

Ejercicios de integrales 2008:

1.2A Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Dadas las funciones $f: [0;+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [0;+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Solución: $\frac{1}{12} u^2$

1.2B Ejercicio 2.- Sea $g: (0;+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = \ln x$ (\ln denota logaritmo neperiano).

(a) [0'75 puntos] Justifica que la recta de ecuación $y = \frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa $x = e$.

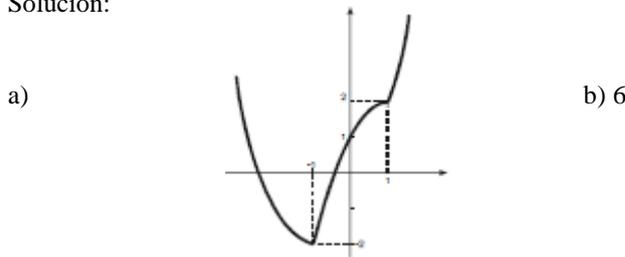
(b) [1'75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g , el eje de abscisas y la recta tangente del apartado anterior.

Solución: b) $\frac{e}{2} - 1$ unidades de área.

2.2A Dada la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2x + |x^2 - 1|$

(a) [1 punto] Esboza la gráfica de g . (b) [1,5 puntos] Calcula $\int_0^2 g(x) dx$

Solución:



2.2B Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = 2x + 2$$

(a) [0,5 puntos] Esboza las gráficas de f y g .

(b) [2 puntos] Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

Solución:



3.2A [2,5 puntos] Calcula $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x^2 - x)(x - 1)}$ Solución: $\ln 3 - 2\ln 2 + \frac{1}{6}$

3.2B Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{-2x}$

(a) [1 punto] Justifica que la recta de ecuación $y = -2ex$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa

$$x = -\frac{1}{2}$$

(b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.

Solución: a) En efecto b) $\frac{e-2}{4} u^2$

4.2A Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = x^3 - 4x \quad \text{y} \quad g(x) = 3x - 6$$

(a) [0,75 puntos] Determina los puntos de corte de las gráficas de f y g .

(b) [1,75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

Solución: a) (1, - 3), (2, 0) y (- 3, - 15) b) $\frac{131}{4} u^2$

4.2B [2,5 puntos] Calcula: $\int_0^1 x \ln(x+1) dx$ (\ln denota la función logaritmo neperiano)

Solución: $\frac{1}{4}$

5.2A [2,5 puntos] Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = a \quad (\text{con } a > 0)$$

Se sabe que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones f y g es $4/3$. Calcula el valor de la constante a .

Solución: $a = 1$

5.2B [2,5 puntos] Calcula

$$\int_1^e x^2 \ln(x) dx \quad (\ln \text{ denota la función logaritmo neperiano})$$

Solución: $\frac{1 + 2e^3}{9}$

6.2A Considera las funciones $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{\text{sen}x}{\cos^3 x} \quad \text{y} \quad g(x) = x^3 \ln x \quad (\ln \text{ denota la función logaritmo neperiano})$$

(a) [1,25 puntos] Halla la primitiva de f que toma el valor 1 cuando $x = \frac{\pi}{3}$ (se puede hacer el cambio de variable $t = \cos x$)

(b) [1,25 puntos] Calcula $\int g(x) dx$.

Solución: a) $\frac{1}{2 \cos^2 x} - 1$ b) $\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$

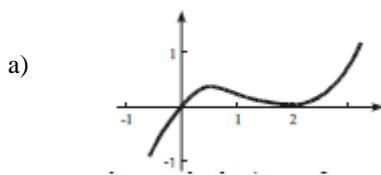
6.2B Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

(a) (0,5 puntos) Esboza la gráfica de g .

(b) (0,75 puntos) Determina la ecuación de la recta tangente de g en el punto de abscisa $x = 2$.

(c) (1,25 puntos) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g y el eje de abscisas

Solución:



b) $y = 0$

c) $\frac{1}{3} u^2$

Ejercicios de integrales 2009

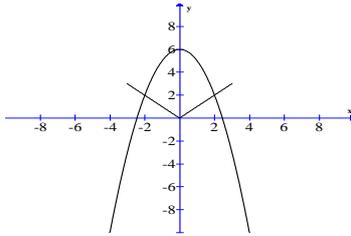
1.2A Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$, $g(x) = 6 - x^2$.

(a) (1 punto) Esboza el recinto limitado por sus gráficas.

(b) (1,5 puntos) Calcula el área de dicho recinto.

Solución: a)

b) $A = 22/3 u^2$



1.2B La recta tangente a la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = mx^2 + nx - 3$, en el punto $(1, -6)$, es paralela a la recta de ecuación $y = -x$.

(a) (1,25 puntos) Determina las constantes m y n . Halla la ecuación de dicha tangente.

(b) (1,25 puntos) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, la recta tangente anterior y el eje de ordenadas.

Solución: a) $m = 2$ $n = -5$ b) $A = 2/3 \text{ u}^2$

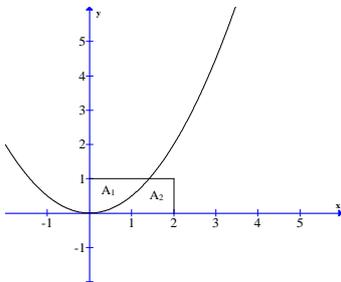
2.2A La curva $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (2, 1)$ y $D = (0, 1)$ en dos recintos.

(a) (0,75 puntos) Dibuja dichos recintos.

(b) (1,75 puntos) Halla el área de cada uno de ellos

Solución: a)

$$b) A_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad A_2 = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



2.2B (2,5 puntos) Sea f la función definida por: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}$

Halla la primitiva F de f que cumple $F(0) = 3$. (Sugerencias: utiliza el cambio de variable $t = \frac{3}{2}x^2$)

Solución: $F(x) = F(x) = \frac{1}{6} \arcsen\left(\frac{3}{2}x^2\right) + 3$

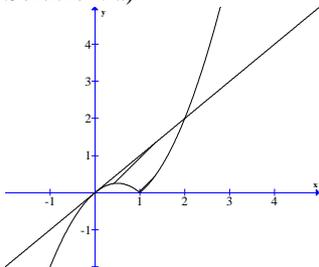
3.2A (Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x|x-1|$.)

(a) (0,5 puntos) Esboza la gráfica de f .

(b) (0,75 puntos) Comprueba que la recta de ecuación $y = x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisas $x = 0$.

(c) (1,25 puntos) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la de dicha tangente.

Solución: a)



b) $y = f'(0)(x-0) + f(0) \quad y = x$ c) $A = 2/3 \text{ u}^2$

3.2B Considera la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$

(a) (0,5 puntos) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisas $x = -1$

(b) (2 puntos) Calcula el área del recinto limitado por la curva dada y la recta $y = 2$.

Solución:

a) $y = 2$ b) $A = 27/4 \text{ u}^2$

4.2A Sea $f: [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 1 + \ln(x)$, siendo \ln la función logaritmo neperiano.

(a) (1 punto) Comprueba que la recta de ecuación $y = 1 + \frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa

$x = e$

(b) (1,5 puntos) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta tangente del apartado. Solución:

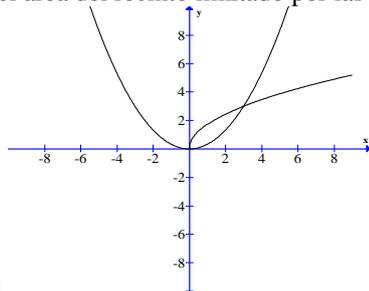
a) $f'(e) = \frac{1}{e}$ $f(e) = 2$ b) $A = e - 1/e$

4.2B Se consideran las funciones $f: [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{3x}, \quad g(x) = \frac{1}{3}x^2$$

(a) (0,5 puntos) Esboza sus gráficas.

(b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.



Solución: a)

b) $A = 3 u^2$

5.2A (a) (1,25 puntos) Calcula $\int x \text{sen} x dx$. (b) (1,25 puntos) Sean las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = -x^2 + 1, \quad g(x) = x - 1$$

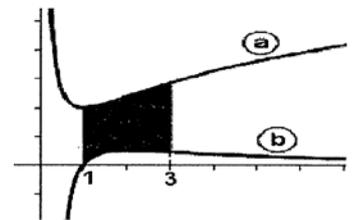
Calcula el área del recinto limitado por sus gráficas.

Solución: a) $-x \cos x + \text{sen} x + C$ b) $A = 9/2 u^2$

5.2B Las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

definida por $f(x) = \frac{2}{x} + \ln(x)$

y a la de su derivada $f': (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (ln denota logaritmo neperiano)



(a) 0,5 puntos) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f' .

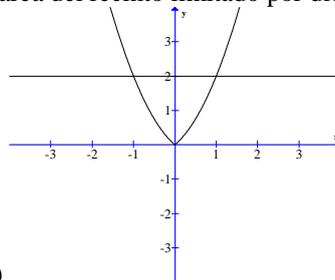
(b) (2 puntos) Calcula el área de la región sombreada.

Solución: La gráfica está mal representada

6.2A Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 + |x|$, $g(x) = 2$

(a) (1 punto) Determina los puntos de corte de las gráficas de f y g . Esboza dichas gráficas.

(b) (1,5 puntos) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.



Solución: a) A(-1,2) B(1,2)

b) $A = 7/3 u^2$

6.2B (2,5 puntos) Calcula un número positivo a , menor que 4, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = x^2$ y las dos rectas de ecuaciones $y = 4$ e $y = a$, tenga un área de $\frac{28}{3}$ unidades cuadradas.

Solución: $a = 1$

Ejercicios de integrales 2010

1.2A [2'5 puntos] Sea $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x + 2)$. Halla una primitiva F de f que verifique $F(0) = 0$. (ln denota el logaritmo neperiano).

Solución: $F(x) = (x+2) \ln(x+2) - x - 2\ln(2)$

1.2B [2'5 puntos] Calcula el valor de $a > 0$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ vale 36 unidades cuadradas.

Solución: $a = 5$

2.2A (Junio) [2'5 puntos] Calcula

$$\int_0^{\pi^2} \text{sen}(\sqrt{x}) dx$$

Sugerencia: Efectúa el cambio $\sqrt{x} = t$

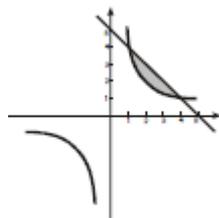
Solución: 2π

2.2B (Junio) Considera la función f dada por $f(x) = 5 - x$ y la función g definida como $g(x) = \frac{4}{x}$ para $x \neq 0$.

(a) [1 punto] Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g indicando sus puntos de corte.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área de dicho recinto.

Solución: a)



b) $\frac{15}{2} - 8\ln(2)$ u²

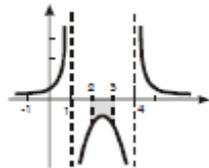
3.2A [2'5

puntos] Dada la función f definida por $f(x) = \frac{3}{x^2 - 5x + 4}$ para $x \neq 1$ y

$x \neq 4$.

Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas, y las rectas $x = 2$, $x = 3$.

Solución:



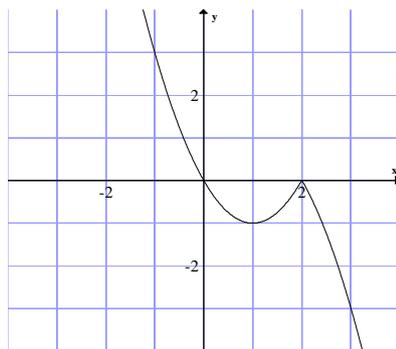
Área = $2\ln(2)$ u²

3.2B

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|2 - x|$.

(a) [1 punto] Esboza su gráfica.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta de ecuación $x = 3$.



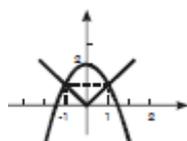
Solución: a)

b) $\frac{8}{3}$ u²

4.2A Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = |x|$.

(a) [1 punto] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .



Solución: a) b) $\frac{7}{3} u^2$

- 4.2B** Dada la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln x$, donde \ln es la función logaritmo neperiano, se pide:
 (a) [0'75 puntos] Comprueba que la recta de ecuación $y = -ex + 1 + e^2$ es la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.
 (b) [1'75 puntos] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta normal del apartado (a).

Solución: a) Recta normal $y = -ex + 1 + e^2$ b) $1 + \frac{1}{2e} u^2$

5.2A (Septiembre) Sea $I = \int \frac{5}{1 + \sqrt{e^{-x}}} dx$

- (a) [1 punto] Expresa I haciendo el cambio de variable $t^2 = e^{-x}$.
 (b) [1'5 puntos] Determina I .

Solución: a) $\int \frac{-10}{\sqrt{t+1}} dt$ b) $10 \operatorname{Ln} \left(1 + e^{\frac{x}{2}} \right)$

5.2B (Septiembre) Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 4$.

- (a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
 (b) [1'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y = 2x + 3$. Calcula su área.

Solución: a) $y = 2x + 3$ b) $\frac{1}{3} u^2$

6.2A [2'5 puntos] Sea la función f dada por $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 0$.

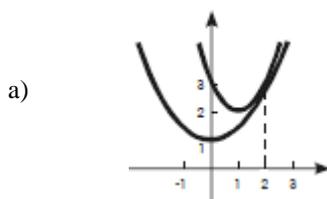
Determina la primitiva F de f tal que $F(1) = 1$.

Solución: $F(x) = \operatorname{Ln}|x| - \operatorname{Ln}|x+1| + 1 + \operatorname{Ln}2$

6.2B Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$

- (a) [1 punto] Esboza las gráficas de f y g , y halla su punto de corte.
 (b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y el eje de ordenadas.

Solución:



Punto de corte (2, 3) b) $\frac{4}{3} u^2$

Ejercicios de integrales 2011

1.2A [2'5 puntos] Calcula el valor de $b > 0$, sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y = \sqrt{x}$ y la recta $y = bx$ es de $4/3$ unidades cuadradas.

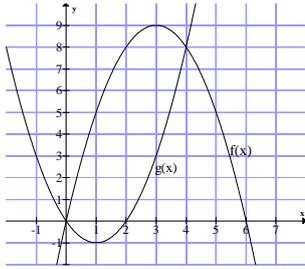
Solución: $b = 1/2$.

1.2B [2'5 puntos] Sea $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(1 - \ln(x))$, donde \ln denota la función logaritmo neperiano. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $P(1; 1)$.

2.2A Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$

- (a) [0'75 puntos] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.
 (b) [1'75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Solución: a) (0,0) (4,8) b) $64/3 u^2$

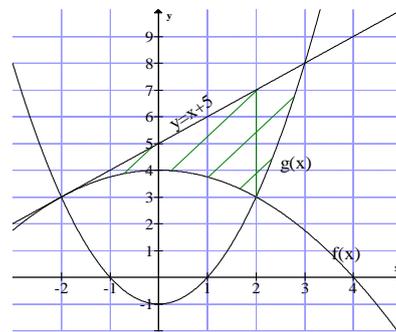


Solución: $F(x) = \frac{x^2}{4}(3 - 2\ln x) + \frac{1}{4}$

2.2B Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$

- (a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.
- (b) [1'75 puntos] Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y = x+5$. Calcula el área de este recinto.

Solución: a) $y = x+5$ b)

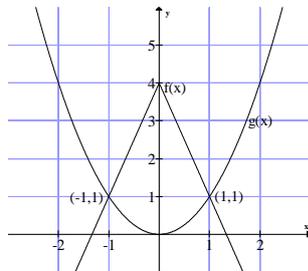


3.2A Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = 4 - 3|x| \text{ y } g(x) = x^2$$

- (a) [1 punto] Esboza las gráficas de f y g . Determina sus puntos de corte.
- (b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Solución: a) b) $13/3 \text{ u}^2$



3.2B Calcula:

$$\int_0^{\pi} x \cos(x) dx$$

Solución: $\frac{\pi}{2} - 1$

4.2A [2'5 puntos] Calcula un número positivo a , menor que 2, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = \frac{1}{2}x^2$ y las dos rectas horizontales de ecuaciones $y = a$ e $y = 2$, tenga un área de $\frac{14}{3}$ unidades cuadradas.

Solución: $a = 1/2$.

4.2B Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$

- (a) [0'5 puntos] Prueba que las rectas $y = -x + 1$ e $y = 3x - 1$ son tangentes a su gráfica.
- (b) [2 puntos] Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y las rectas mencionadas en el apartado anterior.

Solución: a) $y = -x + 1$ es tangente en el punto $(1, 0)$. $y = 3x - 1$ es tangente en el punto $(0, 1)$. b) $\frac{1}{4} \text{ u}^2$

5.2A [2'5 puntos] Determina la función $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = \frac{1}{x}$ y su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1; 1)$.

Solución: $f(x) = x \ln x - x + 2$

5.2B [2'5 puntos] Calcula: $\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2} dx$

Solución: $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \ln[(x+2)^2(x-1)^4] + C$

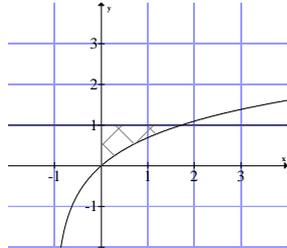
6.2A Sea $f: (-1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x+1)$, donde \ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) [0'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , el eje OY y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte de las gráficas.

(b) [1'75 puntos] Halla el área del recinto anterior.

Solución: a)

b) $e - 2$



6.2B [2'5 puntos] Halla:

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)} dx$$

Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = e^x$.

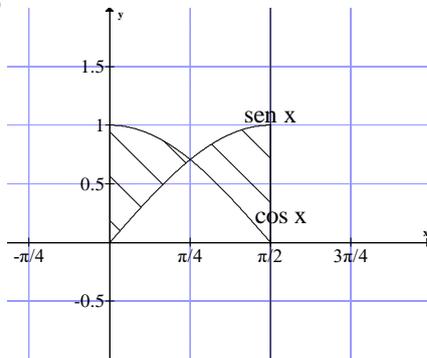
Solución: $\frac{1}{2} \ln(e^x - 1) - \frac{1}{4} \ln(e^x + 1) + \frac{1}{2(e^x+1)} + C$

Ejercicios de integrales 2012

1.2A- Sean $f; g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \text{cos}(x)$ respectivamente.

(a) [0'75 puntos] Realiza un esbozo de las gráficas de f y g en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) [1'75 puntos] Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$



Solución: a)

b) $(2\sqrt{2} - 2) u^2$

1.2B [2'5 puntos] Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \cos(x)$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(\pi; 0)$.

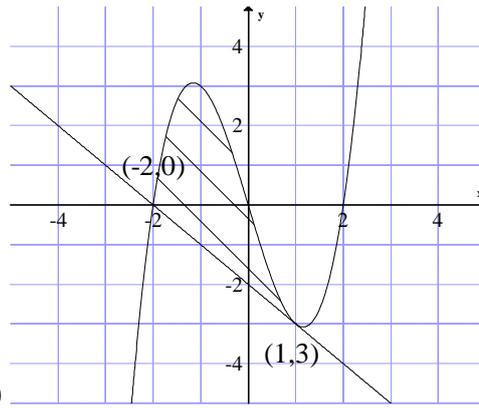
Solución: $x^2 \text{sen} x + 2x \text{cos} x - \text{sen} x + 2\pi$

2.2A Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 4x$

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

(b) [0'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = -x - 2$, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.

(c) [1 punto] Calcula el área del recinto anterior.



Solución: a) $y = -x - 2$

b)

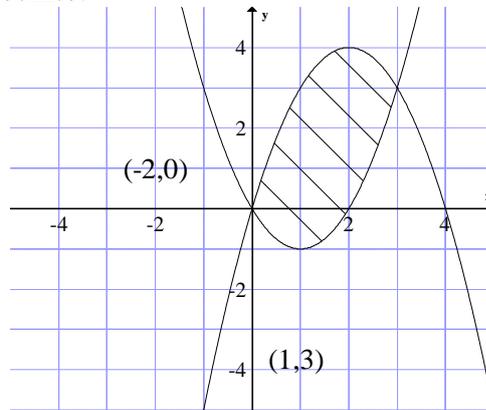
c)

$$\frac{27}{4} u^2$$

2.2B Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$ respectivamente.

(a) [0'75 puntos] Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.

(b) [1'75 puntos] Calcula el área de dicho recinto.



Solución: a) Puntos de corte $(0, 0)$ y $(3, 3)$

b) $9 u^2$

3.2A Sea $I = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}} dx$

(a) [1'75 puntos] Expresa la integral I aplicando el cambio de variable $t = \sqrt{1-x}$

(b) [0'75 puntos] Calcula el valor de I .

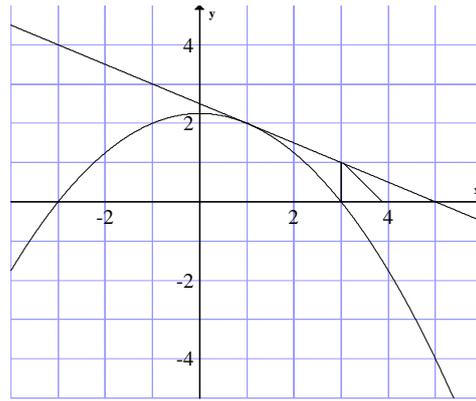
Solución: a) $\int_0^1 (2t - 2t^2) dt$

b) $I = \frac{1}{3}$

3.2B Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{9-x^2}{4}$

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

(b) [1'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , la recta $x+2y = 5$ y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.



Solución: a) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ b) Área = $\frac{5}{2}$

4.2A Sea f una función continua en el intervalo $[2; 3]$ y F una función primitiva de f tal que $F(2) = 1$ y $F(3) = 2$. Calcula:

- (a) [0'75 puntos] $\int_2^3 f(x)dx$
- (b) [0'75 puntos] $\int_2^3 (5f(x) - 7)dx$
- (c) [1 punto] $\int_2^3 (F(x))^2 f(x)dx$

Solución: a) 1 b) -2 c) $\frac{7}{3}$

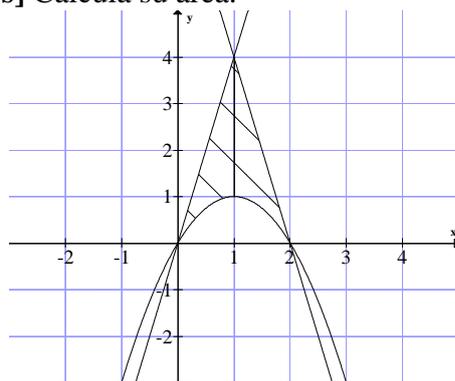
4.2B Sea la función f definida por $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 1$.

- (a) [1'25 puntos] Halla una primitiva de f .
- (b) [1'25 puntos] Calcula el valor de k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo $[2; k]$ sea $\ln(2)$, donde \ln denota el logaritmo neperiano.

Solución: a) $F(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ b) $k = 5$

5.2A Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las rectas $y = 4x$, $y = 8 - 4x$ y la curva $y = 2x - x^2$.

- (a) [0'5 puntos] Realiza un esbozo de dicho recinto.
- (b) [2 puntos] Calcula su área.



Solución: a) b) $\frac{8}{3} u^2$

5.2B [2'5 puntos] Calcula los valores de a y b sabiendo que la función $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + b \ln(x)$, donde \ln denota la función logaritmo neperiano, tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que $\int_1^4 f(x) dx = 27 - 8 \ln(4)$

Solución: $a = 1$ $b = -2$

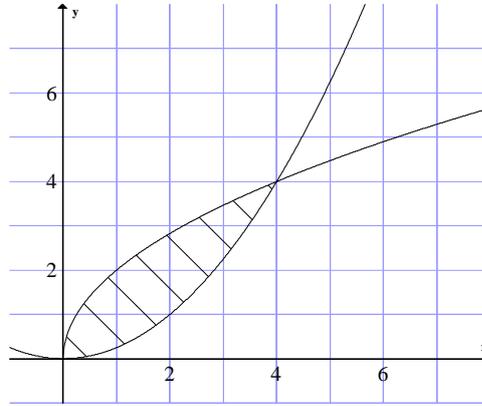
6.2A [2'5 puntos] Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(-1; 0)$.

Solución: $F(x) = (1 - x^2)e^x + 2xe^x - 2e^x + \frac{4}{e}$

6.2B Sean las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{x^2}{4}$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$ respectivamente.

(a) [0'75 puntos] Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g . Realiza un esbozo del recinto que limitan.

(b) [1'75 puntos] Calcula el área de dicho recinto.



Solución: a) (0, 0) y (4, 4)

b) $\frac{16}{3} u^2$

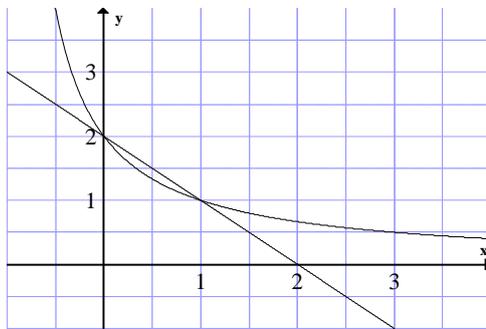
Ejercicios de integrales 2013

1.2A Sean f y g las funciones definidas por $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = \frac{2}{x+1}$ para $x \neq -1$.

- a) [0'5 puntos] Calcula los puntos de corte entre las gráficas de f y g .
- b) [0'5 puntos] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes.
- c) [1'5 puntos] Halla el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Solución; a) (0, 2) y (1, 1)

b)



c) $(\frac{3}{2} - 2\ln 2) u^2$

1.2B [2'5 puntos] Calcula $\int_2^4 \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}} dx$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{e^x}$.

Solución: $2 \left(e^2 - e + \ln \left(\frac{1+e}{1+e^2} \right) \right)$

2.2A

a) [2 puntos] Determina la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = (2x + 1)e^{-x}$ y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

b) [0'5 puntos] Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

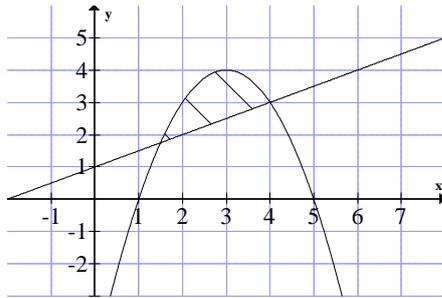
Solución: a) $f(x) = (-2x - 3)e^{-x} + 3$ b) $y = x$

2.2B Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = -x^2 + 6x - 5$.

a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de g en el punto de abscisa $x = 4$.

b) [1'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $x - 2y + 2 = 0$. Calcula el área de este recinto.

Solución: a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ b) área = $\frac{383}{16} u^2$



3.2A [2'5 puntos] Sea $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x}}$.

Determina la primitiva de g cuya gráfica pasa por el punto $P(1, 0)$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

Solución: $G(x) = 6\ln(\sqrt{x} + 1) - 6\ln 2$

3.2B [2'5 puntos] Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(2x) dx$.

Solución: $\frac{\pi}{4}$

4.2A [2'5 puntos] Halla $\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}} dx$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

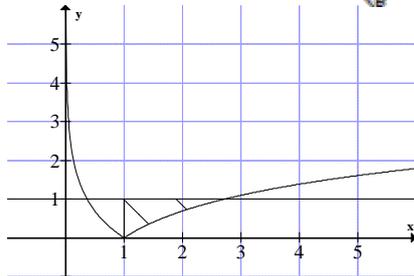
Solución: $2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + \sqrt{x}\right) + C$

4.2B Sea $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = |\ln(x)|$ (donde \ln denota el logaritmo neperiano).

a) [1'25 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte entre ellas.

b) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto anterior.

Solución: a) Puntos de corte $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ y $(e, 1)$



b) $\frac{2e-2}{2} u^2$

5.2A [2'5 puntos] De la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que alcanza un máximo relativo en $x = 1$, que la gráfica tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$ y que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c y d .

Solución: $a = -1$ $b = d = 0$ $c = 3$

5.2B [2'5 puntos] Calcula $\int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5} dx$.

Solución: $2 - \frac{13}{2} \ln 3$

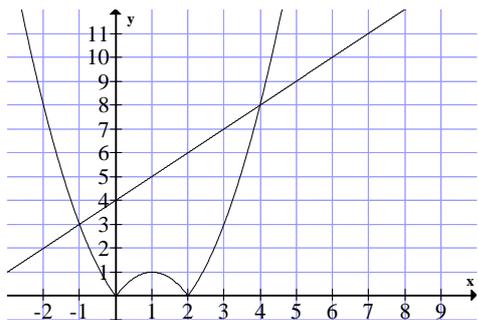
6.2A Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = |x(x-2)| \quad \text{y} \quad g(x) = x+4.$$

a) [1'25 puntos] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Solución: a)



(-1, 3) (4, 8) b) $\frac{65}{6}u^2$