I. E. S. ATENEA. SAN SEBASTIÁN DE LOS REYES
EXAMEN. PRIMERA EVALUACIÓN. ANÁLISIS.

Curso 2009-2010

**MATERIA**: MATEMÁTICAS II

22-I-2010

**INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN**

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
**Calificación total máxima**: 10 puntos
**Tiempo**: Hora y media.

## OPCIÓN **A**

***Ejercicio 1***.- **Calificación máxima**: 3 puntos
Dada la función:

$$f(x)=x^3-x,$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1,f(-1))$.
b) (1 punto). Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f.
c) (1 punto). Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado a).

***Ejercicio 2***.- **Calificación máxima**: 3 puntos
Si la derivada de la función $f(x)$ es $f'(x)=(x-1)^3\cdot(x+5)$ obtener:

a) (1 punto). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
b) (1 punto). Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos o puntos de inflexión.
c) (1 punto). La función f sabiendo que $f(0)=0$.

***Ejercicio 3***.- **Calificación máxima**: 2 puntos

Estudiar el siguiente límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)}$ según los valores del parámetro $\alpha$.

***Ejercicio 4***.-. **Calificación máxima**: 2 puntos

Dibujar la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

## OPCIÓN **B**

***Ejercicio 1***.- **Calificación máxima**: 3 puntos
Se considera la función

$$f(x) = \ln(1+x^2)$$

donde ln significa Logaritmo Neperiano.

a) (1 punto). Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los intervalos de concavidad y convexidad.
b) (1 punto). Dibujar la gráfica de f.
c) (1 punto). Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes en sus puntos de inflexión.

***Ejercicio 2***.- **Calificación máxima**: 2 puntos
Calcular la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{x^2+4}{x^2-5x+6}\,dx.$$

***Ejercicio 3***.- **Calificación máxima**: 2 puntos

a) (1 punto). Dibujar la gráfica de la función $\frac{2x}{x+1}$, calculando su dominio, sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus asíntotas.
b) (1 punto). Calcular $\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \left(f(x+1)-f(x)\right)$.

***Ejercicio 4***.- **Calificación máxima**: 3 puntos
Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2+b & \text{si } |x|<2 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x|\geq 2 \end{cases}$. Se pide:

a) (1,5 puntos). Calcular a y b para que f sea continua y derivable en todo IR.
b) (1,5 puntos). Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas $x=1$ y $x=3$.

# SOLUCIONES

## OPCIÓN A,

### *Ejercicio A.1*

Dada la función $f(x) = x^3 - x$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, f(-1))$.

b) (1 punto). Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f.

c) (1 punto). Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado a).

---

a) ***Recta tangente en el punto*** $(-1, f(-1))$.

La ecuación de la recta tangente es de la forma:

$$r_t \equiv y - y_0 = m \cdot (x - x_0), \text{ donde } m = f'(x_0).$$

La segunda coordenada del punto: $y_0 = f(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$

Calculamos la pendiente que coincide con el valor de la derivada en $x = -1$:

$$m = f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow m = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 1 = 2.$$

La recta tangente tendrá por ecuación: $r_t \equiv y - 0 = 2 \cdot (x+1) \Rightarrow r_t \equiv y = 2x + 2$. **(1 punto)**

b) ***Puntos de intersección entre la recta tangente $r_t$ y la gráfica de la función f.***

Son las soluciones del sistema de formado por las ecuaciones de $r_t$ y de f:

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = 2x + 2 \end{cases} \overset{\text{Igualación}}{\Longrightarrow} x^3 - x = 2x + 2 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \overset{\text{Regla de Ruffini}}{\Longrightarrow} (x+1)^2 \cdot (x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Calculamos sus segundas coordenadas:

- Si $x = -1 \Rightarrow y = 2 \cdot (-1) + 2 = 0$.
- Si $x = 2 \Rightarrow y = 2 \cdot 2 + 2 = 6$.

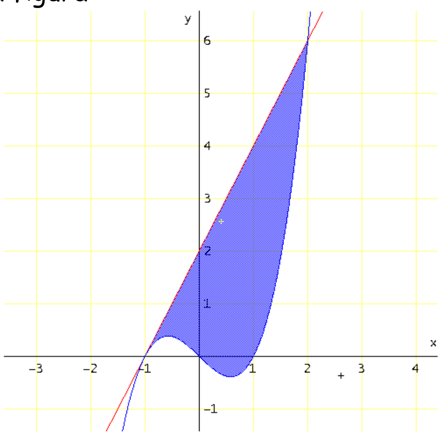
Por lo tanto, los puntos de intersección son: $P_1(-1, 0)$ y $P_2(2, 6)$. **(1 punto)**

c) ***Área de la región acotada.***

$$A = \int_{-1}^{2} \left[ (2x+2) - (x^3 - x) \right] dx = \int_{-1}^{2} (3x + 2 - x^3)\, dx = \left[ \frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{2} =$$

$$= (6 - 4 + 4) - \left( \frac{3}{2} - 2 - \frac{1}{4} \right) = (6) - \left( -\frac{3}{4} \right) = 6 + \frac{3}{4} = \frac{27}{4}\, u^2 = 6{,}75\, u^2.$$ **(1 punto)**

La región acotada es la de la figura:



## Ejercicio A.2

Si la derivada de la función $f(x)$ es $f'(x)=(x-1)^3\cdot(x+5)$ obtener:

a) (1 punto). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) (1 punto). Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos o puntos de inflexión.

c) (1 punto). La función f sabiendo que $f(0)=0$.

---

a) ***Intervalos de crecimiento y decrecimiento.***

Esta información nos la ofrece el signo de la derivada. Calculamos, en primer lugar, los valores que la anulan:

$f'(x)=0\Rightarrow(x-1)^3\cdot(x+5)\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-5\end{cases}$. Los representamos en la recta real $\mathbb{R}$ y analizamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos en que se divide la recta:

| $f'$ | + | **Máx** | - | **Mín** | + |
|---|---|---|---|---|---|
| f | ↗ | -5 | ↘ | 1 | ↗ |

$$f'(-10)=-\cdot-=+;\quad f'(0)=-\cdot+=-;\quad f'(10)=+\cdot+=+$$

Por lo tanto:

f es CRECIENTE si $x\in(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$ y f es DECRECIENTE si $x\in(-5,1)$. **(1 punto)**

b) ***Máximos y mínimos relativos.***

Según el estudio realizado en el apartado anterior, f tiene un MÁXIMO RELATIVO en $x=-5$ y un MÍNIMO RELATIVO en $x=1$. **(0,5 puntos)**

***Puntos de inflexión.***

Esta información nos la ofrece la segunda derivada:

$f''(x)=3\cdot(x-1)^2\cdot(x+5)+(x-1)^3=(x-1)^2\cdot\left[3\cdot(x+5)+(x-1)\right]=(x-1)^2\cdot(4x+14)=$

$=2\cdot(x-1)^2\cdot(2x+7)$

$f''(x)=0\Rightarrow x=1\,,\,x=-\dfrac{7}{2}$.

En $x=1$ no puede haber un punto de inflexión pues ya hemos visto que se trata de un máximo relativo.

Comprobemos si en $x=-\dfrac{7}{2}$ lo hay:

| $f''$ | - | **Punto de Inflexión** | + |
|---|---|---|---|
| f | $\cap$ | $-\dfrac{7}{2}$ | $\cup$ |

$$f''(-10)=+\cdot-=-;\quad f''(0)=+\cdot+=+$$

Al haber cambio de curvatura de convexa a cóncava, se deduce que la función tiene un punto de inflexión en $x=-\dfrac{7}{2}$. **(0,5 puntos)**

c) ***Cálculo de la función.***

Calculamos la expresión polinómica de $f'(x)$ y luego integramos:

$f'(x)=(x-1)^3(x+5)=(x^2-2x+1)(x-1)(x+5)=(x^3-2x^2+x-x^2+2x-1)(x+5)=$

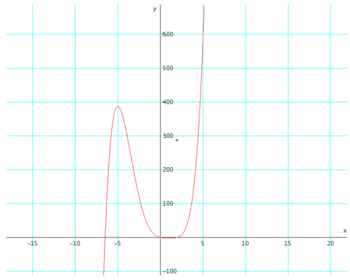
$=(x^3-3x^2+3x-1)(x+5)=x^4-3x^3+3x^2-x+5x^3-15x^2+15x-5=$

$=x^4+2x^3-12x^2+14x-5$.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5)\,dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - 4x^3 + 7x^2 - 5x + k$$

Como $f(0) = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^4}{2} - 4x^3 + 7x^2 - 5x$. **(1 punto)**

Esta es la gráfica de f:



## *Ejercicio A.3*

Estudiar el siguiente límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)}$ según los valores del parámetro $\alpha$.

---

Es una indeterminación del tipo $1^\infty$. Para resolverlo, lo más sencillo es aplicar la propiedad:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}-1\right)(x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}\right)} = \begin{cases} e^0 = 1 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ e^{\frac{1}{4}} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

**(2 puntos)**

## *Ejercicio A.4*

Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{2-x}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

---

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x} = \begin{cases} \dfrac{-x}{2-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{x}{2-x} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

***Dominio de definición.***

Dom $f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 - x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$. **(0,25 puntos)**

***Crecimiento y decrecimiento.***

Debemos estudiar el signo de la derivada:

$$\# \quad \left(\frac{x}{2-x}\right)' = \frac{1\cdot(2-x) - x\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} \quad \#$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{(2-x)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{2}{(2-x)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ es decreciente } \forall x < 0 \\ f \text{ es creciente } \forall x > 0 \end{cases}.$$ **(0,5 puntos)**

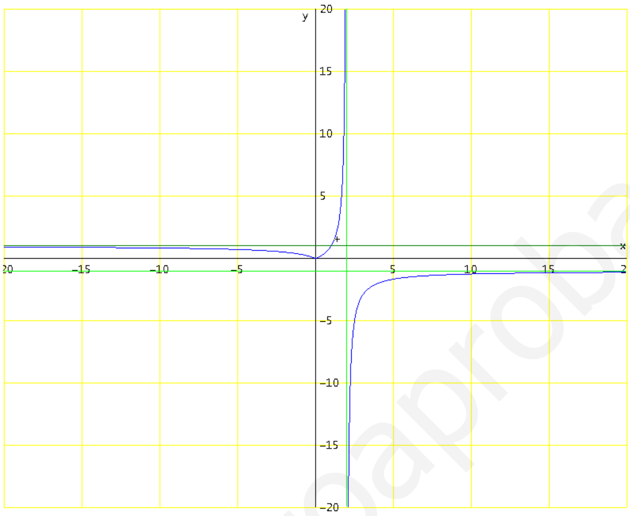
***Asíntotas.***

- Verticales: $x = 2$.
- Horizontales: $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.
  - $y = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2-x} = -1 \to$ rama asintótica por la derecha.
  - $y = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{2-x} = 1 \to$ rama asintótica por la izquierda.
- Oblicuas: No puede tener pues tiene asíntotas horizontales. **(0,5 puntos)**

***Gráfica.***

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1/2 |
| 3 | -3 |
| 4 | -2 |

**(0,75 puntos)**





## SOLUCIONES

## OPCIÓN B,

### *Ejercicio B.1*

Se considera la función

$$f(x) = \ln(1+x^2)$$

donde ln significa Logaritmo Neperiano.

a) (1 punto). Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los intervalos de concavidad y convexidad.

b) (1 punto). Dibujar la gráfica de f.

c) (1 punto). Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes en sus puntos de inflexión.

---

a) ***Intervalos de crecimiento y decrecimiento.***

Debemos estudiar el signo de la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 & \forall x < 0 \\ f'(x) > 0 & \forall x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ es decreciente} & \forall x < 0 \\ f(x) \text{ es creciente} & \forall x > 0 \end{cases}$$ **(0,5 puntos)**

***Intervalos de concavidad y convexidad.***

Esta información nos la ofrece el signo de la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{2\cdot(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Analizamos cuando se anula:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en la recta real IR:

| $f''$ | - | **Pto. Infl.** | + | **Pto. Infl.** | - |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $\cap$ | -1 | $\cup$ | 1 | $\cap$ |

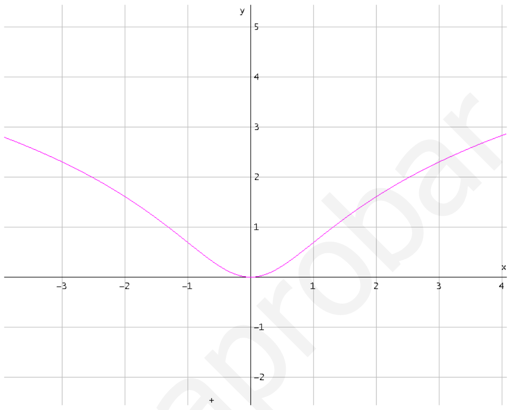
$$f''(-10) = \frac{-}{+} = -;\ f''(0) = \frac{+}{+} = +;\ f''(10) = \frac{-}{+} = -$$

Por lo tanto,

- f es cóncava $\forall x \in (-1,1)$
- f es convexa $\forall x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. **(0,5 puntos)**

b) ***Gráfica de la función f.***

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -1 | ln 2 |
| 1 | ln 2 |



**(1 punto)**

c) ***Puntos de inflexión.***

Según lo estudiado en el primer apartado del ejercicio, los puntos de inflexión son: $(-1,\ln 2)$ y $(1,\ln 2)$.

***Recta tangente en*** $(-1,\ln 2)$.

$$m = f'(-1) = \frac{2\cdot(-1)}{1+(-1)^2} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow r_t \equiv y - \ln 2 = -(x+1).$$ **(0,5 puntos)**

***Recta tangente en*** $(1,\ln 2)$.

$$m = f'(1) = \frac{2\cdot 1}{1+1^2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow r_t \equiv y - \ln 2 = x + 1.$$ **(0,5 puntos)**

## Ejercicio B.2

Calcular la siguiente integral indefinida $\int \frac{x^2+4}{x^2-5x+6}\,dx$.

---

Al tratarse de una función racional con el mismo grado en el numerador que en el denominador, es necesario hacer la división y expresar la función como:

$$\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

Entonces queda:

$$\int \frac{x^2+4}{x^2-5x+6}\,dx = \int\left(1 + \frac{5x-2}{x^2-5x+6}\right)dx = \int 1\,dx + \underbrace{\int \frac{5x-2}{x^2-5x+6}\,dx}_{\mathrm{I}} =$$

$$= x - 8\cdot\ln\left|x-2\right| + 13\cdot\ln\left|x-3\right| + k.$$

Calculamos la integral I para comprobar que, efectivamente, es éste el resultado:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{5x-2}{x^2-5x+6}\,dx = \int\left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}\right)dx = \int\left(\frac{A(x-3)}{(x-2)(x-3)} + \frac{B(x-2)}{(x-3)(x-2)}\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x - 2 = A(x-3) + B(x-2) \Rightarrow \begin{cases} \text{Para } x = 3 \quad \text{obtenemos} \quad B = 13 \\ \text{Para } x = 2 \quad \text{obtenemos} \quad A = -8 \end{cases}. \text{ Luego:}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{5x-2}{x^2-5x+6}\,dx = \int\left(\frac{-8}{x-2} + \frac{13}{x-3}\right)dx = -8 \cdot \ln|x-2| + 13 \cdot \ln|x-3| + k.$$ **(2 puntos)**

## Ejercicio B.3

a) (1 punto). Dibujar la gráfica de la función $\frac{2x}{x+1}$, calculando su dominio, sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus asíntotas.

b) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \cdot \left(f(x+1) - f(x)\right)$.

---

a) ***Dominio de definición.***

$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$. **(0,25 puntos)**

***Crecimiento y decrecimiento.***

Debemos estudiar el signo de la derivada:

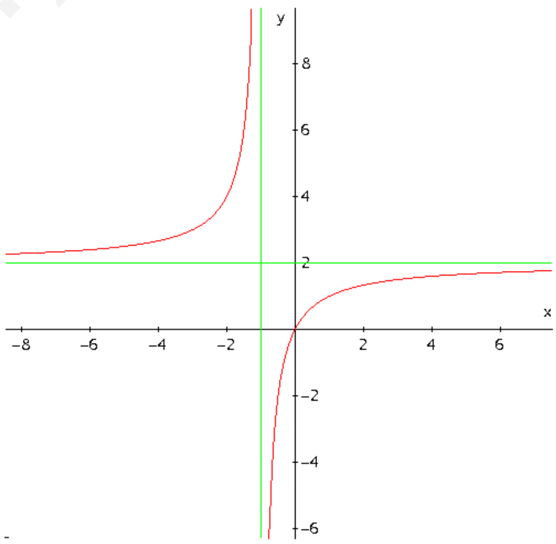
$$f'(x) = \frac{2\cdot(x+1) - 2x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f es siempre creciente. **(0,25 puntos)**

***Asíntotas.***

- Verticales: $x = -1$.
- Horizontales: $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x+1} = 2$.
- Oblicuas: No puede tener pues tiene asíntota horizontal. **(0,25 puntos)**

***Gráfica.***



b) ***Cálculo del límite.***

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\left(f(x+1)-f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\left(\frac{2(x+1)}{(x+1)+1}-\frac{2x}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\left(\frac{2x+2}{x+2}-\frac{2x}{x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\left(\frac{(2x+2)(x+1)-2x(x+2)}{(x+2)(x+1)}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\left(\frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x}{x^2+3x+2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+3x+2}=2.$$ **(1 punto)**

## Ejercicio B.4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si } |x|<2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } |x|\geq 2\end{cases}$. Se pide:

a) (1,5 puntos). Calcular a y b para que f sea continua y derivable en todo IR.

b) (1,5 puntos). Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas $x=1$ y $x=3$.

---

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si } |x|<2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } |x|\geq 2\end{cases}=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\leq -2 \\ ax^2+b & \text{si } -2\leq x\leq 2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\geq 2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2}{x^3} & \text{si } x<-2 \\ 2ax & \text{si } -2<x<2 \\ \dfrac{-2}{x^3} & \text{si } x>2\end{cases}$$

a) ***Continuidad.***

- $x=-2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{4}\\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}(ax^2+b)=4a+b\end{array}\right\}\Rightarrow 4a+b=\frac{1}{4}\Rightarrow 16a+4b=1^{\,(*)}$$

- $x=2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2}(ax^2+b)=4a+b\\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow 4a+b=\frac{1}{4}\Rightarrow 16a+4b=1$$

***Derivabilidad.***

- $x=-2$:

$$\left.\begin{array}{l}f'(-2^-)=\dfrac{1}{4}\\ f'(-2^+)=-4a\end{array}\right\}\Rightarrow -4a=\frac{1}{4}\Rightarrow a=-\frac{1}{16}$$

- $x=2$

$$\left.\begin{array}{l}f'(2^-)=4a\\ f'(2^+)=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow 4a=-\frac{1}{4}\Rightarrow a=-\frac{1}{16}$$

$^{(*)}\ 16a+4b=1 \Rightarrow 16\cdot\left(-\dfrac{1}{16}\right)+4b=1 \Rightarrow 4b=2 \Rightarrow b=\dfrac{1}{2}$.

Por lo tanto la función es continua y derivable en todo IR cuando $a=-\dfrac{1}{16}$ y $b=\dfrac{1}{2}$.

**(1,5 puntos)**

b) ***Área de la región acotada.***

$$A=\int_1^3 f(x)\,dx=\underbrace{\int_1^2\left(\frac{-x^2}{16}+\frac{1}{2}\right)dx}_{I_1}+\underbrace{\int_2^3\frac{1}{x^2}\,dx}_{I_2}\overset{(*)}{=}\frac{17}{48}+\frac{1}{6}=\frac{25}{48}\,u^2.$$ **(1,5 puntos)**

$$(*)\begin{cases} I_1=\left[-\dfrac{x^3}{48}+\dfrac{x}{2}\right]_1^2=\left(-\dfrac{1}{6}+1\right)-\left(-\dfrac{1}{48}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{17}{48} \\ I_2=\left[-\dfrac{1}{x}\right]_2^3=\left(-\dfrac{1}{3}\right)-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Gráficamente, esta es la superficie estudiada: