*(0, 3, 0) y *C*(1, -2, 4)**

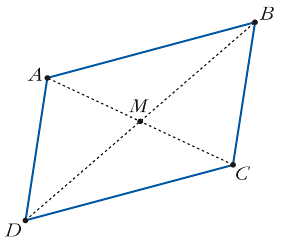
Solución:



APLICACIONES DE LOS VECTORES

<u>EJERCICIO 27</u> : Los puntos *A*(3, 0, 2), *B*(5, -1, 1) y *C*(-2, 3, 1) son vértices consecutivos de un paralelogramo. Obtén el cuarto vértice y el centro del paralelogramo.

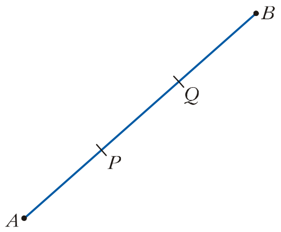
Solución:



Como se trata de un paralelogramo, se tiene que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Si $D = (x,\ y,\ z)$:
(2,-1,-1)=(-2-*x*,3-*y*,1-*z*) de donde: x = -4, y = 4, z = 2 $\Rightarrow$ *D*(-4, 4, 2)
El centro del paralelogramo es el punto medio de una de las dos diagonales, así:
$\mathrm{M} = \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

<u>EJERCICIO 28</u> : Halla las coordenadas de los puntos *P* y *Q* que dividen al segmento de extremos *A*(3,-1, 2) y *B*(-2, 2, 4) en tres partes iguales.

Solución:

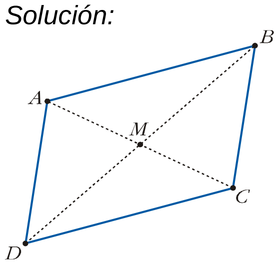


AB = 3AP $\Rightarrow$ (-1,3,2) = 3(x-3, y+1, z-2) $\Rightarrow$ P(x,y,z) = $\left(\dfrac{8}{3}, 0, \dfrac{8}{3}\right)$

Q = Pto_medio PB = $\left(\dfrac{\frac{8}{3}-2}{2}, \dfrac{0+2}{2}, \dfrac{\frac{8}{3}+4}{2}\right) = \left(\dfrac{2}{3}, 1, \dfrac{10}{3}\right)$

EJERCICIO 29 : **Dos de los vértices de un paralelogramo son los puntos *A*(3, 0, -1) y *B*(2,-2, 3). El centro del paralelogramo está en el punto *M*(1, 2, -1). Halla los otros dos vértices.**

Solución:



Llamemos $C = (x_1, y_1, z_1)$ y $D = (x_2, y_2, z_2)$.

C es el simétrico de *A* respecto de *M*, por tanto: $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3+x_1}{2}=1 \quad \rightarrow \quad x_1=-1 \\ \dfrac{0+y_1}{2}=2 \quad \rightarrow \quad y_1=4 \\ \dfrac{-1+z_1}{2}=-1 \quad \rightarrow \quad z_1=-1 \end{array}\right\} C=(-1,\ 4,\ -1)$$

D es el simétrico de *B* respecto de *M*. Así: $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2+x_2}{2}=1 \quad \rightarrow \quad x_2=0 \\ \dfrac{-2+y_2}{2}=2 \quad \rightarrow \quad y_2=6 \\ \dfrac{3+z_2}{2}=-1 \quad \rightarrow \quad z_2=-5 \end{array}\right\} D=(0,\ 6,\ -5)$$

EJERCICIO 30 : **Calcula el valor de *a* para el cual los siguientes puntos están alineados: *A*(2, a, 0), *B*(6, 5, 2), *C*(8, 7, 3)**

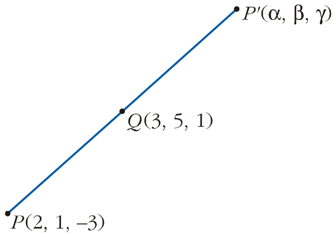
Solución:

Los puntos *A*, *B* y *C* están alineados siempre que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ tengan la misma dirección. Esto ocurre cuando sus coordenadas son proporcionales:

$$\frac{6-2}{8-6}=\frac{5-a}{7-5}=\frac{2-0}{3-2} \Rightarrow \frac{5-a}{2}=2 \quad \rightarrow \quad 5-a=4 \quad \rightarrow \quad a=1$$

EJERCICIO 31 : **Halla el simétrico, *P* ', del punto *P*(2, 1,-3) respecto de *Q*(3, 5, 1).**

Solución:



Llamamos *P* '(α,β,γ),de manera que: $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2+\alpha}{2}=3 \quad \rightarrow \quad \alpha=4 \\ \dfrac{1+\beta}{2}=5 \quad \rightarrow \quad \beta=9 \\ \dfrac{-3+\gamma}{2}=1 \quad \rightarrow \quad \gamma=5 \end{array}\right\} P'(4,\ 9,\ 5)$$