11.2. Problemas

1. Determinar las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de las rectas que pasan por el punto A y con el vector de dirección dado:

$$\text{a) } A(2,1,-3), \vec{v}=(-1,2,-2) \quad ; \quad \text{b) } A(0,0,0), \vec{v}=(2,-1,-3)$$

<u>Solución</u>:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+2t \\ z = -3-2t \end{cases} \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = -3t \end{cases}$$

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2} \qquad \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-3}$$

2. Determinar dos puntos pertenecientes a las rectas:

$$\text{a) } \frac{x-1}{2} = \frac{2-3y}{3} = 1-z \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} x = 2z-1 \\ y = -3z+2 \end{cases}$$

3. Escribir en forma paramétrica las rectas:

$$\text{a) } \frac{x-1}{3} = y = \frac{2-z}{2} \quad ; \quad \text{b) } x = y = z$$

<u>Solución</u>:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 1+3t \\ y = t \\ z = 2-2t \end{cases} \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

4. Hallar en forma paramétrica y cartesiana la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,-1,2)$ y con vectores $\vec{r}, \vec{s}$ que se indican como vectores de dirección:

$$\text{a) } \vec{r}=(0,-1,2), \vec{s}=(1,3,2) \quad ; \quad \text{b) } \vec{r}=(0,-1,-3), \vec{s}=(-1,2,-3)$$

<u>Solución</u>:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 1+s \\ y = -1-t+3s \\ z = 2+2t+2s \end{cases} \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} x = 1-s \\ y = -1-t+2s \\ z = 2-3t-3s \end{cases}$$

$$8x-2y-z-8=0 \qquad 9x+3y-z-4=0$$

5. Pasar a la forma continua y hallar un vector de dirección de las rectas:

$$\text{a)} \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -z - 2 \end{cases} \quad ; \quad \text{b)} \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\text{a)} \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{1} \\ \vec{v} = (2, -1, 1) \end{cases} \quad ; \quad \text{b)} \begin{cases} \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{2} \\ \vec{v} = (1, 2, 2) \end{cases}$$

6. Hallar las ecuaciones paramétricas, ecuación continua y un vector de dirección de la recta:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x = -7 + t \\ y = -5 + t \\ z = t \end{cases} \quad ; \quad \frac{x+7}{1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z}{1} \quad ; \quad \vec{v} = (1, 1, 1)$$

7. Hallar la ecuación del plano que contenga al punto $P(1, 1, 1)$ y sea paralelo a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

Solución: $x - y - 2z + 2 = 0$

8. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 1, 2)$ y es paralelo a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ y - z = -3 \\ z = t \end{cases}$$

Solución: $x - 5y + 4z - 4 = 0$

9. Obtener las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(1, 2, 2)$ y es paralela a la recta:

$$\begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$$

Solución: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{1}$

10. Obtener las ecuaciones de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

<u>Solución</u>: $\frac{x}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$

11. Averiguar si son paralelos los planos π_1, π_2 de cada uno de los apartados siguientes:

$$\text{a)} \begin{cases} \pi_1 \equiv x - y + z = 0 \\ \pi_2 \equiv x - y = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{b)} \begin{cases} \pi_1 \equiv x + y = 0 \\ \pi_2 \equiv x = 2 \end{cases}$$

<u>Solución</u>: No, No

12. Hallar las ecuaciones de los ejes y planos de coordenadas.

<u>Solución</u>:

$$\text{Eje x} \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{Eje y} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{Eje z} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Plano } xy \equiv z = 0 \quad ; \quad \text{Plano } yz \equiv x = 0 \quad ; \quad \text{Plano } xz \equiv y = 0$$

13. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$

y es paralelo al vector de extremos $A(2, 0, 0), B(0, 1, 0)$.

<u>Solución</u>: $x + 2y - 8z - 3 = 0$

14. Dados los puntos $A(1, 0, 2), B(0, 1, 3), C(-1, 2, 0), D(2, -1, 3)$, hallar la ecuación del plano que contiene a la recta que pasa por AB y es paralelo a la recta que pasa por CD.

<u>Solución</u>: $x + y - 1 = 0$

15. Sean las rectas $\vec{x} = (1, 1, 1) + \lambda(2, 1, -1), \vec{x} = \mu(3, 0, 1)$. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo a ambas rectas.

<u>Solución</u>: $x - 5y - 3z = 0$

16. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-1, 2, 0)$ y contiene a la recta:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

<u>Solución</u>: $3x - 14y - 21z + 31 = 0$

17. Hallar los valores de a para que sean paralelas las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y}{2a} = \frac{z}{1} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = -t \\ y = -2 - 2t \\ z = -at \end{cases}$$

<u>Solución</u>: $a = \pm 1$

18. Estudiar si las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-1} \quad ; \quad s \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$$

son coplanarias. En caso afirmativo, hallar la ecuación del plano que las contiene.
<u>Solución</u>: Sí, $x + y - z + 1 = 0$

19. Dadas la recta r y el plano π:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \pi \equiv 2x + y + mz = n$$

determinar la relación (o valores) entre m y n de modo que:

- r y π sean secantes.
- r y π sean paralelos y $r \not\subset \pi$.
- r esté contenida en π

<u>Solución</u>: $7m + 23 \neq 0$; $m = -\frac{23}{7}, n \neq \frac{9}{7}$; $m = -\frac{23}{7}, n = \frac{9}{7}$

20. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1, 1, 2)$ y se apoya en las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1} \quad ; \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$$

<u>Solución</u>: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{-1}$

21. Hallar las ecuaciones de una recta paralela al vector $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y que corte a las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 2 \end{cases}$$

<u>Sugerencia</u>: Estudiar previamente la posición relativa entre r y s.
<u>Solución</u>: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

22. Averiguar si los puntos $A(1,0,4), B(3,0,1), C(2,0,0), D(0,4,0)$ son o no coplanarios.
    Solución: No

23. Obtener la condición para que sean coplanarios los puntos
$$A(1,0,1)\ ;\ B(1,1,0)\ ;\ C(0,1,1)\ ;\ D(a,b,c)$$
    Solución: $a+b+c=2$

24. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1,-3,0)$ y es paralela a la recta:
$$\begin{cases} x = z+2 \\ y = z-3 \end{cases}$$
    Solución: $\frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}$

25. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,0,-1)$ y es paralela a la recta:
$$\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x-2y+z-1=0 \end{cases}$$
    Solución: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$

26. Hallar la ecuación del plano paralelo a
$$-x-2y+3z-7=0$$
    que pasa por el punto $(1,2,-2)$
    Solución: $x+2y-3z-11=0$

27. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta:
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$$
    y pasa por el origen.
    Solución: $x-2y+z=0$

28. Hallar la ecuación del plano que pasa por $(1,0,0)$ y contiene a la recta:
$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-3t \\ z = 4+2t \end{cases}$$
    Solución: $9x+y-3z-9=0$

29. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo al plano determinado por el punto $(1,-1,0)$ y a la recta que pasa por el punto $(2,2,2)$ y tiene por vector director $(1,2,3)$.

    Solución: $5x - y - z = 0$

30. Dadas las rectas:
$$r \equiv \begin{cases} x = 2z+1 \\ y = 3z+2 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = z+4 \\ y = 2z+7 \end{cases}$$
    Averiguar sin son coplanarias y si lo son hallar el punto de intersección.

    Solución: No son coplanarias.

31. Estudiar las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas. En caso de corte, hallar el punto de intersección:

    - $r \equiv x = y = z \quad ; \quad s \equiv 2x+1 = 2y = 2z+2$
    - $r \equiv x-1 = y-2 = \dfrac{z-3}{3} \quad ; \quad s \equiv \dfrac{x-1}{3} = y-2 = \dfrac{z-3}{2}$

    Solución: Son paralelas ; Se cortan en el punto $(1,2,3)$.

32. Determinar la posición relativa de las rectas:
$$r \equiv \begin{cases} x = z-1 \\ y = -z \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x+y+z+1 = 0 \\ x-y-z-1 = 0 \end{cases}$$
    Solución: Se cruzan.

33. Determinar a para que las siguientes rectas se corten y hallar el punto de corte:
$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+a}{2} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = 1+4t \\ y = -1+3t \\ z = -4+5t \end{cases}$$
    Solución: $a = 1$, $(5,2,1)$.

34. Averiguar para qué valor de m se cortan las siguientes rectas y hallar el punto de corte:
$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{5} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x+2y+z-m = 0 \\ 2x-y-z+2 = 0 \end{cases}$$
    Solución: $m = \frac{25}{4}$, $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{21}{4}\right)$.

35. Sean las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 5z = \lambda(x-3)+10 \\ 5y = x+2 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \frac{x-1}{-5} = \frac{y}{\lambda} = \frac{z-1}{2}$$

- Demostrar que se cruzan para todo valor de λ.
- Hallar para qué valor de λ la recta s es paralela al plano $2x+3y-z+1=0$.

Solución: $\lambda = 4$.

36. Para cada número real λ se considera el plano π de ecuación:

$$\pi \equiv (2\lambda+1)x + (1-\lambda)y + (1+3\lambda)z + 2\lambda - 1 = 0$$

Demostrar que todos los planos anteriores pasan por una recta r y calcular las ecuaciones paramétricas de dicha recta.
Solución:

$$\begin{cases} x = -3-4t \\ y = 2+t \\ z = 2+3t \end{cases}$$

37. Estudiar la posición relativa de la recta:

$$\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = t+2 \\ z = 2t \end{cases}$$

y el plano determinado por los puntos $A(1,3,2), B(2,0,1), C(1,4,3)$.
Solución: Se cortan en el punto $\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

38. Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z+p \\ y = -z+3 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = -z+1 \\ y = 2z+q \end{cases}$$

- Hallar la condición que deben cumplir p y q para que las rectas estén contenidas en un plano.
- Determinar p, q para que el plano pase por el punto $(1,1,1)$.

Solución: $q-p=2$; $p=-2, q=0$.

39. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el origen y corta a las rectas:

$$x = 2y = z - 1 \quad ; \quad \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$

<u>Solución</u>: $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$

40. Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x - y + z = -8 \\ 2x + 3y - z = -8 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la recta que se apoya en ambas y pasa por el punto $(8, 5, 4)$.
<u>Solución</u>: $\frac{x-8}{-2} = \frac{y-5}{23} = \frac{z-4}{37}$

41. Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y = z \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Obtener la ecuación de la recta que se apoya en ambas y tiene como vector director $(-1, 3, -1)$.
<u>Solución</u>: $\frac{x-17}{-1} = \frac{y-8}{3} = \frac{z-8}{-1}$

42. Dadas las rectas:

$$r \equiv x = y = z \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad ; \quad t \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Hallar las ecuaciones de la recta que se apoya en r y s y es paralela a t.
<u>Solución</u>: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$

43. Hallar el valor de k para que los planos:

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv x + y + z = 2 \\ \pi_2 &\equiv 2x + 3y + z = 3 \\ \pi_3 &\equiv kx + 10y + 4z = 11 \end{aligned}$$

tengan una recta común y hallar las ecuaciones paramétricas de dicha recta.
<u>Solución</u>:

$$k = 7 \quad ; \quad \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$$

44. Estudiar la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned}\pi_1 &\equiv mx + y - z = 1\\ \pi_2 &\equiv 2x - y + mz = 3m\\ \pi_3 &\equiv x - 2y + (m+1)z = 3m - 1\end{aligned}$$

según los distintos valores de m.

Solución: Si $m = 1$ los tres planos pasan por una recta. Si $m \neq 1$ los tres planos se cortan en un punto.

45. Determinar a y b para que los planos:

$$\begin{aligned}\pi_1 &\equiv 2x - y + z = 3\\ \pi_2 &\equiv x - y + z = 2\\ \pi_3 &\equiv 3x - y - az = b\end{aligned}$$

se corten en una recta r. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $(2, 1, 3)$.

Solución: Si $a = -1, b = 4, x + y - z = 0$

46. Determinar si las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

se cortan o se cruzan.

Solución: Se cruzan.

47. Calcular, describiendo el procedimiento empleado, las ecuaciones de una recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta en que se cortan los planos

$$\Pi_1 \equiv x - y + 2z + 1 = 0 \quad ; \quad \Pi_2 \equiv x + 3y - z + 2 = 0$$

Solución: $\frac{x}{-5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$.

48. Sean las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-m}{-1} \quad ; \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{m} = \frac{z+1}{2}$$

(1) ¿Para qué valor de m están r y s contenidas en un mismo plano?.

(2) En el caso en que $m = 1$, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 1, 2)$ y corta a r y a s.

Solución: $m = 0$; $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{1}$

49. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1,0,2)$ y corta a las rectas r y s dadas por

$$r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} 2x + 6y + 2 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Solución: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{-2}$

50. **Selectividad Junio 2001**. Calcular a sabiendo que los planos

$$ax + y - 7z = -5 \quad \text{y} \quad x + 2y + a^2 z = 8$$

se cortan en una recta que pasa por el punto $A(0,2,1)$ pero que no pasa por el punto $B(6,-3,2)$.

Solución: $a = -2$.

51. **SL**. Consideremos los tres planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv x + y + z = 1, \quad \pi_2 \equiv x - y + z = 2, \quad \pi_3 \equiv 3x + y + 3z = 5$$

¿Se cortan π_1 y π_2?. ¿Hay algún punto que partenezca a los tres planos?.

Solución: Sí, No.

52. **Selectividad Junio 2002**. Calcular la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s \equiv \dfrac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Solución: $\frac{x+9}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+4}{-13}$

53. **Selectividad septiembre 2009**. Consideremos el punto $P(1,0,0)$ y las rectas r y s definidas como

$$r \equiv x - 3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2}, \quad s \equiv (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(-1,2,0)$$

- Estudiar la posición relativa de r y s.
- Hallar la ecuación del plano π que pasando por P es paralelo a r y a s.

Solución: se cruzan; $\pi \equiv 2x + y + 2z - 2 = 0$.

Capítulo 12

Geometría Euclídea

12.1. Resumen teórico

12.1.1. Producto escalar de dos vectores

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores. Entonces, el producto escalar de ellos, el cual se escribe como $\vec{a} \cdot \vec{b}$, es el número

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$$

La norma, módulo o longitud de un vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, escrita como $||\vec{a}||$, es el número

$$||\vec{a}|| = +\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \Longrightarrow ||\vec{a}||^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

Se tienen las siguientes propiedades:

[1] $\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}||\ ||\vec{b}|| \cos\varphi$, siendo $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ el ángulo que forma el vector $\vec{a}$ con el vector $\vec{b}$. De aquí se deduce la desigualdad de Schwarz

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||$$

dándose la igualdad si y solo si los vectores son linealmente dependientes.

[2] **El producto escalar es conmutativo**. En otras palabras, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

[3] **El producto escalar es distributivo respecto de la suma**. En otras palabras,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

[4] Si λ es cualquier número real, tenemos

$$\left(\lambda\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \left(\lambda\vec{b}\right)$$

[5] $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0$, para cualquier vector $\vec{a}$.

[6] Dos vectores son perpendiculares (u ortogonales) cuando forman un ángulo de $90° = \dfrac{\pi}{2}$ rad. Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares lo escribiremos como $\vec{a} \perp \vec{b}$. Tenemos el siguiente criterio

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

[7] La norma cumple las siguientes propiedades:

$$||\lambda \vec{a}|| = |\lambda| \; ||\vec{a}||, \qquad ||\vec{a} + \vec{b}|| \leq ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$$

[8] La distancia entre dos puntos A y B, escrita como $d(A, B)$ es

$$d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}||$$

La función distancia d cumple las siguientes propiedades:

a) $d(A, A) = 0$.

b) **Simetría**. $d(A, B) = d(B, A)$.

c) **Desigualdad triangular**.

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

12.1.2. Propiedad fundamental

Dado un plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$, el vector $\vec{n} = (a, b, c)$ formado por los coeficientes de la x, y, z es tal que $\vec{n} \perp \pi$, es decir, el vector $\vec{n}$ es normal al plano, luego un plano queda determinado por un punto y el vector normal.

12.1.3. Ángulo de dos rectas r y s

Por definición, es **el ángulo agudo que forman sus vectores directores**. En otras palabras, si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son los vectores directores de la primera y segunda rectas, entonces

$$\varphi = \widehat{(r, s)} \Longrightarrow \cos\varphi = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{||\vec{v}|| \; ||\vec{w}||}$$

12.1.4. Ángulo de dos planos

Dados dos planos

$$\begin{array}{ll} \pi_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, & \vec{n_1} = (a_1, b_1, c_1) \\ \pi_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, & \vec{n_2} = (a_2, b_2, c_2) \end{array}$$

Entonces

$$\varphi = \widehat{(\pi_1, \pi_2)} \Longrightarrow \cos\varphi = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{||\vec{n_1}||\ ||\vec{n_2}||}$$

12.1.5. Ángulo de recta y plano

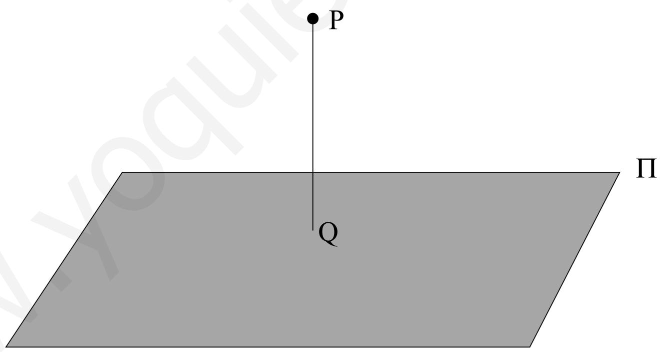
Sea $\vec{v}$ el vector director de la recta r y $\vec{n}$ el vector normal del plano π, entonces:

$$\varphi = \widehat{(r, \pi)} \Longrightarrow \operatorname{sen}\varphi = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{||\vec{v}||\ ||\vec{n}||}$$

¡¡Ojo con la expresión anterior!!, ya que es el seno y no el coseno.

12.1.6. Distancia de un punto P a un plano π

Por definición es la distancia del punto P al punto Q, siendo Q el punto de corte de la perpendicular a π que pasa por P con π (ver siguiente figura)



En estas condiciones, si $P(x_1, y_1, z_1)$ y $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$, entonces:

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

12.1.7. Producto exterior de dos vectores

Dados dos vectores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, el producto exterior (o vectorial) de estos dos vectores es el siguiente vector, escrito en forma simbólica:

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

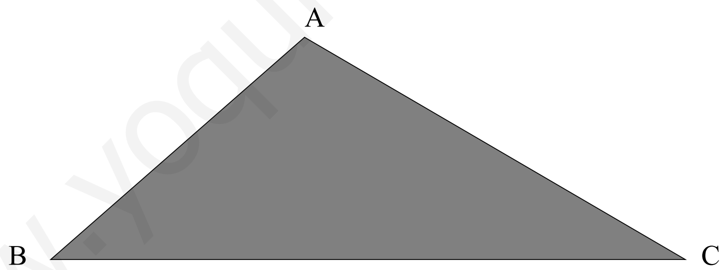
y es un **vector perpendicular tanto a $\vec{v}$ como a $\vec{w}$**. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$.
2. Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son dependientes, entonces $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$.
3. $||\vec{v} \wedge \vec{w}|| = ||\vec{v}|| \, ||\vec{w}|| \operatorname{sen} \varphi$, siendo $\varphi = \widehat{(\vec{v}, \vec{w})}$.
4. La norma del producto exterior $||\vec{v} \wedge \vec{w}||$ es el área del paralelogramo formado con estos dos vectores.

12.1.8. Área de un triángulo

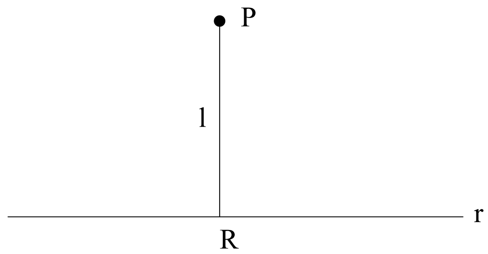
Dado un triángulo con vértices en los puntos A, B, C, el área S de dicho triángulo es

$$S = \frac{1}{2} ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$$



12.1.9. Distancia de un punto a una recta

Dado un punto P y una recta r, la distancia del punto P a la recta r es la distancia que se observa en la figura, en concreto, la distancia de P al punto R, el cual es el corte del plano π perpendicular a r que pasa por P con la misma r (ver figura):



Para el cálculo es necesario averiguar un punto cualquiera Q de la recta r, y un vector director $\vec{v}$ (de r), y entonces

$$l = d(P,r) = \frac{||\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}||}{||\vec{v}||}$$

12.1.10. Volumen de un tetraedro

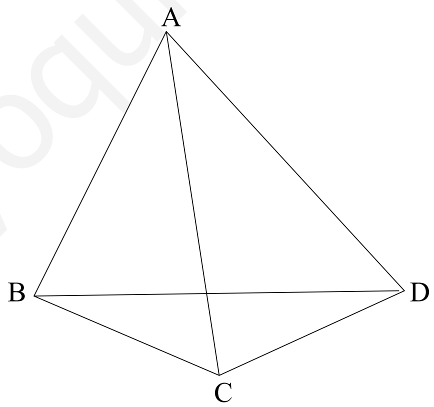
Sea un tetraedro dado por cuatro puntos no coplanarios:

$$A\,(a_1,a_2,a_3)\,,\;\; B\,(b_1,b_2,b_3)\,,\;\; C\,(c_1,c_2,c_3)\,,\;\; D\,(d_1,d_2,d_3)$$

el volumen es:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

como es natural, en valor absoluto.



12.1.11. Cálculo de la perpendicular común a dos rectas

Dadas dos rectas $r \equiv (P,\vec{v})$, $s \equiv (Q,\vec{w})$, la perpendicular común tiene como vector director $\vec{d} = \vec{v} \wedge \vec{w}$, y toca a las otras dos, luego el problema **queda reducido al caso segundo de la sección 11.1.7**.

12.1.12. Distancia entre dos rectas que se cruzan

Dadas dos rectas $r \equiv (P, \vec{v})$, $s \equiv (Q, \vec{w})$ que se cruzan, la distancia entre ambas es:

$$d(r, s) = \frac{|\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{PQ}|}{||\vec{v} \wedge \vec{w}||}$$

12.2. Problemas

1. Calcular los vectores de longitud 1 ortogonales a los vectores $(2,-2,3),(3,-3,2)$.

   Solución: $\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right]$.

2. Calcular el ángulo que forman las rectas:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+1}{5} \\ \dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-1}{5} \end{cases}$$

   Solución: $\frac{\pi}{2}$ rad.

3. Calcular el ángulo que forman las rectas:

$$r\equiv x=y=z \quad ; \quad s\equiv \begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$$

   Solución: $\frac{\pi}{2}$ rad.

4. Calcular el área del triángulo de vértices $A(0,0,0),C(1,1,0)$, y el tercer vértice es el punto de intersección de la recta:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{1}$$

   con el plano XY.

   Solución: 1.

5. Hallar la distancia del punto $A(1,2,3)$ a la recta r de ecuación $x=0,z=0$ como asimismo la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.

   Solución: $\sqrt{10}$; $y-2=0$.

6. Dado el triángulo de vértices $A(1,1,1),B(0,3,5),C(4,0,2)$, hallar su área y las longitudes de sus tres alturas.

   Solución: $\frac{\sqrt{230}}{2}$; $\frac{\sqrt{230}}{\sqrt{34}}$, $\frac{\sqrt{230}}{11}$, $\frac{\sqrt{230}}{21}$.

7. Hallar el área del triángulo de vértices $(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$.

   Solución: $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}$

8. Hallar la distancia del punto $(3,4,5)$ a la recta:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+5}{-1}$$

   Solución: $\sqrt{146}$

9. Hallar el volumen del tetraedro de vértices $(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)$.
   Solución: $\frac{1}{6}$

10. Hallar el volumen del tetraedro que forman los planos:

$$\begin{array}{l} \pi_1 \equiv y = 0 \\ \pi_2 \equiv z = 0 \\ \pi_3 \equiv x - y = 0 \\ \pi_4 \equiv 3x + 2y + z - 15 = 0 \end{array}$$

   Solución: $\frac{75}{2}$

11. Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2} \quad ; \quad s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

   - Comprobar que se cortan y hallar las coordenadas del punto P de intersección.
   - Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y s.

   Solución: $P(1,2,1)$; $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-1}{1}$

12. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,2,1)$ y es perpendicular al plano que pasa por dicho punto y contiene a la recta:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$$

   Solución: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{2}$

13. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1,2,-1)$, es paralela al plano $2x+y-z=3$ y es perpendicular a la recta:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 3t \end{array} \right.$$

   Solución: $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+1}{3}$

14. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(-1,1,0)$ y cuya dirección es perpendicular a la de las rectas:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = z \end{array} \right. \quad ; \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ y - z = 1 \end{array} \right.$$

   Solución: $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{-4} = z$

15. Hallar la recta perpendicular e incidente al eje OZ por el punto $(1, 2, 3)$.

    Solución: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{0}$

16. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, 0, 0)$ y es perpendicular al plano $2x + 3y + z - 7 = 0$.

    Solución: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$

17. Escribir las ecuaciones de la perpendicular común a las rectas:

$$x = y = z \quad ; \quad x = y = 3z - 1$$

    Solución: $\frac{x-1/2}{1} = \frac{y-1/2}{-1} = \frac{z-1/2}{0}$

18. Hallar la ecuación de la recta perpendicular a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t - 2 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

    y que pase por ambas.

    Solución: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{0}$

19. Calcular la ecuación del plano (o planos) que contienen al eje OX y distan 6 unidades del punto $(0, 10, 0)$.

    Solución: Dos planos: $3y + 4z = 0, 3y - 4z = 0$.

20. Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{-1}$$

    y que corta al eje X en el punto de abscisa 3.

    Solución: $2x + 3y - z - 6 = 0$.

21. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

    y perpendicular al plano $x - y + z = 0$.

    Solución: $4x + 3y - z - 8 = 0$.

22. Sea el punto $A(1,1,3)$ y la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

Hallar:

- Ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A.
- La intersección de este plano con r.
- La distancia de A a r.

Solución: $x + y + 2z - 8 = 0$; $(1,3,2)$; $\sqrt{5}$.

23. Determinar un punto de la recta:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$$

que equidiste de los planos $3x + 4y - 1 = 0, 4x - 3z - 1 = 0$. ¿Es única la solución?.

Solución: Dos puntos: $(\frac{19}{8}, \frac{17}{16}, -\frac{5}{8}), (\frac{3}{10}, -\frac{41}{20}, -\frac{27}{10})$

24. Dada la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

y los puntos $A(2,1,0), B(1,1,2)$:

- ¿Son paralelas las rectas AB y r?.
- Determinar un punto C de r tal que $\vec{CA}$ y $\vec{CB}$ sean perpendiculares.

Solución: No; Hay dos puntos: $(1,2,1)$ y $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3})$.

25. Dada la recta:

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$$

y el punto $P(1,2,1)$, calcular:

- Las ecuaciones de la recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a r.
- El punto de intersección de r y s.
- Las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

Solución:

- $\frac{x-1}{-7} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$.
- $(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$.
- $(-\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$.

26. Dada la recta r de ecuación:
$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$
y el punto $P(1, 2, -2)$. Hallar las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

Solución: $(\frac{13}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{16}{7})$.

27. Para cada número real λ se considera el plano:
$$\pi_\lambda = (1+2\lambda)x + (1-\lambda)y + (1+3\lambda)z + 2\lambda - 1 = 0$$
Demostrar que todos los planos π_λ pasan por una recta r. Encontrar dicha recta asi como la distancia de la recta r anterior a la recta:
$$r' \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$$
Solución:
$$r \equiv \begin{cases} x = -3 - 4t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad ; \quad d(r, r') = \frac{19\sqrt{35}}{35}$$

28. El espacio euclídeo tridimensional E está referido a una base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ formada por vectores unitarios que forman entre sí ángulos de $\frac{\pi}{3}$. Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\vec{u} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$ y $\vec{v} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}$.

Solución: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

29. Calcular los valores de x e y para que el vector $(x, y, 1)$ sea ortogonal a los vectores $(3, 2, 0)$ y $(2, 1, -1)$.

Solución: $x = 2$ y $y = -3$.

30. Hallar la ecuación del plano que es perpendicular al vector $\vec{v} = (2, 1, -4)$ y pasa por el punto $P(-3, 2, 4)$.

Solución: $2x + y - 4z + 20 = 0$.

31. Dado el tetraedro de vértices:
$$A(4, 0, 0) \quad ; \quad B(0, 3, 0) \quad ; \quad C(0, 0, 2) \quad ; \quad D(3, 2, 4)$$
Hallar:

(1) La longitud de la arista AB.

(2) Ecuación de la cara ABC.

(3) Ecuación de la arista AD.

(4) Ecuación del plano que pasa por la arista AB y el punto medio de la arista opuesta.

(5) Ángulo que forman las aristas AC y AB.

(6) Ecuación del plano que pasa por la arista AB y es perpendicular a la cara ABC.

(7) Ecuación de la recta que pasa por el vértice D y es perpendicular a la cara ABC.

(8) Longitud de la altura relativa al vértice D.

(9) Ángulo de las caras ABC y ACD.

(10) Ángulo de la arista AD y la cara ABC.

(11) Volumen del tetraedro.

Solución:

(1) 5

(2) $3x + 4y + 6z - 12 = 0$

(3) $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{-4}$

(4) $18x + 24y + 7z - 72 = 0$

(5) $\arccos\left(\dfrac{8\sqrt{5}}{25}\right)$

(6) $18x + 24y - 25z - 72 = 0$

(7) $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-4}{6}$

(8) $\dfrac{29}{\sqrt{61}}$

(9) $\arccos\left(\dfrac{2}{\sqrt{61}\sqrt{69}}\right)$

(10) $\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{29}{\sqrt{61}\sqrt{21}}\right)$

(11) $\dfrac{29}{3}$

32. Hallar sobre la recta:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 11 = 0 \\ 2x - y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

un punto P equidistante de los puntos $P_1(0,1,1)$ y $P_2(1,2,1)$.

Solución: $P(3,-1,2)$.

33. Dadas las rectas:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{3} \quad ; \quad \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{2}$$

Demostrar que se cortan y hallar el punto de intersección, el ángulo que forman y la ecuación del plano que determinan.

Solución: $P(7,6,5)$; $\alpha=\arccos\left(\frac{14}{3\sqrt{22}}\right)$; $x-z-2=0$.

34. Hallar las coordenadas del punto P de la recta:

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z+4}{3}$$

que equidista del punto $Q(3,2,1)$ y del origen de coordenadas.

Solución: $P(1,1,2)$.

35. Hallar el ángulo que forma la recta:

$$r\equiv\begin{cases}3x-y-z+1=0\\ x+2y-3z=0\end{cases}$$

y el plano $\pi\equiv 2x-y+4z-2=0$.

Solución: $\alpha=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{10}{\sqrt{322}}\right)$

36. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(2,1,-3)$ y $P_2(4,2,1)$ y es perpendicular al plano de ecuación:

$$2x-y-z+3=0$$

Solución: $3x+10y-4z-28=0$.

37. Se tiene un paralelogramo uno de cuyos vértices es el punto $(3,2)$ y dos de cuyos lados se encuentran contenidos, respectivamente, en las rectas r y s de ecuaciones

$$r\equiv 2x+3y-7=0, \quad s\equiv x-3y+4=0$$

Hallar las ecuaciones de las rectas sobre las que se encuentran los otros dos lados.

Solución: $2x+3y-12=0$, $x-3y+3=0$.

38. Se consideran los puntos $A(2,-1,-2)$ y $B(-1,-1,2)$.

    (1) Determinar los puntos del segmento AB que lo dividen en tres segmentos iguales.

    (2) Encontrar un punto C sobre la recta r de ecuaciones

    $$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

    de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en C.

    <u>Solución</u>: $A_1\left(1,-1,-\frac{2}{3}\right)$, $A_2\left(0,-1,\frac{2}{3}\right)$. Dos soluciones para C que son $C_1\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$, $C_2\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0\right)$.

39. Un punto M se mueve en el espacio tridimensional de manera que en un instante de tiempo t se encuentra en el punto $(1+t,3+t,6+2t)$.

    (1) ¿Es esta trayectoria una línea recta?. Si es así, escribir sus ecuaciones de dos formas distintas.

    (2) Hallar el instante de tiempo en el que el punto está en el plano dado por la ecuación $x-2y+z-7=0$.

    (3) Hallar la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la trayectoria de M y pasa por el punto $(1,1,0)$.

    <u>Solución</u>: Sí, $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3+t \\ z = 6+2t \end{cases}$, $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-6}{2}$; a los $t=6$ seg.; $\dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-4}$.

40. Se considera el punto $P(-1,2,1)$.

    (1) Determinar un punto Q del plano $\pi \equiv -3x+y+z+5=0$ de forma que el vector PQ sea perpendicular al plano π.

    (2) Determinar un punto M de la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-10}{-1}$ de forma que el vector MP sea paralelo al plano π.

    (3) Calcular el área del triángulo MPQ.

    <u>Solución</u>: $Q(2,1,0)$, $M(1,0,9)$, Superficie $= 3\sqrt{22}$.

41. Definir el producto escalar de vectores de $\mathbb{R}^3$ y enunciar tres de sus propiedades. Encontrar un vector $\vec{w}$ cuya primera componente sea 2 y que sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1,-1,3)$ y $\vec{v} = (0,1,-2)$.

    <u>Solución</u>: $\vec{w} = (2,-4,-2)$.

42. ¿Cuál es el punto P de la recta r dada por

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

que está más cerca del punto $A(2, 3, -1)$?. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son A, P y $B(1, 0, 0)$.

Solución: $P\left(1, \frac{14}{5}, -\frac{7}{5}\right)$, Superficie $= \frac{7\sqrt{6}}{10}$.

43. Sea π el plano que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 1, 1)$. Sea A el punto $(1, 2, 3)$ y sea B el simétrico de A respecto del plano π. Hallar la recta que pasa por A y por el punto medio del segmento AB. Calcular la recta paralela a la anterior que pasa por el punto $(2, 2, 2)$.

Solución: $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$, $\frac{x-2}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

44. Sea A la matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{pmatrix}$$

Hallar a, b, c y d sabiendo que:

(I) El vector cuyas coordenadas son las que aparecen en la primera columna de A es ortogonal al vector $(1, -1, 1)$.

(II) El producto vectorial del vector cuyas coordenadas son los de la tercera columna de A por el vector $(1, 0, 1)$ es el vector $(-2, 3, 2)$.

(III) El rango de la matriz A es 2.

Solución: $a = -\frac{6}{5}$, $b = -2$, $c = 1$, $d = -4$.

45. Un objeto se mueve en el espacio siguiendo una línea recta cuya dirección viene dada por el vector $\vec{v} = (1, 2, -1)$. En su movimiento, dicho objeto pasa por el punto $A(2, 1, 2)$.

(1) Calcular los puntos de corte de la trayectoria del objeto con los planos coordenados.

(2) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a dicha trayectoria.

(3) ¿Cuál es el ángulo que forma la trayectoria del objeto con el plano OXY?.

Solución: $(0, -3, 4)$, $\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}\right)$, $(4, 5, 0)$; $x + 2y - z = 0$; $\phi = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

46. Se considera el plano π y la recta r dados por

$$\pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0, \quad r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$$

(1) Hallar los valores de a y b para los que r está contenida en π.

(2) ¿Existen algún valor de a y algún valor de b para los que la recta dada r es perpendicular al plano π?.

Solución: $a = 3$, $b = -23$; Ninguno.

47. Un paralelogramo cuyo centro es $M\left(\frac{3}{2}, 3, 4\right)$ tiene por vértices los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(3, 2, 5)$.

(1) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices.

(2) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por M y es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo.

(3) Calcular el área del paralelogramo.

Solución: $C(2, 4, 5)$, $D(0, 4, 3)$; $r \equiv \dfrac{x - \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$; Superficie $= 6$.

48. Hallar el punto Q simétrico del punto $P(2, 0, 1)$ respecto de la recta r que pasa por el punto $A(0, 3, 2)$ y es paralela a la recta s de ecuaciones

$$s \equiv \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Solución: $Q\left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5}, 3\right)$.

49. Sea π el plano de ecuación $\pi \equiv 3x - 2y - 6z = 1$ y sea r la recta dada en forma vectorial por

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(2, -1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(1) ¿Cómo se define la relación de paralelismo entre una recta y un plano?.

(2) En el caso concreto de la recta r y el plano π, comprobar si son paralelos.

(3) ¿Cómo se define la relación de perpendicularidad entre una recta y un plano?.

(4) En el caso concreto de la recta r y el plano π, comprobar si son perpendiculares.

Solución: No son paralelos ni perpendiculares.

50. **Selectividad Junio 2000**. Los puntos $A(3,3,5)$ y $B(3,3,2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $ABCD$. El vértice C consecutivo de B está en la recta de ecuaciones $x = \dfrac{y-6}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$. Determinar los vértices C y D.

    Solución: $C\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2}, 2\right)$, $D\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2}, 5\right)$.

51. **Selectividad Septiembre 2000**. Calcular el punto de la recta de ecuaciones

    $$x - 1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-3}$$

    más cercano al punto $A(1,-1,1)$.

    Solución: $P\left(\dfrac{5}{7}, -\dfrac{18}{7}, -\dfrac{1}{7}\right)$.

52. **Selectividad Junio 2001**. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,0,-1)$, es perpendicular al plano $x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

    Solución: $2x - 4y - 3z - 5 = 0$.

53. **SL**. Hallar la distancia entre el origen de coordenadas y la recta intersección de los planos de ecuaciones respectivas $x + y + 2z = 4$ y $2x - y + z = 2$.

    Solución: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

54. **SL**. Calcular las coordenadas del punto simétrico del $(1,-3,7)$ respecto de la recta dada por las ecuaciones

    $$x - 1 = y + 3 = \frac{z-4}{2}$$

    Solución: $P(3,-1,5)$

55. **SL**. Hallar las ecuaciones de la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas r y s definidas respectivamente por

    $$x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{-2}, \quad \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$$

    Solución: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$

56. **SL**. Calcular el volumen de un cubo sabiendo que dos de sus caras están, respectivamente, en los planos $2x - 2y + z - 1 = 0$ y $2x - 2y + z - 5 = 0$.

    Solución: $\frac{64}{27}$

57. **SL**. Hallar las coordenadas del punto simétrico del $(1, 2, -2)$ respecto del plano de ecuación

    $$3x + 2y + z - 7 = 0$$

    Solución: $P\left(\frac{13}{7}, \frac{18}{7}, -\frac{12}{7}\right)$

58. **SL**. Hallar la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es $(-1, 2, 1)$

    Solución: $x - 2y - z + 6 = 0$

59. **SL**. Consideremos los puntos

    $$A(1, 0, 3), \quad B(3, -1, 0), \quad C(0, -1, 2), \quad D(a, b, -1)$$

    Hallar a y b sabiendo que la recta que pasa por A y B corta perpendicularmente a la recta que pasa por C y D.

    Solución: $a = -\frac{27}{4}$, $b = -\frac{11}{2}$

60. **SL**. Consideremos los planos

    $$\pi_1 \equiv 2x + 5 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv 3x + 3y - 4 = 0$$

    ¿Qué ángulo determinan ambos planos?. Hallar el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos dados.

    Solución: $\frac{\pi}{4}$ rad., $z = 0$

61. **SL**. Sea r la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$

    a) Hallar los puntos de r cuya distancia al origen es de 7 unidades.

    b) Calcular la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1, 2, -1)$

    Solución: $P(2, -3, -6)$, $Q(-2, 3, 6)$, $2x - 3y - 6z - 2 = 0$

62. **SL**. Calcular las coordenadas del punto simétrico de $A(0, -1, 1)$ respecto de la recta dada por las ecuaciones

    $$\frac{x - 5}{2} = y = \frac{z - 2}{3}$$

    Solución: $A'(6, -1, -3)$

63. **SL**. Calcular el punto de la recta $x = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$ que equidiste del punto $A(1,2,1)$ y del origen de coordenadas.

    Solución: $(1,0,2)$

64. **SL**. Consideremos el plano $2x + y + 2z - 4 = 0$

    a) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano dado con los ejes coordenados.

    b) Calcular la distancia del origen al plano dado.

    Solución: 6, $\frac{4}{3}$

65. **SL**. Determinar todos los puntos del plano $\pi \equiv 2x - y + 2z - 1 = 0$ que equidisten de los puntos $A(3,0,-2)$ y $B(1,2,0)$. ¿Qué representan geométricamente?

    Solución: $P(x,y,z)$, con $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = -3 - 4t \\ z = t \end{cases}$. Una recta, intersección del plano mediatriz del segmento AB con el plano π.

66. **SL**. Consideremos los puntos $A(1,2,3)$, $B(3,2,1)$ y $C(2,0,2)$. Hallar el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano que contiene a A, B y C.

    Solución: $O'(4,0,4)$

67. **Selectividad Junio 2002**. Calcular el área del triángulo de vértices

$$A(1,1,2), \quad B(1,0,-1), \quad C(1,-3,2)$$

    Solución: 6

68. **Selectividad Junio 2003**. Consideremos los vectores

$$\vec{u} = (1,1,1), \quad \vec{v} = (2,2,a), \quad \vec{w} = (2,0,0)$$

    a) Hallar los valores de a para los que los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente independientes.

    b) Determinar los valores de a para los que los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{w}$ son ortogonales.

    Solución: $a \neq 2$; $a = -1$.

69. **Selectividad Junio 2003**. Sabiendo que las rectas

$$r \equiv x = y = z \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

se cruzan, hallar los puntos A y B, de r y s respectivamente, que están a mínima distancia.
Solución: $A(1,1,1)$, $B(0,2,1)$.

70. **Selectividad Junio 2003**. Determinar el punto P de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{3}$ que equidista de los planos

$$\pi_1 \equiv x+y+z+3=0 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6-\mu \end{cases}$$

Solución: $P(-1,-2,-3)$

71. **Selectividad Septiembre 2003**. Se sabe que los puntos $A(1,0,-1)$, $B(3,2,1)$ y $C(-7,1,5)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo $ABCD$.

    a) Calcular las coordenadas del punto D.
    b) Hallar el área del paralelogramo.

    Solución: $D(-9,-1,13)$; Superficie $= 2\sqrt{302}$.

72. **Selectividad Septiembre 2003**. Los puntos $A(1,1,0)$ y $B(2,2,1)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $ABCD$. Además, se sabe que los vértices C y D están contenidos en una recta que pasa por el origen de coordenadas. Hallar C y D.
Solución: $C\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$, $D\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

73. **Selectividad junio 2004**. Sean los puntos $A(1,2,1)$, $B(2,3,1)$, $C(0,5,3)$ y $D(-1,4,3)$.

    a) Probar que los cuatro puntos están en un mismo plano. Hallar la ecuación de dicho plano.
    b) Demostrar que el polígono de vértices consecutivos $ABCD$ es un rectángulo.
    c) Calcular el área de dicho rectángulo.

    Solución: $x-y+2z-1=0$, Superficie $= 2\sqrt{6}$

74. **Selectividad junio 2004**. Dados los vectores $\vec{u}=(2,1,0)$ y $\vec{v}=(-1,0,1)$, hallar un vector unitario $\vec{w}$ que sea coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.
Solución: Dos soluciones, $\vec{w} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$

75. **Selectividad septiembre 2004**. Se sabe que el triángulo ABC es rectángulo en el vértice C, que pertenece a la recta intersección de los planos $y+z=1$ e $y-3z+3=0$, y que sus otros dos vértices son $A(2,0,1)$ y $B(0,-3,0)$. Hallar C y el área del triángulo ABC.
Solución: $C(0,0,1)$, superficie $= \sqrt{10}$.

76. **Selectividad septiembre 2004**. Hallar la perpendicular común a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = \beta - 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

<u>Solución</u>: $p \equiv \left\{ \begin{array}{r} x + y - 2 = 0 \\ z = -1 \end{array} \right\}$

77. **Selectividad junio 2005**. Considera el punto $P(2,0,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$

   a) Hallar la ecuación del plano que contiene a P y a r.

   b) Calcular el punto simétrico de P respecto de la recta r.

<u>Solución</u>: $x + 2y - 4z + 2 = 0$, Punto simétrico $\left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5}, 3\right)$.

78. **Selectividad junio 2005**. Sean los vectores $\vec{v_1} = (0,1,0)$, $\vec{v_2} = (2,1,-1)$, $\vec{v_3} = (2,3,-1)$.

   a) ¿Son los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$ linealmente dependientes?.

   b) ¿Para qué valores de a el vector $(4, a+3, -2)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$?.

   c) Calcular un vector unitario y perpendicular a $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$.

<u>Solución</u>: Sí; $\forall a \in \mathbb{R}$; $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

79. **Selectividad septiembre 2005**. Consideremos el plano π y la recta r de ecuaciones:

$$\pi \equiv x + y + mz = 3, \quad r \equiv x = y - 1 = \frac{z-2}{2}$$

   a) Hallar m para que r y π sean paralelos.

   b) Hallar m para que r y π sean perpendiculares.

   c) ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π?.

<u>Solución</u>: $m = -1$; $m = 2$; No.

80. **Selectividad septiembre 2005**. Sean los planos:

$$\pi_1 \equiv 2x + y - z + 5 = 0, \quad \pi_2 \equiv x + 2y + z + 2 = 0$$

a) Calcular las coordenadas de un punto P, sabiendo que está en el plano π_1 y que su proyección ortogonal sobre el plano π_2 es el punto $(1, 0, -3)$.

b) Calcular el punto simétrico de P respecto del plano π_2.

Solución: $P\left(-\frac{7}{3}, -\frac{20}{3}, -\frac{19}{3}\right)$; $\left(\frac{13}{3}, \frac{20}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

81. **Selectividad junio 2006**. Consideremos el plano π y la recta r de ecuaciones:

$$\pi \equiv 2x + y - z + 2 = 0, \quad r \equiv \frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$$

a) Hallar la posición relativa de r y π según los valores del parámetro m.

b) Para $m = -3$, hallar el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

c) Para $m = -3$, hallar el plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

Solución: si $m = -3$, $r \parallel \pi$, en caso contrario $(m \neq -3)$, la recta y el plano se cortan en un punto; $x - 4y - 2z + 7 = 0$; $2x + y - z - 4 = 0$.

82. **Selectividad junio 2006**. Consideremos el punto $P(3, 2, 0)$ y la recta r de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación del plano que contiene a P y a la recta r.

b) Determinar las coordenadas del punto Q, simétrico de P respecto de la recta r.

Solución: $x + 2y - 4z - 7 = 0$; $Q(-1, 0, -2)$.

83. **Selectividad septiembre 2006**. Determinar los puntos de la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-3}{2} \end{cases}$$

que equidistan de los planos $\pi \equiv x + z = 1$, $\pi' \equiv y - z = 3$.

Solución: $P_1(0, 4, 9)$, $P_2\left(0, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

84. **Selectividad septiembre 2006**. Considera los puntos $A(1, 0, -2)$ y $B(-2, 3, 1)$.

a) Determinar los puntos del segmento AB que lo dividen en tres partes iguales.

b) Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C, donde C es un punto de la recta de ecuación $-x = y - 1 = z$. ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto C?.

Solución: $P_1(0, 1, -1)$, $P_2(-1, 2, 0)$; superficie $= \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$; No.

85. **Selectividad junio 2007**. Consideremos los planos de ecuaciones $x - y + z = 0$ y $x + y - z = 2$.

a) Determina la recta que pasa por el punto $A(1, 2, 3)$ y no corta a ninguno de los planos dados.

b) Determina los puntos que equidistan de $A(1, 2, 3)$ y $B(2, 1, 0)$ y pertenecen a la recta intersección de los planos dados.

Solución: $r \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$. Un único punto: $P\left(1, \frac{17}{8}, \frac{9}{8}\right)$.

86. **Selectividad junio 2007**. Considera los puntos $A(0, 3, -1)$ y $B(0, 1, 5)$.

a) Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices A, B y $C(x, 4, 3)$ tiene un ángulo recto en C.

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0, 1, 5)$ y $(3, 4, 3)$ y es paralelo a la recta r definida por las ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

Solución: $x = \pm\sqrt{5}$, $\pi \equiv 13x - 7y + 9z - 38 = 0$.

87. **Selectividad septiembre 2007**. Hallar los dos puntos que dividen al segmento de extremos $A(1, 2, 1)$ y $B(-1, 0, 3)$ en tres partes iguales. Determinar la ecuación del plano perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio

Solución: $X_1\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$, $X_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$; $x + y - z + 1 = 0$.

88. **Selectividad junio 2008**. Dada la recta r definida por

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$$

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r.

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r.

Solución: $7x - 3y - 5z = 0$, $2x + 3y + z = 0$

89. **Selectividad junio 2008**. Dados los puntos $A(2,1,1)$ y $B(0,0,1)$, hallar los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.

    Solución: dos soluciones, $C(\pm\sqrt{11},0,0)$

90. **Selectividad septiembre 2008**. Dada la recta s definida por

$$s \equiv \begin{cases} x - z = -1 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

   a) Hallar la ecuación del plano π_1 que es paralelo a s y contiene a la recta $r \equiv x - 1 = -y + 2 = z - 3$.

   b) Estudiar la posición relativa de la recta s y el plano $\pi_2 \equiv x + y = 3$, y deducir la distancia entre ambos.

    Solución: $\pi_1 \equiv x - z + 2 = 0$; π_2 y s se cortan, luego $d(s,\pi_2) = 0$.

91. **Selectividad septiembre 2008**. Dados los puntos

$$A(1,1,0),\ B(1,1,2),\ C(1,-1,1)$$

   a) Comprobar que no están alineados y calcular el área del triángulo que determinan.

   b) Hallar la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta determinada por B y C.

    Solución: área $= 2$, $\pi \equiv 2y + z = 2$.

92. **Selectividad junio 2009**. Se consideran las rectas r y s definidas como:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu - 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

    Hallar la ecuación de la perpendicular común a r y a s.

    Nota: este problema es idéntico al 18 y 76.

    Solución: $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{0}$

93. **Selectividad junio 2009**. Consideremos la recta r definida por $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$.

   a) Estudiar la posición relativa de r y s.

b) Determinar un punto C de la recta r tal que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ sean perpendiculares.

Solución: Se cortan. Dos soluciones: $C(2,0,0)$, $C(1,1,-1)$.

94. **Selectividad septiembre 2009**. Se consideran las rectas r y s definidas como:

$$r \equiv \begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} 2y+1=0 \\ x-2z+3=0 \end{cases}$$

a) Determinar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s?. Razonar la respuesta.

Solución: $\pi \equiv x+3y-2z-5=0$. No.

Capítulo 13

Circunferencia

1. Identificar los gráficos de

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 - 4x + y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4y + 7 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10 = 0 \end{aligned}$$

   Solución: Circunferencia con centro en $C(1, -\frac{1}{4})$, $r = \frac{3}{4}$; $\emptyset$; el punto $(3, 1)$.

2. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(2, 3)$ y que pasa por el punto $P(-1, 5)$.

   Solución: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$

3. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(3, 8)$, $Q(9, 6)$ y $R(13, -2)$.

   Solución: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 100$

4. Hallar el centro y el radio de la circunferencia que pasa por $P(1, 1)$ y es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $Q(3, 3)$.

   Solución: $C(-1, 5)$, $r = \sqrt{20}$.

5. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(1, -1)$, $Q(3, 1)$ y es tangente a la recta $y = -3x$

   Solución: Dos soluciones: $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{2}$, $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 10$.

6. **Selectividad Junio 2000**. Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, 6)$ y $B(5, 2)$ y tiene su centro sobre la recta $y = 2x$.

   Solución: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$

7. **Selectividad Septiembre 2000**.

a) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(0, 2)$, $(0, -2)$ y $(-1, 1)$.

b) Determinar los valores de m tales que el punto $(3, m)$ esté en la circunferencia determinada en el apartado anterior.

Solución: $(x-1)^2 + y^2 = 5$; $m = \pm 1$.

8. **SL**. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas de ecuaciones respectivas

$$2x - y - 4 = 0 \quad \text{y} \quad x - 2y + 3 = 0$$

y es tangente a la recta $x - 3y + 3 = 0$. Calcular el punto de tangencia.
Solución: $(x - \frac{11}{3})^2 + (y - \frac{10}{3})^2 = \frac{10}{9}$, $P(4, \frac{7}{3})$.

9. **SL**. Determinar el centro y el radio de la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas, tiene su centro en el semieje positivo de abscisas y es tangente a la recta de ecuación $x + y = 1$.
Solución: $C(\sqrt{2} - 1, 0)$, $r = \sqrt{2} - 1$.