Apuntes

MATEMÁTICAS

TEMA 1

Sistemas de Ecuaciones. Método de Gauss.

TEMA 1: Sistemas de Ecuaciones. Método de Gauss

ÍNDICE

1. **1.** Introducción.
2. **2.** Ecuaciones lineales.
3. **3.** Sistemas de ecuaciones lineales.
4. **4.** Sistemas de ecuaciones escalonado ó en forma triangular.
5. **5.** Métodos Algebraicos de resolución de un sistema: sustitución, método de Gauss,...
6. **6.** Sistemas Homogéneos.
7. **7.** Problemas.
8. **8.** Ejercicios

1. Introducción.

Los sistemas de ecuaciones aparecen de forma natural en nuestra vida. Los métodos de solución de sistemas de ecuaciones son un recurso muy útil para resolver diversas situaciones de la vida que pueden ser traducidas a un modelo matemático y así ser solucionadas.

Los métodos que utilizaremos para resolver sistemas de ecuaciones lineales serán sobre todo el Método de Gauss y el de Sustitución.

La parte final del tema se dedicará a la resolución de problemas de sistemas.

La resolución de sistemas de ecuaciones dependientes de un parámetro se explicará en el Tema 3 cuando se haya estudiado el concepto de rango de una matriz.

2. Ecuaciones lineales.

Una ecuación lineal con n incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ se expresa de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, donde $a_1, a_2, ..., a_n$, son los coeficientes y números reales, siendo b el término independiente y un número real. Se resuelven despejando una de las incógnitas.

Ejemplo

1. Encontrar las soluciones de las siguientes ecuaciones lineales $\begin{array}{l} a)\ x+3y=6 \\ b)\ 2x-y+5z=-4 \\ c)\ 5x-2y+11z+5w=6 \end{array}$

Solución

$$a)\ \boxed{x+3y=6} \Rightarrow x = 6-3y \Rightarrow \begin{cases} x = 6-3\lambda \\ y = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$b)\ \boxed{2x-y+5z=-4} \Rightarrow 2x = -4+y-5z \Rightarrow x = \frac{-4+y-5z}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-4+\lambda-5\mu}{2} \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$c)\ \boxed{5x-2y+11z+5w=6} \Rightarrow 5x = 6+2y-11z-5w \Rightarrow x = \frac{6+2y-11z-5w}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6+2\lambda-11\mu-5\gamma}{5} \\ y = \lambda \\ z = \mu \\ w = \gamma \end{cases} \quad \lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$$

3. Sistemas de ecuaciones lineales.

Un sistema de ecuaciones lineales esta compuesto por o más ecuaciones lineales.

Ejemplo: $\begin{cases} 3x+2y=3 \\ x+y=-5 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ x+y-2z=-5 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y=7 \\ x+y=-5 \\ x+y=16 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+2y+z=7 \\ 2x+y-4z=-5 \\ -5x+2y=16 \end{cases}$

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar, si existen, los valores de las incógnitas que verifiquen simultáneamente todas las ecuaciones del sistema.

Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales según su solución:

$$\text{Sistemas} \begin{cases} \text{Compatibles (tienen solución)} \begin{cases} \text{Determinados (única solución) S.C.D.} \\ \text{Indeterminados (infinitas soluciones) S.C.I.} \end{cases} \\ \text{Incompatibles (no tienen solución) S.I.} \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones equivalentes: son aquellos que tienen la misma solución.

Criterios de equivalencia:

- Criterio 1: Si se multiplican o divide los dos miembros de una ecuación de un sistema por un número real distinto de cero, resulta otro sistema equivalente al dado.
- Criterio 2: Si se intercambian entre sí dos ecuaciones resulta un sistema equivalente.
- Criterio 3: Si a una ecuación de un sistema se le suma otra ecuación del mismo sistema, este resulta equivalente al dado.

4. Sistemas de ecuaciones escalonados ó en forma triangular.

Un sistema es escalonado si en cada ecuación hay una incógnita menos que en la anterior.

Para resolver estos sistemas se despeja una incógnita de la última ecuación y se utiliza para hallar otra incógnita en la penúltima ecuación y así hasta hallar todas las incógnitas.

Ejemplo

1. Resuelve los siguientes sistemas escalonados

$$\begin{cases} x-3y+z=-2 \\ 3y+2z=15 \\ 4z=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+2z=-3 \\ y+2z=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+z+w=1 \\ y+2z+3w=-2 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} x-3y+z=-2 \\ 3y+2z=15 \\ 4z=12 \end{cases} \underset{\text{Empezamos resolviendo la última ecuación}}{\Rightarrow} \begin{cases} x-3y+z=-2 \xrightarrow{y=3\quad z=3} x-3\cdot3+3=-3 \Rightarrow x-9+3=-2 \Rightarrow \boxed{x=4} \\ 3y+2z=15 \xrightarrow{z=3} 3y+2\cdot3=15 \Rightarrow 3y+6=15 \Rightarrow \boxed{y=3} \\ 4z=12 \Rightarrow \boxed{z\ =3} \nearrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+2z=-3 \\ y+2z=-2 \end{cases} \underset{\text{Empezamos resolviendo la última ecuación}}{\Rightarrow} \begin{cases} x-y+2z=-3 \xrightarrow{y=-2-2z} x-(-2-2z)+2z=-3 \Rightarrow x+2+2z+2z=-3 \Rightarrow \boxed{x=-5-4z} \\ y+2z=-2 \longrightarrow \boxed{y=-2-2z} \end{cases}$$

$$Solución \Rightarrow \begin{cases} x=-5-2\lambda \\ y=-2-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x-y+z+w=1 \\ y+2z+3w=-2 \end{cases} \underset{\text{Empezamos resolviendo la última ecuación}}{\Rightarrow} \begin{cases} x-y+z+w=1 \xrightarrow{y=-2z-2w} x-(-2z-2w)+z+w=1 \Rightarrow x+2z+2w+z+w=1 \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow x+3z+3w=1 \Rightarrow \boxed{x=1-3z-3w} \\ y+2z+3w=-2 \longrightarrow \nwarrow \boxed{y=-2z-2w} \end{cases}$$

$$Solución \Rightarrow \begin{cases} x=1-3\lambda-3\mu \\ y=-2\lambda-2\mu \\ z=\lambda \\ w=\mu \end{cases} \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

5. Métodos Algebraicos de resolución de un sistema: sustitución, método de Gauss,...

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales podemos utilizar alguno de los siguientes métodos: (los ejercicios los haré por el Método de Gauss o por Sustitución)

- **Sustitución**: Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones y se sustituye su valor en las otras dos. Se agrupan términos y se repite de nuevo el proceso hasta obtener una solución.
- **Igualación**: Se despeja la misma incógnita en todas las ecuaciones y se igualan en función de la incógnita despejada. Se agrupan términos y se repite el proceso de nuevo hasta obtener una solución.
- **Reducción**: Se multiplica o divide por un número una de las ecuaciones y se suma o resta, miembro a miembro, con otra de ellas para eliminar una de las incógnitas del sistema; luego, se repite el proceso hasta obtener una solución.
- **Método de Gauss**: consiste en transformar el sistema en uno equivalente escalonado.

Ejemplo

1) Resolver el sistema: $\begin{cases} x-y-2z=-3 \\ 2x+y+z=3 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$ por el Método de Gauss.

Solución:

$$\begin{cases} E_1 & x-y-2z=-3 \\ E_2 & \boxed{2x}+y+z=3 \\ E_3 & \boxed{x}+2y+z=0 \end{cases} \underset{\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet E_2-2\cdot E_1 \\ \bullet E_3-E_1\end{smallmatrix}}}{\Rightarrow} \begin{cases} E_1 & x-y-2z=-3 \\ E_2 & 3y+5z=9 \\ E_3 & \boxed{3y}+3z=3 \end{cases} \underset{\boxed{\bullet E_3-E_2}}{\Rightarrow} \begin{cases} x-y-2z=-3 \\ 3y+5z=9 \\ -2z=-6 \end{cases}$$

$*$Tenemos el siguiente sistema escalonado,empezamos resolviendo la última ecuación

$$\begin{cases} x-y-2z=-3 \xrightarrow{y=-2 \quad z=3} x-(-2)-2\cdot 3=-3 \Rightarrow x+2-6=-3 \Rightarrow \boxed{x=1} \\ 3y+5z=9 \xrightarrow{z=3} 3y+5\cdot 3=9 \Rightarrow 3y+15=9 \Rightarrow \boxed{y=-2} \\ -2z=-6 \Rightarrow \boxed{z=3} \nearrow \end{cases}$$

Sistema Compatible Determinado

2) Resolver el sistema: $\begin{cases} 5x+6y+z=4 \\ 4x-7y-z=13 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ por el Método de Sustitución.

Solución:

- Paso 1. Despejar una variable en una de las ecuaciones. Despejamos la variable x en la primera ecuación: $\boxed{x=\frac{4-6y-z}{5}}$

- Paso 2. Sustituir la variable x por la expresión en las demás ecuaciones:

$$\boxed{\begin{cases} 4\cdot(\frac{4-6y-z}{5})-7y-z=15 \\ \frac{4-6y-z}{5}+y+z=1 \end{cases}}$$

- Paso 3. Agrupar los términos correspondientes a cada incógnita y los términos independientes en cada una de las nuevas ecuaciones.

$$\boxed{\begin{cases} 4\cdot(\frac{4-6y-z}{5})-7y-z=15 \\ \frac{4-6y-z}{5}+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16-24y-4z-35z-5z=75 \\ 4-6y-z+5y+5z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{-59y-9z=59} \\ \boxed{-y+4z=1} \end{cases}}$$

- Paso 4. Despejar una variable en una de las ecuaciones. Por ejemplo, despejo la variable y de la segunda ecuación:

$$\boxed{\begin{cases} -59y-9z=59 \\ -y+4z=1 \quad \Rightarrow -y=1-4z \Rightarrow \boxed{y=-1+4z} \end{cases}}$$

- Paso 5. Sustituir la variable y por la expresión despejada en la otra ecuación y resolver la ecuación.

$$\boxed{\begin{array}{l} -59\cdot(-1+4z)-9z=59 \Rightarrow 59-236z-9z=59 \Rightarrow -236z-9z=59-59 \Rightarrow \\ \Rightarrow -245z=0 \Rightarrow \boxed{z=0} \end{array}}$$

- Paso 6. Encontrar los valores de las otras incógnitas.

$$\boxed{\begin{array}{l} z=0 \underset{\boxed{y=-1+4z}}{\Rightarrow} y=-1+4\cdot 0=-1 \underset{\boxed{x=\frac{4-6y-z}{5}}}{\Rightarrow} x=\frac{4-6\cdot(-1)-0}{5}=\frac{10}{5}=2 \\ \textit{Solución} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases} \end{array}}$$

3) Resolver el sistema: $\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ x+y-2z=-5 \\ 2x+y+3z=16 \end{cases}$ por el Método de Gauss.

Solución:

$$\begin{cases} E_1 & 3x+2y-z=3 \\ E_2 & \boxed{x}+y-2z=-5 \\ E_3 & \boxed{2x}+y+3z=16 \end{cases} \underset{\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet E_1-3\cdot E_2 \\ \bullet E_3-2\cdot E_2\end{smallmatrix}}}{\Rightarrow} \begin{cases} E_1 & 3x+2y-z=3 \\ E_2 & -y+5z=18 \\ E_3 & \boxed{-y}+7z=26 \end{cases} \underset{\boxed{\bullet E_3-E_2}}{\Rightarrow} \begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ -y+5z=18 \\ 2z=8 \end{cases}$$

*Tenemos el siguiente sistema escalonado,empezamos resolviendo la última ecuación

$$\begin{cases} 3x+2y-z=3 \xrightarrow{y=2\quad z=4} 3x+2\cdot2-4=3 \Rightarrow 3x+\cancel{4}-\cancel{4}=3 \Rightarrow \boxed{x=1} \\ -y+5z=18 \xrightarrow{z=4} -y+5\cdot4=18 \Rightarrow -y+20=18 \Rightarrow -y=-2 \Rightarrow \boxed{y=2} \\ 2z=8 \Rightarrow \boxed{z=4} \nearrow \end{cases}$$

Sistema Compatible Determinado

4) Resolver el sistema: $\begin{cases} x+3y+5z=2 \\ 3x+4y-2z=-1 \\ 5x+10y+8z=3 \end{cases}$ por el Método de Gauss.

Solución:

$$\begin{cases} E_1 & x+3y+5z=2 \\ E_2 & \boxed{3x}+4y-2z=-1 \\ E_3 & \boxed{5x}+10y+8z=3 \end{cases} \underset{\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet E_2-3\cdot E_1 \\ \bullet E_3-5E_1\end{smallmatrix}}}{\Rightarrow} \begin{cases} E_1 & x+3y+5z=2 \\ E_2 & -5y-17z=-7 \\ E_3 & \cancel{-5y-17z=-7} \end{cases} \underset{\text{Eliminó la última ecuación}}{\Rightarrow} \begin{cases} x+3y+5z=2 \\ 5y+17z=7 \end{cases}$$

*Tenemos el siguiente sistema escalonado,empezamos resolviendo la última ecuación

$$\begin{cases} x+3y+5z=2 \xrightarrow{y=\frac{7-17z}{5}} x+3\cdot\left(\frac{7-17z}{5}\right)+5z=2 \Rightarrow x+\frac{21-51z}{5}+5z=2 \Rightarrow x=2-\frac{21-51z}{5}-5z \Rightarrow \\ \Rightarrow x=\frac{10-21+51z-25z}{5}=\boxed{\frac{-11+26z}{5}} \\ 5y+17z=7 \longrightarrow 5y=7-17z \Rightarrow \boxed{y=\frac{7-17z}{5}} \end{cases}$$

$$Solución \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-11+26\lambda}{5} \\ y=\dfrac{7-17\lambda}{5} \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

5) Resolver el sistema: $\begin{cases} x-y+5z=3 \\ 2x+2y-z=1 \\ 3x+y+4z=6 \end{cases}$ por el Método de Gauss.

Solución:

$$\begin{cases} E_1 & x-y+5z=3 \\ E_2 & \boxed{2x}+2y-z=1 \\ E_3 & \boxed{3x}+y+4z=6 \end{cases} \underset{\substack{\bullet E_1-2\cdot E_2 \\ \bullet E_3-3\cdot E_1}}{\Rightarrow} \begin{cases} E_1 & x-y+5z=3 \\ E_2 & 4y-11z=-5 \\ E_3 & \boxed{4y}-11z=-3 \end{cases} \underset{\bullet E_3-E_2}{\Rightarrow} \begin{cases} x-y+5z=3 \\ 4y-11z=-5 \\ 0=2 \quad \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Sistema Incompatible (no tiene solución)

6) Resolver el sistema: $\begin{cases} x-5y-2z=6 \\ 2x-3y+z=8 \\ -x+12y+7z=-10 \end{cases}$ por el Método de Gauss.

Solución:

$$\begin{cases} E_1 & x-5y-2z=6 \\ E_2 & \boxed{2x}-3y+z=8 \\ E_3 & \boxed{-x}+12y+7z=-10 \end{cases} \underset{\substack{\bullet E_2-2\cdot E_1 \\ \bullet E_3+E_1}}{\Rightarrow} \begin{cases} E_1 & x-5y-2z=6 \\ E_2 & 7y+5z=-4 \\ E_3 & \cancel{7y+5z=-4} \end{cases} \underset{\substack{\text{Eliminó la} \\ \text{última ecuación}}}{\Rightarrow} \begin{cases} x-5y-2z=6 \\ 7y+5z=-4 \end{cases}$$

∗Tenemos el siguiente sistema escalonado,empezamos resolviendo la última ecuación

$$x-5y-2z=6 \xrightarrow{y=\frac{-4-5z}{7}} x-5\cdot\left(\frac{-4-5z}{7}\right)-2z=6 \Rightarrow x+\frac{20+25z}{7}-2z=6 \Rightarrow x=6-\frac{20+25z}{7}+2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{42-20-25z+14z}{7}=\boxed{\frac{22-11z}{7}}$$

$$7y+5z=-4 \longrightarrow 7y=-4-5z \Rightarrow \boxed{y=\frac{-4-5z}{7}}$$

$$Solución \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{22-11\lambda}{7} \\ y=\dfrac{-4-5\lambda}{7} \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

6. Sistemas Homogéneos.

Un sistema de ecuaciones lineales que tiene <u>todos los términos independientes nulos</u> se llama <u>sistema homogéneo</u>.

Ejemplo: $\begin{cases} x-5y-2z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ -x+12y+7z=0 \end{cases}$

Todos los sistemas homogéneos son <u>siempre compatibles</u>, ya que la solución (0,0,...,0) siempre verifica las ecuaciones del sistema. A esta solución se le llama solución trivial.

$$\text{Sistemas Homogéneos}\left\{ \underset{\text{(Tienen solución)}}{\text{Compatibles}} \left\{ \begin{array}{l} \underset{\text{(Unica solución)}}{\text{Determinados}} \Rightarrow \text{SOLUCIÓN TRIVIAL (0,0,....0) S.C.D.} \\ \underset{\text{(Infinitas soluciones)}}{\text{Indeterminados}} \quad \text{S.C.I.} \end{array} \right. \right.$$

1) Resolver el sistema: $\begin{cases} x-5y+z=0 \\ 2x+4y+3z=0 \\ 3x-2y+3z=0 \end{cases}$.

Solución:

$$\begin{cases} E_1 & x-5y+z=0 \\ E_2 & 2x+4y+3z=0 \\ E_3 & 3x-2y+3z=0 \end{cases} \underset{\boxed{\begin{array}{l}\bullet E_2-2\cdot E_1 \\ \bullet E_3-3\cdot E_1\end{array}}}{\Rightarrow} \begin{cases} E_1 & x-5y+z=0 \\ E_2 & 14y+z=0 \\ E_3 & 13y \quad =0 \end{cases}$$

*Tenemos el siguiente sistema escalonado,empezamos resolviendo la última ecuación

$$\begin{cases} x-5y+z=0 \xrightarrow{y=0 \quad z=0} x-5\cdot 0+0=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \\ 14y+z=0 \xrightarrow{y=0} 14\cdot 0+z=0 \Rightarrow \boxed{z=0} \\ 13y=0 \Rightarrow \boxed{y=0} \nearrow \end{cases}$$

Sistema Compatible Determinado, solución trivial $(x,y,z)=(0,0,0)$

2) Resolver el sistema: $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+4z=0 \\ 3x+y+3z=0 \end{cases}$.

Solución:

$$\begin{cases} E_1 & x+2y-z=0 \\ E_2 & 2x-y+4z=0 \\ E_3 & 3x+y+3z=0 \end{cases} \underset{\boxed{\begin{array}{l}\bullet E_2-2\cdot E_1 \\ \bullet E_3-3\cdot E_1\end{array}}}{\Rightarrow} \begin{cases} E_1 & x+2y-z=0 \\ E_2 & -5y+6z=0 \\ E_3 & \cancel{-5y+6z=0} \end{cases} \underset{\substack{\text{Eliminó la} \\ \text{última ecuación}}}{\Rightarrow} \begin{cases} x+2y-z=0 \\ -5y+6z=0 \end{cases}$$

*Tenemos el siguiente sistema escalonado,empezamos resolviendo la última ecuación

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \xrightarrow{y=\frac{6z}{5}} x+2\cdot(\frac{6z}{5})-z=0 \Rightarrow x+\frac{12z}{5}-z=0 \Rightarrow x=z-\frac{12z}{5}=\frac{5z-12z}{5}=\boxed{-\frac{7z}{5}} \\ -5y+6z=0 \longrightarrow -5y=-6z \Rightarrow y=\frac{-6z}{-5} \Rightarrow \boxed{y=\frac{6z}{5}} \end{cases}$$

$$Solución \Rightarrow \left\{ \boxed{x=-\frac{7\lambda}{5} \qquad y=\frac{6\lambda}{5} \qquad z=\lambda} \right. \qquad \lambda\in\mathbb{R} \quad \underset{\text{(infinitas soluciones)}}{\text{Sist. Comp. Indeterminado}}$$

7. Problemas.

Veamos diversos problemas de sistemas de ecuaciones:

1. La suma de tres números es 40. Se sabe que la suma de los dos mayores es igual a tres veces el menor, y que el mayor de los números es ocho unidades inferior a la suma de los dos menores. Halla dichos números

Solución:

$$\begin{cases} Mayor = x \\ Mediano = y \\ Pequeño = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=40 \\ x+y=3z \\ x+8=y+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{E}_1 & x+y+z=40 \\ \mathrm{E}_2 & x+y-3z=0 \\ \mathrm{E}_3 & x-y-z=-8 \end{cases} \underset{\substack{\bullet \mathrm{E}_2-\mathrm{E}_1 \\ \bullet \mathrm{E}_3-\mathrm{E}_1}}{\Rightarrow} \begin{cases} x+y+z=40 \\ \quad -4z=-40 \\ -2y-2z=-48 \end{cases}$$

*Tenemos el siguiente sistema escalonado,empezamos resolviendo la última ecuación

$$\begin{cases} x+y+z=40 \xrightarrow{y=14 \quad z=10} x+14+10=40 \Rightarrow x=40-14-10 \Rightarrow \boxed{x=16} \\ \quad -4z=-40 \Rightarrow \boxed{z=10} \searrow \\ -2y-2z=-48 \xrightarrow{z=10} \Rightarrow -2y-2\cdot 10=-48 \Rightarrow -2y-20=-48 \Rightarrow -2y=-28 \Rightarrow \boxed{y=14} \nwarrow \end{cases}$$

2. Hallar las edades de un padre y de sus dos hijos sabiendo que actualmente las tres suman 88 años; que dentro de 10 años, la suma de las edades que tendrán el padre y el hijo menor será dos años más que el triple de la edad que tendrá el hijo mayor; y que hace 12 años, la suma de las edades que tenía el padre y el hijo mayor era 12 veces la edad que tenía el hijo pequeño.

Solución:

$$\begin{cases} \text{Edad Actual del Padre} = x \\ \text{Edad Actual del Hijo Mayor} = y \\ \text{Edad Actual del Hijo Menor} = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=88 \\ x+10+z+10=3\cdot(y+10)+2 \Rightarrow \\ x-12+y-12=12\cdot(z-12) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=88 \\ x+10+z+10=3y+30+2 \Rightarrow \\ x-12+y-12=12x-144 \end{cases} \begin{cases} \mathrm{E}_1 & x+y+z=88 \\ \mathrm{E}_2 & x-3y+z=12 \\ \mathrm{E}_3 & x+y-12z=-120 \end{cases} \underset{\substack{\bullet \mathrm{E}_2-\mathrm{E}_1 \\ \bullet \mathrm{E}_3-\mathrm{E}_1}}{\Rightarrow} \begin{cases} x+y+z=88 \\ -4y \quad =-76 \\ \quad -13z=-208 \end{cases}$$

*Tenemos el siguiente sistema escalonado,empezamos resolviendo la última ecuación

$$\begin{cases} x+y+z=88 \xrightarrow{y=19 \quad z=16} x+19+16=88 \Rightarrow x=88-19-16 \Rightarrow \boxed{x=53 \text{ años}} \\ -4y \quad =-76 \Rightarrow \boxed{y=19 \text{ años}} \nearrow \\ \quad -13z=-208 \Rightarrow \boxed{z=16 \text{ años}} \nearrow \end{cases}$$

3. Juan y Pedro invierten 12000 euros cada uno. Juan coloca una cantidad A al 4 % de interés (anual), una cantidad B al 5 %, y el resto C al 6 %, mientras que Pedro invierte la cantidad A al 5 %, la B al 6 %, y la C al 4 %. Hallar las cantidades A, B y C, sabiendo que Juan obtiene unos interese anuales de 630 euros, y Pedro obtiene 570 euros.

Solución:

$$\begin{cases} \text{Cantidad A} = x \\ \text{Cantidad B} = y \\ \text{Cantidad C} = z \end{cases}$$

$$\left\{\boxed{\begin{array}{ll} \text{Dinero invertido} & x+y+z=12000 \\ \text{Intereses de Juan} & 0'04x+0'05y+0'06z=630 \\ \text{Intereses de Pedro} & 0'05x+0'06y+0'04z=570 \end{array}}\right. \Rightarrow$$

$*$ Multiplico por cien las dos últimas ecuaciones

$$\begin{cases} E_1 & x+y+z=12000 \\ E_2 & 4x+5y+6z=63000 \\ E_3 & 5x+6y+4z=57000 \end{cases} \underset{\boxed{\begin{smallmatrix}\bullet E_2-4E_1 \\ \bullet E_3-5E_1\end{smallmatrix}}}{\Rightarrow} \begin{cases} & x+y+z=12000 \\ E_2 & y+2z=15000 \\ E_3 & y-z=-3000 \end{cases} \underset{\boxed{\bullet E_3-E_2}}{\Rightarrow} \begin{cases} x+y+z=12000 \\ y+2z=15000 \\ -3z=-18000 \end{cases}$$

$*$Tenemos el siguiente sistema escalonado,empezamos resolviendo la última ecuación

$$\begin{cases} x+y+z=12000 \xrightarrow{y=3000 \quad z=6000} x+3000+6000=12000 \Rightarrow \boxed{x=3000_{€}} \\ y+2z=15000 \xrightarrow{z=6000} y+2\cdot 6000=15000 \Rightarrow \boxed{y=3000_{€}} \nearrow \\ -3z=-18000 \Rightarrow \boxed{z=6000_{€}} \nearrow \end{cases}$$

4. Durante una hora, una agencia de viajes vende un total de 30 billetes de avión con destino a las islas de La Palma, Gran Canaria y Lanzarote. Sabiendo que los billetes para Gran Canaria representan el doble de los emitidos para las otras dos islas, y que los correspondientes a Lanzarote son la mitad de los emitidos para La Palma más cuatro:

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
b) Determinar el número de billetes para cada una de las tres islas.

Solución:

$$\begin{cases} \text{Billetes de avión a La Palma} = x \\ \text{Billetes de avión a Gran Canaria} = y \\ \text{Billetes de avión a Economía} = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=30 \\ 2\cdot(x+z)=y \\ z=\dfrac{x}{2}+4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ 2x-y+2z=0 \\ 2z=x+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{E}_1 & x+y+z=30 \\ \mathrm{E}_2 & 2x-y+2z=0 \\ \mathrm{E}_3 & -x \quad +2z=8 \end{cases} \underset{\boxed{\substack{\bullet \mathrm{E}_2-2\cdot\mathrm{E}_1 \\ \bullet \mathrm{E}_3+\mathrm{E}_1}}}{\Rightarrow} \begin{cases} x+y+z=30 \\ -3y \quad =-60 \\ y+3z=38 \end{cases}$$

*Tenemos el siguiente sistema escalonado,empezamos resolviendo la última ecuación

$$\begin{cases} x+y+z=30 \xrightarrow{y=20 \quad z=6} x+20+6=30 \Rightarrow x=30-20-6 \Rightarrow \boxed{x=4} \\ -3y \quad =-60 \Rightarrow \boxed{y=20} \searrow \\ y+3z=38 \xrightarrow{y=20} 20+3z=38 \Rightarrow 3z=18 \Rightarrow \boxed{z=6} \nearrow \end{cases}$$

5. Una empresa de juguetes fabrica bicicletas, triciclos y coches. Se sabe que va a necesitar 945 ruedas, que desea fabricar 280 juguetes en total y que se fabricarán 10 bicicletas menos que triciclos. Determinar el número de juguetes de cada tipo que va a fabricar.

Solución:

$$\begin{cases} x = \ n^{\mathrm{o}} \ \textit{de bicicletas} \\ y = n^{\mathrm{o}} \ \textit{de triciclos} \\ z = n^{\mathrm{o}} \ \textit{el de coche} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=280 \\ 2x+3y+4z=945 \\ x+10=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{E}_1 \ x+y+z=280 \\ \mathrm{E}_2 \ 2x+3y+4z=945 \\ \mathrm{E}_3 \ x-y=-10 \end{cases} \underset{\boxed{\substack{\bullet \mathrm{E}_2-2\cdot\mathrm{E}_1 \\ \bullet \mathrm{E}_3-\mathrm{E}_1}}}{\Rightarrow} \begin{cases} \mathrm{E}_1 & x+y+z=280 \\ \mathrm{E}_2 & y+2z=385 \\ \mathrm{E}_3 & -2y-z=-290 \end{cases} \underset{\boxed{\bullet \mathrm{E}_3-2\mathrm{E}_2}}{\Rightarrow} \begin{cases} x+y+z=280 \\ y+2z=385 \\ 3z=480 \end{cases}$$

*Tenemos el siguiente sistema escalonado,empezamos resolviendo la última ecuación

$$\begin{cases} x+y+z=280 \xrightarrow{y=65 \quad z=160} x+65+160=280 \Rightarrow \boxed{x=55 \text{ bicicletas}} \\ y+2z=385 \xrightarrow{z=160} y+2\cdot160=385 \Rightarrow y+320=385 \Rightarrow \boxed{y=65 \text{ triciclos}} \\ 3z=480 \Rightarrow \boxed{z=160 \text{ coches}} \nearrow \end{cases}$$

6. Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 euros por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva. Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular el precio unitario de cada artículo, sabiendo que 1 litro de aceite cuesta el triple que un litro de leche y que un kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.

Solución:

$$\begin{cases} x = \text{ precio de un litro de leche} \\ y = \text{precio de un kg. de jamón} \\ z = \text{precio de un litro de aceite} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24x+6y+12z=156 \\ z=3x \\ y=4z+4x \end{cases}$$

Sustituyendo $z=3x$ en la segunda ecuación, y llevando el valor a la primera se obtiene:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24x+6y+12z=156 \\ z=3x \\ y=4\cdot 3x+4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x+6y+12z=156 \\ z=3x \\ y=12x+4x=16x \end{cases} \Rightarrow 24x+6\cdot 16x+12\cdot 3x=156$$

$$\Rightarrow 24x+96x+36x=156 \Rightarrow 156x=156 \Rightarrow x=1$$

Por tanto

$$\boxed{\begin{cases} x = \text{ 1€ precio de un litro de leche} \\ y=16x=16\cdot 1=16\text{€ precio de un kg. de jamón} \\ z=3x=3\cdot 1=3\text{€ precio de un litro de aceite} \end{cases}}$$

7. Sumando los años de antigüedad de tres empleados A, B y C se obtiene 50 años. El doble de la suma de las antigüedades de B y de C es igual al triple de la antigüedad de A. La diferencia de antigüedad entre B y C es igual al 30% de la antigüedad de A. Determina los años de antigüedad de cada empleado.

Solución:

$$\begin{cases} \text{Años de antigüedad del empleado A} = x \\ \text{Años de antigüedad del empleado B} = y \\ \text{Años de antigüedad del empleado C} = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=50 \\ 2\cdot(y+z)=3x \Rightarrow \\ y-z=0'3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=50 \\ 2y+2z=3x \\ y-z=0'3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=50 \\ -3x+2y+2z=0 \\ 10y-10z=3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 \quad x+y+z=50 \\ E_2 \; -3x+2y+2z=0 \\ E_3 \; -3x+10y-10z=0 \end{cases} \underset{\substack{\bullet E_2+3\cdot E_1 \\ \bullet E_3+3\cdot E_1}}{\Rightarrow} \begin{cases} x+y+z=50 \\ 5y+5z=150 \\ 13y-7z=150 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=50 \\ y+z=30 \\ 13y-7z=150 \end{cases} \underset{\bullet E_3-13\cdot E_2}{\Rightarrow} \begin{cases} x+y+z=50 \\ y+z=30 \\ -20z=-240 \end{cases}$$

*Tenemos el siguiente sistema escalonado,empezamos resolviendo la última ecuación

$$\begin{cases} x+y+z=50 \xrightarrow{y=18 \quad z=12} x+18+12=50 \Rightarrow x=50-18-12 \Rightarrow \boxed{x=20 \text{ años}} \\ y+z=30 \xrightarrow{z=12} y+12=30 \Rightarrow y=30-12 \Rightarrow \boxed{y=18 \text{ años}} \nearrow \\ -20z=-240 \Rightarrow \boxed{z=12 \text{ años}} \nearrow \end{cases}$$

8. Ejercicios.

1) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{cases}$ $\boxed{Solución: \begin{cases} x=4 \\ y=5 \\ z=2 \end{cases}}$

b) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{cases}$ $\boxed{Solución: \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3 \end{cases}}$

c) $\begin{cases} 2x+y-z=15 \\ 5x-y+5z=16 \\ x+4y+z=20 \end{cases}$ $\boxed{Solución: \begin{cases} x=5 \\ y=4 \\ z=-1 \end{cases}}$

d) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2y+3z=15 \\ 3x+y=12 \end{cases}$ $\boxed{Solución: \begin{cases} x=3 \\ y=3 \\ z=3 \end{cases}}$

e) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=1 \end{cases}$ $\boxed{Solución: \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}}$

f) $\begin{cases} 3x-2y+4z=8 \\ 2x+3y-3z=4 \\ x-3y-5z=-6 \end{cases}$ $\boxed{Solución: \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}}$

g) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-2y+2z=0 \end{cases}$ $\boxed{Sist. Incompatible}$ (NO TIENE SOLUCIÓN)

h) $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ x-2y+z=-2 \\ 8x+5y+5z=1 \end{cases}$ $\boxed{Sist. Incompatible}$ (NO TIENE SOLUCIÓN)

i) $\begin{cases} x-3y=-1 \\ x+z=2 \\ 2x-3y+z=1 \end{cases}$ $Solución: \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1-\dfrac{\lambda}{3} \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$ Sist. Comp. Indeterminado (INFINITAS SOLUCIONES)

l) $\begin{cases} x+3y+2z=5 \\ x+5y+3z=10 \\ 2x+8y+5z=15 \end{cases}$ $Solución: \begin{cases} x=-5+\lambda \\ y=\lambda \\ z=5-2\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$ Sist. Comp. Indeterminado (INFINITAS SOLUCIONES)

m) $\begin{cases} x+3y+z=-2 \\ 3x+y-z=0 \\ 5x+7y+z=-4 \end{cases}$ $Solución: \begin{cases} x=\dfrac{1+2\lambda}{4} \\ y=\dfrac{-3-2\lambda}{4} \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$ Sist. Comp. Indeterminado (INFINITAS SOLUCIONES)

n) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-z=2 \\ 2x+y-2z=3 \end{cases}$ $Solución: \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1 \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$ Sist. Comp. Indeterminado (INFINITAS SOLUCIONES)

o) $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 3x-y+z=0 \\ -2x+3y+z=0 \end{cases}$ $\boxed{\underset{(trivial)}{Solución}: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}}$

p) $\begin{cases} 4x+3y+2z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 8x+y+4z=0 \end{cases}$ $\quad$ $Solución: \begin{cases} x=-\dfrac{\lambda}{2} \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$ Sist. Comp. Indeterminado (INFINITAS SOLUCIONES)

q) $\begin{cases} 2x-3y-5z=0 \\ 5x-4y-2z=0 \\ 3x-y+3z=0 \end{cases}$ $\quad$ $Solución: \begin{cases} x=-2\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$ Sist. Comp. Indeterminado (INFINITAS SOLUCIONES)

PROBLEMAS

1) Halle tres números sabiendo que el primero menos el segundo es igual a un quinto del tercero, si al doble del tercero le restamos seis resulta la suma del segundo y el tercero, además, el triple del segundo menos el doble del tercero es igual al primero menos ocho.

$$Solución=\begin{cases} 1^{o}=x=-30 \\ 2^{o}=y=-26 \\ 3^{o}=z=-20 \end{cases}$$

2) Encontrar tres números x, y, z tales que su suma sea 210, la mitad del primero y del último más la cuarta parte del otro sea 95 y la media de los dos últimos sea 80.

$$Solución=\begin{cases} 1^{o}=x=50 \\ 2^{o}=y=40 \\ 3^{o}=z=120 \end{cases}$$

3) En una reunión hay 40 personas. La suma del número de hombre y de mujeres triplica el número de niños. El número de mujeres supera en 6 a la suma del número de hombres más el número de niños. Averiguar razonadamente cuántos hombres, mujeres y niños hay.

$$Solución=\begin{cases} Hombres=x=7 \\ Mujeres=y=23 \\ Niños=z=10 \end{cases}$$

4) Los 30 alumnos de un grupo de 4º de ESO cursan tres asignaturas optativas distintas: Francés, Cultura Clásica y Economía: Si dos de los alumnos de Francés se hubiesen matriculado de Cultura clásica, entonces estas dos asignaturas tendrían el mismo número de alumnos. Si dos alumnos de Cultura Clásica se hubiesen matriculado en Economía, entonces Economía tendría doble número de alumnos que Cultura Clásica. Halla el número de alumnos matriculado en cada asignatura

$$Solución=\begin{cases} \text{Alumnos matriculados en Francés}=x=12 \\ \text{Alumnos matriculados en Cultura Clásica}=y=8 \\ \text{Alumnos matriculados en Economía}=z=10 \end{cases}$$

5) La suma de las tres cifras de un número es 18, siendo la cifra de las decenas igual a la media de las otras dos. Si se cambia la cifra de las unidades por la de las centenas, el número aumenta 396 unidades. Calcula dicho número

$$Solución = Número = N = "xyz" \underset{\boxed{\begin{smallmatrix}x=4\\y=6\\z=8\end{smallmatrix}}}{=} "468"$$

6) Juan, Pedro y Luis corren a la vez en un circuito. Por cada kilómetro que recorre Juan, Pedro recorre 2 kilómetros y Luis recorre tres cuartas partes de lo que recorre Pedro. Al finalizar, la suma de las distancias recorridas por los tres, fue de 45 kilómetros, ¿cuántos kilómetros recorrió cada uno?

$$Solución = \begin{cases} \text{Kilómetros recorridos por Juan} = x = 10 \\ \text{Kilómetros recorridos por Pedro} = y = 20 \\ \text{Kilómetros recorridos por Luis} = z = 15 \end{cases}$$

7) Juana y Mercedes tenían 20000€ cada una para invertir. Cada una de ellas distribuye su dinero de la misma forma en tres partes P, Q y R y las ingresan en una entidad financiera. Al cabo de un año, a Juana le han dado un 4% de interés por la parte P, un 5% por la parte Q y un 4% por la parte R y a Mercedes le han dado un 5% de interés por la parte P, un 6% por la parte Q y un 4% por la parte R. Juana ha recibido en total 850 € de intereses, mientras que Mercedes ha recibido 950€. ¿De qué cantidad de euros constaba cada una de las partes P, Q, y R?

$$Solución = \begin{cases} \text{Euros de la parte P} = x = 5000€ \\ \text{Euros de la parte Q} = y = 5000€ \\ \text{Euros de la parte R} = z = 10000€ \end{cases}$$

8) Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 19152€. La última versión del videojuego ha salido a la venta por un importe de 36€. Además de la última versión ha vendido, con un descuento del 30% y del 40%, otras dos versiones anteriores del videojuego. El número total de ejemplares vendidos de las dos versiones anteriores ha sido la mitad del de la última versión. ¿Cuántos ejemplares vendió de cada versión?

$$Solución = \begin{cases} \text{Videojuegos última versión} = x = 400 \\ \text{Videojuegos al 30\%} = y = 120 \\ \text{Videojuegos al 40\%} = z = 80 \end{cases}$$

9) Un individuo invirtió 60000 € repartidos en tres empresas y obtuvo 4500 € de beneficios. Calcular la inversión realizada en cada empresa, sabiendo que en la empresa A hizo el doble de inversión que en la B y C juntas y que los beneficios de las empresas fueron del 5% en la empresa A, el 10% en la B y el 20% en la C.

$$\boxed{\textit{Solución} = \begin{cases} \text{Inversión en la empresa A} = x = 40000€ \\ \text{Inversión en la empresa B} = y = 15000€ \\ \text{Inversión en la empresa C} = z = 5000€ \end{cases}}$$

10) Una madre es 21 años mayor que su hijo y dentro de 6 años la edad del niño será 5 veces menor que la edad de la madre. ¿Dónde está el padre?

Solución = ?????????????

11) Un agricultor tiene repartidas sus 10 hectáreas de terreno en barbecho, cultivo de trigo y cultivo de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que en barbecho tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo de trigo y cebada. ¿ Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los cultivos y cuántas están en barbecho?

Solución

2 hectáreas a barbecho, 5 a trigo y 3 a cebada

12) En una clase de segundo de Bachillerato, por cada tres alumnos que estudian Tecnologías de la información, diez estudian Comunicación audiovisual, y por cada dos alumnos que estudian Tecnologías de la información, tres estudian Francés. Calcula el número de alumnos que cursan cada una de las materias mencionadas sabiendo que en la clase hay 35 alumnos y que cada uno de ellos sólo está matriculado en una de las asignaturas.

Solución

x : alumnos Tecnología de la información
y : alumnos Comunicación audiovisual
z : alumnos Francés

$$\begin{cases} x+y+z=35 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{10} \\ \dfrac{x}{z}=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=35 \\ 10x-3y=0 \\ 3x-2z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z=9,\ y=20,\ x=6$$

13) Un estadio de fútbol con capacidad para 72000 espectadores está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B. Unos espectadores son socios del equipo A, otros lo son del equipo B, y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos lo siguiente:

(a) No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.

(b) Por cada 13 socios de alguno de los dos equipos hay 3 espectadores que no son socios.

(c) Los socios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A.

¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio viendo el partido?

Solución Hay 26000 socios del equipo A y 32500 del equipo B.

Apuntes

MATEMÁTICAS

TEMA 2

Matrices

TEMA 2: Matrices

ÍNDICE

1. **Introducción.**
2. **Definición y Clasificación de Matrices.**
3. **Operaciones con Matrices.**
4. **Ejercicios Resueltos.**
5. **Ejercicios Propuestos.**

1. Introducción.

Las matrices aparecieron por primera vez hacia el año 1850, introducidas por el inglés J.J. Sylvester. Su desarrollo se debe a W.R. Hamilton y a A. Caley.

Además de su utilidad para el estudio de los sistemas de ecuaciones, las matrices aparecen de manera natural en geometría, estadística economía, etc. Nuestra cultura está llena de matrices de números: el horario de los trenes de cada una de las estaciones es una matriz de doble entrada, la tabla de cotizaciones de la Bolsa en cada uno de los días de la semana, las tablas de sumar y multiplicar, la disposición de los alumnos en clase, las casillas de un tablero de ajedrez, las apuestas de la quiniela.

Actualmente, muchos programas de ordenador utilizan el concepto de matriz. Así, las hojas de cálculo funcionan utilizando una inmensa matriz con cientos de filas y columnas en cuyas celdas se pueden introducir datos y fórmulas para realizar cálculos a gran velocidad. Esto requiere utilizar las operaciones con matrices.

2. Definición y Clasificación de Matrices.

- **DEFINICIÓN**: Una matriz es una tabla (Nº reales) de elementos dispuestos en filas y columnas .Se nombran con letras mayúsculas.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m filas
n columnas

$$\text{Ejemplos}\begin{cases} B=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} & \mathrm{D}=\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -9 & -2 \end{pmatrix} \\ C=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \mathrm{E}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- **ORDEN DE UNA MATRIZ:** es el número de filas y columnas de una matriz

$$B=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$
Orden = 2 x 2

$$\mathrm{D}=\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$
Orden = 3 x 3

$$C=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
Orden = 3 x 2

$$\mathrm{E}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
Orden = 1 x 3

- **CLASIFICACIÓN SEGÚN LA FORMA DE LA MATRIZ**

A) Matriz fila: tienen una única fila $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

B) Matriz columna: tienen una sola columna $A=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

C) Matriz cuadrada: tienen el mismo número de filas y columnas

$$\begin{cases} A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -8 & -7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ B=\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \underset{\text{DIAGONAL PRINCIPAL}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -7 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & \\ & 0 \end{pmatrix} .$$

D) Matriz Rectangular: tienen distinto número de filas y columnas. $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

E) Matriz Traspuesta: es aquella que se obtiene cambiando filas por columnas. A^t

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -12 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & -12 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la Matriz Traspuesta:
1) $(A^t)^t = A$
2) $(A+B)^t = A^t + B^t$
3) $(\alpha \mathrm{A})^t = \alpha \mathrm{A}^t \qquad \alpha \in \mathbb{R}$
4) $(\mathrm{A}\cdot \mathrm{B})^t = B^t \cdot A^t$

F) Matriz Simétrica: es la matriz cuadrada que coincide con su traspuesta ($A = A^t$)

G) Matriz Antisimétrica: es la matriz cuadrada que coincide con la opuesta de su traspuesta ($A = -A^t$)

- **CLASIFICACIÓN SEGÚN LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ**

A) Matriz nula: todos los elementos son cero $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

B) Matriz Diagonal: todos los elementos son cero excepto los de su diagonal principal. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

C) Matriz unidad: es diagonal con todos los elementos de la diagonal iguales a 1.

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D) - Matriz triangular superior: es una matriz cuadrada con todos los elementos nulos por debajo de la diagonal principal. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

- Matriz triangular inferior : es una matriz cuadrada con todos los elementos nulos por encima de la diagonal principal. $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -9 \end{pmatrix}$

E) Matrices equidimensionales: son aquellas que tiene el mismo número de filas y columnas

3. Operaciones con Matrices.

A) SUMA: Deben ser matrices equidimensionales. Se suman los elementos que ocupan la misma posición.

$$\boxed{\begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 5 \\ 6 & -1 & 6 \end{pmatrix}}$$

B) PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA MATRIZ: se multiplica todos los elementos de la matriz por ese número.

$$\boxed{5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 10 & -15 & 25 \\ 5 & -10 & 20 \end{pmatrix}}$$

C) PRODUCTO: Para multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera tiene que coincidir con el número de filas de la segunda. El resultado es otra matriz que tiene el número de filas de la primera y el número de columnas de la segunda, y cada elemento a_{ij} se obtiene multiplicando la fila i de la primera matriz por la columna j de la segunda.

$$\boxed{\underset{m\,x\,n}{A} \cdot \underset{n\,x\,p}{B} = \underset{m\,x\,p}{C}}$$

EJEMPLO

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+3\cdot0+(-1)\cdot5 & 1\cdot2+3\cdot(-2)+(-1)\cdot3 \\ 0\cdot1+2\cdot0+(-5)\cdot5 & 0\cdot2+2\cdot(-2)+(-5)\cdot3 \\ 1\cdot1+2\cdot0+3\cdot5 & 1\cdot2+2\cdot(-2)+3\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -25 & -19 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}}$$

IMPORTANTE: El producto de matrices **NO** cumple la propiedad conmutativa

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

4. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2&3&6\\7&8&7\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&3\\5&7\\-1&1\end{pmatrix}$. Hallar A·B.

Solución: Se pueden multiplicar $\underset{2\,x\,3}{A}\cdot\underset{3\,x\,2}{B}=\underset{2\,x\,2}{A\cdot B}$

$$\boxed{A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3&6\\7&8&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\5&7\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2+3\cdot5+6\cdot(-1)&2\cdot3+3\cdot7+6\cdot1\\7\cdot2+8\cdot5+7\cdot(-1)&7\cdot3+8\cdot7+7\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&33\\47&84\end{pmatrix}}$$

2. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.Calcular A^n y B^n

Solución:

- $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n=\begin{pmatrix}1&n&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

- $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$$

$$B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2&2^2\\2^2&2^2\end{pmatrix}$$

$$B^4=B^3\cdot B=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&8\\8&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3&2^3\\2^3&2^3\end{pmatrix}$$

$$B^5=B^4\cdot B=\begin{pmatrix}8&8\\8&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&16\\16&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^4&2^4\\2^4&2^4\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$B^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}$$

3. Encontrar todas las matrices X cuadradas de orden 2x2 que satisfagan la igualdad $\boxed{X\cdot A = A\cdot X}$ siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

Solución: Sea $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, siendo $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} X\cdot A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 3b\\ c & 3d\end{pmatrix}\\ A\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ 3c & 3d\end{pmatrix}\end{array}\right\}\underset{\boxed{X\cdot A=A\cdot X}}{\Rightarrow}\begin{cases}a=a\\ 3b=b\Rightarrow 3b-b=0\Rightarrow 2b=0\Rightarrow\boxed{b=0}\\ 3c=c\Rightarrow 3c-c=0\Rightarrow 2c=0\Rightarrow\boxed{c=0}\\ 3d=3d\end{cases}\Rightarrow\boxed{X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}}$$

4. Hallar todas las matrices $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ b & c\end{pmatrix}$, siendo $a,b,c\in\mathbb{R}$, distintas de la matriz nula, que cumpla $\boxed{X^2=2\cdot X}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} X^2=X\cdot X=\begin{pmatrix}a & 0\\ b & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 0\\ b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ b\cdot a+c\cdot b & c^2\end{pmatrix}\\ 2\cdot X=2\cdot\begin{pmatrix}a & 0\\ b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & 0\\ 2b & 2c\end{pmatrix}\end{array}\right\}\underset{\boxed{X^2=2\cdot X}}{\Rightarrow}\begin{cases}a^2=2a\Rightarrow a^2-2a=0\Rightarrow a\cdot(a-2)=0\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ a=2\end{cases}\\ b\cdot a+c\cdot b=2b\Rightarrow b\cdot(a+c)=2b\Rightarrow a+c=2\Rightarrow\boxed{c=2-a}\\ c^2=c\end{cases}$$

$\bullet Si\ \boxed{a=0}\Rightarrow c=2-0=2\Rightarrow\boxed{X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & 2\end{pmatrix}}$

$\bullet Si\ \boxed{a=2}\Rightarrow c=2-2=0\Rightarrow\boxed{X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ b & 0\end{pmatrix}}$

5. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$. $a)$ Comprobar que $A^3+I=0$ $b)$ Hallar A^{100}

Solución

$a)$ Se comprueba fácilmente.

$b) A^3+I=0\Rightarrow\boxed{A^3=-I}\Rightarrow A^{100}=A^{3\cdot33+1}=A^{3\cdot33}\cdot A=(A^3)^{33}\cdot A\underset{\boxed{A^3=-I}}{=}(-I)^{33}\cdot A=-I\cdot A=-A$

6. Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{l}3X-5Y=A\\4X-3Y=B\end{array}\right\}$ siendo $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1&4\\2&0\end{pmatrix}$

Solución:

Lo resolvemos por doble reducción

- $$\left.\begin{array}{l}3X-5Y=A\\4X-3Y=B\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}{}_{x(-4)}3X-5Y=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\\{}_{x3}4X-3Y=\begin{pmatrix}-1&4\\2&0\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow+\left.\begin{array}{l}-12X+20Y=\begin{pmatrix}-8&0\\-4&-12\end{pmatrix}\\12X-9Y=\begin{pmatrix}-3&12\\6&0\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$
$$11Y=\begin{pmatrix}-11&12\\2&-12\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{Y=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-11&12\\2&-12\end{pmatrix}}$$

- $$\left.\begin{array}{l}3X-5Y=A\\4X-3Y=B\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}{}_{x(-3)}3X-5Y=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\\{}_{x5}4X-3Y=\begin{pmatrix}-1&4\\2&0\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow+\left.\begin{array}{l}-9X+15Y=\begin{pmatrix}-6&0\\-3&-9\end{pmatrix}\\20X-15Y=\begin{pmatrix}-5&20\\10&0\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$
$$11X=\begin{pmatrix}-11&20\\7&-9\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{X=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-11&20\\7&-9\end{pmatrix}}$$

5. EJERCICIOS SIN RESOLVER

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar A·B

Solución: $\boxed{A\cdot B=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \\ -3 & 16 \end{pmatrix}}$

2. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Calcular : 3A+2C , AC + CA, A·B

Solución:

$$\boxed{\bullet 3A+2C=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 17 \\ 12 & -3 & 4 \\ 14 & 4 & 13 \end{pmatrix} \quad \bullet AC + CA=\begin{pmatrix} 26 & 5 & 31 \\ 10 & -2 & 27 \\ 26 & 12 & 26 \end{pmatrix} \quad \bullet A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 4 & 13 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

3. Calcular A^n, B^n, C^n y D^n

siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

$$\boxed{A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^n=\begin{pmatrix} 2^n & 2^n & -2^n \\ 2^n & 2^n & -2^n \\ 2^n & 2^n & -2^n \end{pmatrix} \quad C^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D^n=\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 & n \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si n es impar} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si n es par} \end{cases}}$$

4. Encontrar todas las matrices X tales que A·X=X·A, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$.

Solución

Si $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, siendo $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

Las matrices X que cumplen A·X=X·A son $\begin{cases}b=0\\ c=4d-4a\end{cases}$ $\boxed{X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 4d-4a & d\end{pmatrix}}$

5. A) Hallar todas las matrices $A=\begin{pmatrix}a & a\\ 0 & b\end{pmatrix}$ distintas de $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ tal que $A^2=A$

B) Para cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado A) calcular:

$$M = A+A^2+\ldots+A^{10}$$

Solución

A)

$\bullet Si\ \boxed{a=0}\Rightarrow b=1\Rightarrow \boxed{A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$

$\bullet Si\ \boxed{a=1}\Rightarrow b=0\Rightarrow \boxed{A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$

B) M=10·A

6. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Hallar dos constantes α y β tal que $A^2=\alpha\cdot A+\beta\cdot I$

b) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

c) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A-X)\cdot(A+X)=A^2-X^2$

Solución

a) $\alpha=2$ y $\beta=-1$

b) $A^5=5A-4I$

c) Si $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, siendo $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ Las matrices X deben cumplir que

A·X=X·A para que sea cierta la igualdad $(A-X)\cdot(A+X)=A^2-X^2$. Esas

matrices X son las siguientes $\begin{cases}c=0\\ a=d\end{cases}\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}}$

7. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular A^{86}.

Solución $\boxed{A^3 = I \Rightarrow A^{86} = A^{3\cdot 28+2} = A^{3\cdot 28}\cdot A^2 = (A^3)^{28}\cdot A^2 \underset{\boxed{A^3=I}}{=} I^{28}\cdot A^2 = I\cdot A^2 = A^2}$

8. Resuelve los siguientes sistemas

a) $\left.\begin{array}{l} X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$. Solución: $\boxed{\begin{array}{l} X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} \\ Y = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \end{array}}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ X - 3Y = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$. Solución: $\boxed{\begin{array}{l} X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ Y = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}}$

Apuntes

MATEMÁTICAS

TEMA 3

Determinantes. Sistemas de Ecuaciones dependientes de un parámetro

TEMA 3: Determinantes

ÍNDICE

1. Determinantes……………………………………………………..pag 1
2. Matriz Inversa. Ecuaciones Matriciales………………………pag 8
3. Rango de una matriz……………………………………………pag 13
4. Sistemas de Ecuaciones (Regla de Cramer, Teorema Rouché-Fröbenius, Sistemas dependiendo de un parámetro …).......pag17

1. Determinantes.

- A cada matriz cuadrada A de orden n se le asocia un número real llamado determinante de la matriz que se escribe $|A|$

- **DETERMINANTE DE ORDEN 1:** el determinante de la matriz de orden uno es igual al elemento de la matriz.

Ejemplo: $|3| = 3$ $\quad |-5| = -5$

- **DETERMINANTE DE ORDEN 2:** $\boxed{|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$

Ejemplo:

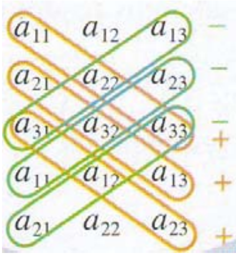
$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 6 \cdot 4 = -10 \qquad \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 - (-5) \cdot 2 = -3 + 10 = 7$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 5 = -7 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2$$

- **DETERMINANTE DE ORDEN 3:**

$$\boxed{|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \underset{\text{REGLA DE SARRUS}}{=} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}}$$

NOTA: Observa que se llega al mismo resultado en la regla de Sarrus si se añaden las dos primeras filas debajo de las tres iniciales.



+ : indica que se conserva el signo de la multiplicación.
– : indica que se cambia el signo de la multiplicación.

Ejemplo: Calcula los siguientes determinantes: $a)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 11 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & m & 4 \\ m-1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

Solución

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 4-24+30-32-9+10=-21$$

$$\text{b)}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0+30+4+4-33=5$$

c)

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 4 \\ m-1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & m & 4 \\ m-1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 20+8\cdot(m-1)+0+0+2-4m(m-1) = 20+8m-8+2-4m^2+4m = -4m^2+12m+14$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. *El determinante de una matriz triangular es igual al producto de la diagonal principal*

Ejemplo $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot 2 = -24$

2. *El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de esas matrices* $\boxed{\boxed{\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)}, \textit{es decir } |A \cdot B| = |A| \cdot |B|}$

3. *El determinante de una matriz y el de su traspuesta coinciden* $\boxed{|A| = |A^t|}$

Ejemplo $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -213$ $\quad |A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -213$

4. *Si A es una matriz de orden n y k es un número real, entonces:* $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$

Ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $|A| = -7$ entonces $|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot (-7) = -56$

5. *Un determinante con una fila o columna de ceros es igual a cero.*

Ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 0$

6. *Si se intercambian entre sí dos filas o dos columnas de un determinante, el valor del determinante queda multiplicado por (-1)*

Ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -213 \underset{\boxed{\text{Intercambio la fila 1 y la 3}}}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 213$

7. *Un determinante con dos filas o dos columnas iguales vale cero.*

Ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$

8. *Si dos filas o columnas son proporcionales el determinante es igual a cero*

Ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & -9 & 4 \\ 3 & -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$

9. *Si una fila (columna) es combinación lineal de otras filas (columnas), entonces el valor del determinante es nulo*

Ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 0$ ya que $F_3 = F_2 + 2 \cdot F_1$

10. *Si se multiplica una fila o una columna de un determinante por un número real, entonces el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.*

Ejemplo $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 10 & 5 & 15 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ $|B| = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

11. *Si a una fila (columna) se le suma otra fila (columna) multiplicada por un número real, entonces el valor del determinante no varía.*

Ejemplo $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15 \Rightarrow$ Sumo a la tercera fila la primera multiplicada por dos $\boxed{F_3 = F_3 + 2 \cdot F_1}$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 11 \end{vmatrix} = -15$

12. *Si todos los elementos de una fila (columna) se descomponen en dos sumandos, entonces su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en esa fila (columna) a los primeros y segundos sumandos, y en los demás, los mismos elementos que el determinante inicial.*

$$|A| = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ j & k & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

Ejemplo

$$|B| = \begin{vmatrix} 2+3 & 2 & 2 \\ 5+2 & 0 & 7 \\ 1+9 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \\ 9 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

- **DETERMINANTE DE ORDEN SUPERIOR A 3:** antes de ver la resolución de estos determinantes vamos a dar las siguientes definiciones.

  - **Menor complementario** del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A de orden n (M_{ij}) es el determinante de la matriz que resulta de suprimir la fila y columna donde se encuentra a_{ij}.

Ejemplo:

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$**, hallar los menores complementarios de los elementos de la matriz** a_{11} y a_{23}.

Solucion

• El menor complementario del elemento a_{11} viene dado por el determinante obtenido al suprimir la primera fila y la primera columna de la matriz A, es decir:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=8$$

• El menor complementario del elemento a_{23} viene dado por el determinante obtenido al suprimir la segunda fila y la tercera columna de la matriz A, es decir:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=22$$

- El **Adjunto** de un elemento a_{ij} es el menor complementario afectado por el signo + o – según si la suma i+j sea par o impar $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Ejemplo:

Sea la misma matriz del ejemplo anterior $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$**, hallar los adjuntos de los elementos de la matriz** a_{11} y a_{23}.

Solucion

- El Adjunto del elemento a_{11} es $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot 8 = 8$
- El Adjunto del elemento a_{23} es $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1) \cdot 22 = -22$

- Otra forma de ver el signo que le afecta a cada elemento de la matriz para hallar el adjunto es fijándose en lo siguiente: $\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$

- La **Matriz Adjunta** de una matriz cuadrada A es aquella cuyos elementos son los adjuntos de A. (Notación : **adj(A)** o **A^d**)

- El **Valor de un determinante** es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila ó columna por sus adjuntos correspondientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Desarrollando} \\ \text{por la 1º fila.}}}{=} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots.. + a_{1n}A_{1n}$$

Ejemplo:

Halla el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Solución

$$\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad -2 \quad 4} \\ 2 \quad -2 \quad 1 \quad 2 \\ 0 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ -3 \quad 4 \quad 0 \quad 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Desarrollando} \\ \text{por la 1º fila.}}}{=} 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot\left(-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix}\right) + (-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 4\cdot\left(-\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 1\cdot(-48) + 3\cdot(-36) + (-2)\cdot 24 + 4\cdot(-0) = -48 - 108 - 48 + 0 = \underline{-204}$$

*Si desarrollamos el determinante por cualquier otra fila ó columna da el mismo resultado,por ejemplo vamos a desarrollarlo por la tercera columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Desarrollando} \\ \text{por la 3ºcolumna}}}{=} (-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot\left(-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}\right) + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \cancel{0\cdot\left(-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}\right)} =$$

$$= (-2)\cdot 24 + 1\cdot 18 + 3\cdot(-58) = -48 + 18 - 174 = \underline{-204}$$

➢ **CALCULO DETERMINANTES HACIENDO "CEROS"** : el cálculo de los determinantes de orden 4 o superiores resulta muy complejo desarrollando por los elementos de una fila ó columna. Otra forma de hacerlos es utilizando las propiedades de los determinantes para conseguir ceros en las filas o columnas. Vamos a calcular el determinante del ejemplo anterior haciendo " ceros".

Ejemplo:

Elijo la primera columna que tiene ya un cero. Hacemos cero toda la columna excepto el elemento $a_{11} = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_4 = F_4 + 3F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & 5 & -6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 13 & -6 & 17 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando} \\ \text{por la 1ºcolumna}}}{=} 1\cdot\begin{vmatrix} -8 & 5 & -6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 13 & -6 & 17 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Hacemos el} \\ \text{determinante de} \\ \text{orden 3}}}{=}$$

$$= -408 + 260 + 72 + 234 - 170 - 192 = -204$$

2. Matriz Inversa. Ecuaciones Matriciales.

DEFINICIÓN :

Sea A una matriz cuadrada de orden n, se define su matriz inversa $\boxed{A^{-1}}$ como la matriz de orden n que verifica: $\boxed{A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I}$ donde I es la matriz identidad de orden n.

CONDICIÓN

Existe la matriz inversa de A si y solo si el determinante de A es distinto de cero

$$\boxed{\exists\ A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0}$$

EJERCICIO: Estudia para qué valores de a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ tiene inversa.

Solución

$$0 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + a + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

Por tanto $\boxed{\underset{\text{(existe)}}{\exists}\ A^{-1} \text{ si } a \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}}$

CALCULO DE LA MATRIZ INVERSA $\boxed{A^{-1}}$

1. Calculamos el determinante de A , $|A|$
2. Hallamos la matriz adjunta A^d
3. La matriz inversa de A es : $\boxed{A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^d)^t}$

EJERCICIO: Halla la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\2&1&0\\3&-2&2\end{pmatrix}$

Solución

$*$ Calculamos la matriz inversa de A $\boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot(A^d)^t}$

1º) $|A|=\begin{vmatrix}2&-2&2\\2&1&0\\3&-2&2\end{vmatrix}=4-8-6+8=-2$

2º) Matriz adjunta $A^d=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\-2&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\3&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\3&-2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-2&2\\-2&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&2\\3&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&-2\\3&-2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-2&2\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&2\\2&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&-2\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4&-7\\0&-2&-2\\-2&4&6\end{pmatrix}$

3º) $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot(A^d)^t=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}2&0&-2\\-4&-2&4\\-7&-2&6\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&-2\\-4&-2&4\\-7&-2&6\end{pmatrix}$

EJERCICIO: Halla la matriz inversa de $B=\begin{pmatrix}3&-1\\1&2\end{pmatrix}$

Solución

$*$ Calculamos la matriz inversa de B $\boxed{B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot(B^d)^t}$

1º) $|B|=\begin{vmatrix}3&-1\\1&2\end{vmatrix}=6+1=7$

2º) Matriz adjunta $\mathrm{B}^d=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}$

3º) $B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot(B^d)^t=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}$

EJERCICIOS RESUELTOS DE ECUACIONES MATRICIALES

Ejercicio 1: Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Resolver la ecuación matricial $AX = BA$

Solución

∗ Despejamos la matriz X $\Rightarrow$ $AX = BA \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}BA \underset{A^{-1}A=I}{\Leftrightarrow} I\cdot X = A^{-1}BA \Leftrightarrow \boxed{X = A^{-1}BA}$

∗ Calculamos la matriz inversa de A $\boxed{A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot(A^d)^t}$

1º) $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1-2=-1$

2º) Matriz adjunta $A^d=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3º) $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot(A^d)^t=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

∗ Calculamos la matriz X $\Rightarrow$ $\boxed{X = A^{-1}BA}$

$$X = A^{-1}BA=\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2: Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Resolver la ecuación matricial $AXB-3A=I$

Solución

$*$ Despejamos la matriz X $\Rightarrow$ $AXB-3A=I \Leftrightarrow AXB=I+3A \Leftrightarrow A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}(I+3A)B^{-1} \Leftrightarrow$

$$\underset{\substack{A^{-1}A=I \\ BB^{-1}=I}}{\Leftrightarrow} I\cdot X\cdot I=A^{-1}(I+3A)B^{-1} \Leftrightarrow \boxed{X=A^{-1}(I+3A)B^{-1}}$$

$*$ Calculamos la matriz inversa de A $\boxed{A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot(A^d)^t}$ y de B $\boxed{B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}\cdot(B^d)^t}$

1º) $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=6+1=7 \qquad |B|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3+2=5$

2º) Matriz adjunta $A^d=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^d=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3º) $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot(A^d)^t=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}\cdot(B^d)^t=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$*$ Calculamos la matriz $\boxed{I+3A} \Rightarrow I+3A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$

$*$ Calculamos la matriz X $\Rightarrow \boxed{X=A^{-1}(I+3A)B^{-1}}$

$$X=A^{-1}(I+3A)B^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{35}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{35}\cdot\begin{pmatrix} 24 & -1 \\ 1 & 23 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{35}\cdot\begin{pmatrix} 74 & 23 \\ -43 & 24 \end{pmatrix}$$

Ejercicios Ecuaciones Matriciales

1. a) Despeja la matriz X en la ecuación: A·X – A = I – A·X

b) Halla la matriz X sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución $X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

2. a) Despeja la matriz X en la ecuación: $X - A^2 \cdot X = B$

b) Hallar la matriz X sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Solución $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. a) Resuelve la ecuación matricial X·A + X = B.

b) Halla la matriz X sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Solución $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Hallar la inversa de A 2) Resuelve la ecuación matricial $AX - B = C$ 3) Calcular X

Solución: $X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

1) Hallar la inversa de A 2) Resuelve la ecuación matricial $XA = A + B$ 3) Calcular X

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

6. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 10 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1) Hallar las matrices inversas de A y B 2) Resuelve la ecuación matricial $AXB=C$
3) Calcular X

Solución $X=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Rango de una Matriz

El concepto de determinante nos permite obtener un método para calcular el rango de una matriz. Como resultados previos para este cálculo es necesario conocer los siguientes conceptos:

- **Menor de orden h** de una matriz A es el determinante de una matriz que se obtiene considerando únicamente h filas y h columnas de A.
- **Orlar un menor de orden h** es el proceso de ir añadiendo a un menor de orden h una fila y columna, con el fin de obtener un menor de orden h+1.
- Se llama **rango de una matriz A** (**rg A**) al orden del mayor menor no nulo.

- ***PASOS PARA CALCULAR EL RANGO***
  1. Quitar todas las filas ó columnas proporcionales o nulas.
  2. Elegimos un menor de orden h distinto de cero, se orla obteniendo un menor de orden h+1, si es distinto de cero se orla de nuevo y así sucesivamente hasta que al orlarse todos los menores me salga cero.

Ejemplo 1 Calcular el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

Solución

1. El menor de orden 1 formado por la primera fila y primera columna es $|2|=2\neq 0$, por tanto $rgA\geq 1$. Veamos que ocurre con los de orden 2 que se obtienen al orlar este menor.

2. Se orla con la 2ª fila y la 2ª columna de A, obteniéndose $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=8\neq 0$, por tanto $rgA\geq 2$. Veamos que ocurre con los de orden 3 que se obtienen al orlar este menor.

3. Se orla con la 3ª fila y la 3ª columna de A, obteniéndose:

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 32-24+16-24 = 48-48 = 0$. Al ser nulo se orla el menor de orden 2 con la 3ª fila y 4ª columna de A, obteniéndose $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -48+48 = 0$. Al ser nulo y haber considerado todas las filas y columnas de A se tiene que $\boxed{rgA = 2}$

Ejemplo 2 Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 10 & 0 \\ 0 & -13 & -8 & 5 \end{pmatrix}$

Solución

* Para calcular su rango buscamos un menor no nulo.

En este caso el menor de orden 2

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ es distinto de cero por lo que partiremos de él.

* Ahora buscamos los menores de orden 3 que resultan de orlarlo para ver si alguno de ellos es distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 10 \\ 0 & -13 & -8 \end{vmatrix} = 8-234+130+96 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & -13 & 5 \end{vmatrix} = -5+78-60 \neq 0 \Rightarrow \text{ Por tanto } \boxed{rg\ A = 3}$$

Ejemplo 3 Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

$1 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 1$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 4+6-10=0$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -12+12=0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 8-6-2=0$$

Por tanto rg(A)=3

Ejemplo 4 Estudia según el valor del parámetro t el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & t \\ 1 & t & 0 \end{pmatrix}$

Solución

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ el rango de A es, como mínimo 2, y para decidir si es o no 3, es preciso estudiar el determinante de tercer orden y ver para que valores de a es igual a cero.

$$0=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & t \\ 1 & t & 0 \end{vmatrix} = 2t+t-t^2=3t-t^2 \Rightarrow 0=3t-t^2=t(3-t) \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=3 \end{cases}$$

Discusión

1ª) $\underset{\text{(para todo)}}{\forall}\ t \neq 0,3 \Rightarrow rgA=3$

2ª) $Si\ \ t=0 \Rightarrow rgA=2$

3ª) $Si\ \ t=3 \Rightarrow rgA=2$

Ejemplo 5 Estudia según el valor del parámetro m el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & m & 1 & m-2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ m & 1 & -1 & m-2 \end{pmatrix}$$

Solución

El rango de A es, como mínimo 1 y como máximo 3, para estudiar el rango veamos para qué valores de m se anula el siguiente menor de orden 3.

$$0=\begin{vmatrix} 3 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3+2m^2+1-m+m-6=0=2m^2-8=0 \Rightarrow 2m^2=8 \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2$$

Discusión

1ª) $\underset{\text{(para todo)}}{\forall} \; m \neq -2, 2 \Rightarrow rgA = 3$

2ª) $Si \;\; m = 2 \Rightarrow rgA = rg\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0}{=} 2$

3ª) $Si \;\; m = -2 \Rightarrow rgA = rg\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0}}{=} 3$

Ejemplo 6 Estudia según el valor del parámetro m el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & m & m \\ m-2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$$

Solución

El rango de A es, como mínimo 1 y como máximo 3, para estudiar el rango veamos para qué valores de m se anula el siguiente menor de orden 3.

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & m \\ m-2 & 1 & 3 \\ 0 & m-1 & 0 \end{vmatrix} = m(m-2)(m-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m = 1 \end{cases}$$

Discusión

1ª) $\underset{\text{(para todo)}}{\forall} \; m \neq 0, 1, 2 \Rightarrow rgA = 3$

2ª) $Si \;\; m = 0 \Rightarrow rgA = rg\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0}}{=} 3$

3ª) $Si \;\; m = 1 \Rightarrow rgA = rg\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0}{=} 2$

4ª) $Si \;\; m = 2 \Rightarrow rgA = rg\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0}}{=} 3$

4. Sistemas de Ecuaciones (Regla de Cramer, Teorema Rouché-Fröbenius, Sistemas dependiendo de un parámetro …)

- Un sistema de de m ecuaciones y n incógnitas es de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} coeficientes = a_{ij} \in \mathbb{R} \\ incógnitas = x_i \\ \text{términos independientes} = b_j \in \mathbb{R} \end{array}\right\} i = 1,\ldots,n \quad j = 1,\ldots,m$$

Matriz de los coeficientes $\qquad$ Matriz ampliada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{11} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -4 \\ x + 7y - z = 1 \end{cases}$. Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales según su solución:

$$\text{Sistemas}\begin{cases} \text{Compatibles (tienen solución)}\begin{cases} \text{Determinados (única solución) S.C.D.} \\ \text{Indeterminados (infinitas soluciones) S.C.I.} \end{cases} \\ \text{Incompatibles (no tienen solución) S.I.} \end{cases}$$

- REGLA DE CRAMER: se podrá aplicar si se cumplen las siguientes condiciones:

a) El sistema tiene el mismo número de incógnitas que ecuaciones.

b) El determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero ($|A| \neq 0$)

En el siguiente ejemplo se explica cómo se resuelven los sistemas utilizando la regla de Cramer.

Ejemplo $\boxed{\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ 2x + z = 6 \end{cases}}$. Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

- Para calcular x se pone en el numerador el determinante que resulta de cambiar los coeficientes de la x de la matriz de los coeficientes por los términos independientes, y en denominador el determinante de la matriz de los coeficientes (det A)

- Para calcular y se pone en el numerador el determinante que resulta de cambiar los coeficientes de la y de la matriz de los coeficientes por los términos independientes, y en denominador el determinante de la matriz de los coeficientes (det A)
- Para calcular z se pone en el numerador el determinante que resulta de cambiar los coeficientes de la z de la matriz de los coeficientes por los términos independientes, y en denominador el determinante de la matriz de los coeficientes (det A)

Queda lo siguiente:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}9&2&-1\\2&1&2\\6&0&1\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{35}{5}=7 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&9&-1\\3&2&2\\2&6&1\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{-15}{5}=-3 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1&2&9\\3&1&2\\2&0&6\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{-40}{5}=-8$$

Teorema Rouché-Fröbenius

“ Un sistema es compatible" $\Leftrightarrow$ $rgA = rgA^*$

(Tiene solución) — El rango de la matriz de los coeficientes es igual al de la matriz ampliada

Por tanto:

$\boxed{rgA \neq rgA^*} \Rightarrow$ Sistema Incompatible (NO TIENE SOLUCIÓN)

$\boxed{rgA = rgA^* = h}$

$h < n^o\ de$ incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (TIENE INFINITAS SOLUCIONES)

$h = n^o\ de$ incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado (TIENE UNA ÚNICA SOLUCIÓN)

EJERCICIOS RESUELTOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES QUE DEPENDEN DE UN PARÁMETRO

1. Sea el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real m.

$$\begin{cases} mx+y-3z=5 \\ -x+y+z=-4 \\ x+my-mz=1 \end{cases}.$$

a) Discutase el sistema según los diferentes valores del parámetro m.

b) Resuélvase el sistema para m = 2

SOLUCIÓN

Matriz de los coeficientes

$$A=\begin{pmatrix} m & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -m \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada

$$A^*=\begin{pmatrix} m & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & m & -m & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=0 \Leftrightarrow |A|=\begin{vmatrix} m & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -m \end{vmatrix}=-2m^2+2m+4=0 \Leftrightarrow -m^2+m+2=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}$$

a) Discusión

$\boxed{1^{\text{o}}}$ $\forall m \neq -1,2 \Rightarrow rg\ A=3=rg\ A^*=$ nº de incognitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado
(SOLUCIÓN ÚNICA)

$\boxed{2^{\text{o}}}$ $\boxed{m=-1} \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} rg\ A &= rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0}{=} 2 \\ rg\ A^* &= rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0}{=} 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow rg\ A \neq rg\ A^* \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

(NO TIENE SOLUCIÓN)

$\boxed{3^{\text{o}}}$ $\boxed{m=2} \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} rg\ A &= rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0}{=} 2 \\ rg\ A^* &= rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0}{=} 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow rg\ A = rg\ A^* = 2 < \text{nº de incognitas}$$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO
(INFINITAS SOLUCIONES)

b) Resolución para $\boxed{m=2}$

El sistema para m = 2 es $\begin{cases} \cancel{2x+y-3z=5} \\ -x+y+z=-4 \\ x+2y-2z=1 \end{cases} \underset{\text{Resolvemos por Cramer}}{\Rightarrow} \begin{cases} -x+z=-4-y \\ x-2z=1-2y \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\begin{vmatrix} -4-y & 1 \\ 1-2y & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\dfrac{8+2y-1+2y}{1}=4y+7 \\ z=\dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -4-y \\ 1 & 1-2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\dfrac{-1+2y+4+y}{1}=3y+3 \end{array}\right\} \Rightarrow SOLUCIÓN=\begin{cases} x=4\lambda+7 \\ y=\lambda \qquad \lambda\in\mathbb{R} \\ z=3\lambda+3 \end{cases}$$

2. a) Discutir según los valores del parámetro real a el sistema $\begin{cases} ax+3y+z=a \\ x+ay+az=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$.

b) Resolver el sistema anterior en el caso $a=2$.

SOLUCIÓN

Matriz de los coeficientes $A=\begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} a & 3 & 1 & a \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A|=0 \Leftrightarrow |A|=\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2a^2+2a+4=0 \Leftrightarrow -a^2+a+2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=2 \end{cases}$$

$a)$*Discusión* $\boxed{1º}$ $\forall a\neq -1,2 \Rightarrow rg\ A=3=rg\ A^*=$ nº de incognitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado (SOLUCIÓN ÚNICA)

$\boxed{2º}$ $\boxed{a=-1} \Rightarrow$
$$\left.\begin{array}{l} rg\ A=rg\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0}{=} 2 \\ rg\ A^*=rg\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0}{=} 2 \end{array}\right\} \Rightarrow rg\ A=rg\ A^*=2<\text{nº de incognitas}$$
SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (INFINITAS SOLUCIONES)

$\boxed{3º}$ $\boxed{a=2} \Rightarrow$
$$\left.\begin{array}{l} rg\ A=rg\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0}{=} 2 \\ rg\ A^*=rg\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0}{=} 2 \end{array}\right\} \Rightarrow rg\ A=rg\ A^*=2<\text{nº de incognitas}$$
SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (INFINITAS SOLUCIONES)

b) Resolución para $\boxed{a=2}$

El sistema para a = 2 es $\begin{cases} \cancel{2x+3y+z=2} \\ x+2y+2z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \underset{\text{Resolvemos por Cramer}}{\Rightarrow} \begin{cases} x+2y=1-2z \\ x+y=1+z \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1-2z & 2 \\ 1+z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-2z-2(1+z)}{-1} = 1+4z \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-2z \\ 1 & 1+z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+z-(1-2z)}{-1} = -3z \end{aligned}\right\} \Rightarrow SOLUCIÓN = \begin{cases} x = 1+4\lambda \\ y = -3\lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Un sistema de ecuaciones lineales que tiene todos los términos independientes nulos se llama sistema homogéneo.

Todos los sistemas homogéneos son siempre compatibles, ya que la solución (0,0,...,0) siempre verifica las ecuaciones del sistema. A esta solución se le llama solución trivial.

$$\text{Sistemas Homogéneos} \begin{cases} \underset{\text{(Tienen solución)}}{\text{Compatibles}} \begin{cases} \underset{\text{(Unica solución)}}{\text{Determinados}} \Rightarrow \text{SOLUCIÓN TRIVIAL (0,0,....0) S.C.D.} \\ \underset{\text{(Infinitas soluciones)}}{\text{Indeterminados}} \quad \text{S.C.I.} \end{cases} \end{cases}$$

3. a) Discutir según los valores del parámetro real k el sistema homogéneo $\begin{cases} x+ky-z=0 \\ kx-y+z=0 \\ (k+1)x+y=0 \end{cases}$.

   b) Resolver el sistema cuando sea compatible indeterminado

Matriz de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 0 \\ k & -1 & 1 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k(k+1)-k-(k+1)-1 = 0 \Leftrightarrow k^2+k-k-k-1-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2-k-2=0 \Rightarrow \begin{cases} k=-1 \\ k=2 \end{cases}$$

a) Discusión

$\boxed{1º}$ $\forall k \neq -1,2 \Rightarrow rg\ A = 3 = rg\ A^* = \text{nº de incognitas} \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$
(SOLUCIÓN TRIVIAL X=Y=Z=0)

$\boxed{2º}$ $\boxed{k=-1} \Rightarrow rg\ A = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0}{=} 2 \Big\} \Rightarrow rg\ A = rg\ A^* = 2 < \text{nº de incognitas}$
SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO
(INFINITAS SOLUCIONES)

$\boxed{3º}$ $\boxed{k=2} \Rightarrow rg\ A = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0}{=} 2 \Big\} \Rightarrow rg\ A = rg\ A^* = 2 < \text{nº de incognitas}$
SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO
(INFINITAS SOLUCIONES)

b) Resolución

$\boxed{k = -1}$

El sistema para k = -1 es $\begin{cases} \cancel{x - y - z = 0} \\ -x - y + z = 0 \underset{y=0}{\Rightarrow} -x + z = 0 \Rightarrow z = x \\ y = 0 \end{cases}$

$$SOLUCIÓN = \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

$\boxed{k = 2}$

El sistema para k = 2 es $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ \cancel{2x - y + z = 0} \qquad \underset{y=-3x}{\Rightarrow} x + 2\cdot(-3x) - z = 0 \Rightarrow x - 6x = z \Rightarrow z = -5x \\ 3x + y = 0 \Rightarrow y = -3x \nearrow \end{cases}$

$$SOLUCIÓN = \begin{cases} x = \mu \\ y = -3\mu \qquad \mu \in \mathbb{R} \\ z = -5\mu \end{cases}$$

4. Sea el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real m.

$$\begin{cases} x+my=1 \\ 2x+my=m \\ x+y=m \end{cases}.$$

a) Discutase el sistema según los diferentes valores del parámetro m.
b) Resuélvase el los casos que sea posible

SOLUCIÓN

Matriz de los coeficientes

$$A=\begin{pmatrix} 1 & m \\ 2 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & m & m \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

NOTA : Cuando el número de ecuaciones es mayor que el número de incógnitas se empieza estudiando el rango de la matriz ampliada

$$|A*|=0 \Leftrightarrow |A*|=\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & m & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=m^2+m^2+2-m-2m^2-m=0 \Leftrightarrow -2m+2=0 \Rightarrow m=1$$

a) Discusión

$\boxed{1^{\circ}}$ $\forall m \neq 1 \Rightarrow rg\ A^* = 3 \neq rg\ A \Rightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene Solución)

$$\boxed{2^{\circ}}\ \boxed{m=1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} rg\ A^* = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0}{=} 2 \\ rg\ A = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0}{=} 2 \end{array}\right\} \Rightarrow rg\ A = rg\ A^* = 2 = \text{nº de incognitas}$$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO
(SOLUCIÓN ÚNICA)

b) Resolución

$\boxed{m = 1}$

El sistema para m = 1 es $\begin{cases} \cancel{x+y=1} \\ 2x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=1 \\ -x-y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=1$

$$SOLUCIÓN=\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES QUE DEPENDEN DE UN PARÁMETRO

1. Sea el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real t.

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+tz=1 \\ x+ty=1 \end{cases}$. $a)$ Discutase el sistema según los diferentes valores del parámetro t.

Solución:

$|A| = 3t - t^2$ 1º) $\underset{\text{(para todo)}}{\forall}$ $t \neq 0,3 \Rightarrow S.C.D.$ 2º) $Si \;\; \mathrm{t}=0 \Rightarrow S.I.$ 3º) $Si \;\; \mathrm{t}=3 \Rightarrow S.I.$

2. Sea el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real t.

$\begin{cases} x+(1+t)y+z=2t \\ x+y+z=t \\ x+y+(1+t)z=0 \end{cases}$. $a)$ Discutase el sistema según los diferentes valores del parámetro t.
b) Resuélvase en el caso en el cual el sistema es compatible indeterminado

Solución:

$|A| = -t^2$ 1º) $\underset{\text{(para todo)}}{\forall}$ $t \neq 0 \Rightarrow S.C.D.$ 2º) $Si \;\; \mathrm{t}=0 \Rightarrow S.C.I. \begin{cases} x=-\lambda-\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases} \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}$

3. Sea el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real t.

$\begin{cases} 2y+tz=t \\ (t-2)x+y+3z=0 \\ (t-1)y=1-t \end{cases}$. $a)$ Discutase el sistema según los diferentes valores del parámetro t.
b) Resuélvase el sistema para t = 1

Solución:

$|A| = t(t-1)(t-2)$ 1º) $\underset{\text{(para todo)}}{\forall}$ $t \neq 0,1,2 \Rightarrow S.C.D.$ 2º) $Si \;\; \mathrm{t}=0 \Rightarrow S.I.$ 3º) $Si \;\; \mathrm{t}=2 \Rightarrow S.I.$

4º) $Si \;\; \mathrm{t}=1 \Rightarrow S.C.I. \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5\lambda+1}{2} \\ y=\dfrac{1-\lambda}{2} \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

4. Sea el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real t.

$\begin{cases} tx+y+z=4t \\ x-y+z=t+1 \\ x+(t+1)y+tz=t+5 \end{cases}$. $a)$ Discutase el sistema según los diferentes valores del parámetro t.
b) Resuélvase el sistema para t = -1

Solución:

$|A| = -2t^2 - t + 3$ 1º) $\underset{\text{(para todo)}}{\forall}$ $t \neq -\dfrac{3}{2},1 \Rightarrow S.C.D.$ 2º) $Si \;\; \mathrm{t}=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow S.I.$ 3º) $Si \;\; \mathrm{t}=1 \Rightarrow S.I.$

$b) Si \;\; t=\text{-}1 \underset{S.C.D}{\Rightarrow} \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases}$

5. Sea el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real t.

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+3y+2z=5 \\ x+ty+3z=7 \end{cases}.$$

a) Discutase el sistema según los diferentes valores del parámetro t.
b) Resuélvase en el caso en el cual el sistema es compatible indeterminado

Solución: $|A|=4-t$ 1º) $\underset{\text{(para todo)}}{\forall} t\neq 4 \Rightarrow S.C.D.$ 2º) $Si\ \ t=4 \Rightarrow S.C.I. \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$

6. Sea el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real t.

$$\begin{cases} tx+2y+6z=0 \\ 2x+ty+4z=2 \\ 2x+ty+6z=t-2 \end{cases}.$$

a) Discutase el sistema según los diferentes valores del parámetro t.
b) Resuélvase el sistema para t = 2

Solución:

$|A|=2t^2\text{-}8$ 1º) $\underset{\text{(para todo)}}{\forall} t\neq -2,2 \Rightarrow S.C.D.$ 2º) $Si\ \ t=-2 \Rightarrow S.I.$ 3º) $Si\ \ t=2 \Rightarrow S.C.I. \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=-1 \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$

7. Sea el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real t.

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-ty-3z=0 \\ 5x+2y-z=0 \end{cases}.$$

a) Discutase el sistema según los diferentes valores del parámetro t.
b) Resuélvase en el caso en el cual el sistema es compatible indeterminado

Solución:

$|A|=7t+56$ 1º) $\underset{\text{(para todo)}}{\forall} t\neq -8 \Rightarrow S.C.D.(solución\ trivial\ x=y=z=0)$ 2º) $Si\ \ t=-8 \Rightarrow S.C.I. \begin{cases} x=\dfrac{\lambda}{19} \\ y=\dfrac{7\lambda}{19} \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$

Apuntes

MATEMÁTICAS

TEMA 4

Programación Lineal

INDICE

1 INTRODUCCIÓN... 3
2 INECUACIONES DE 1º GRADO CON 2 INCÓGNITAS 4
3 SISTEMAS DE INECUACIONES DE 1º GRADO CON 2 INCÓGNITAS 5
4 ¿QUÉ ES UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL?........................ 6
5 PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL CON INFINITAS SOLUCIONES 11
6 PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL SIN SOLUCIÓN.................. 14
7 EJERCICIOS 17

1 INTRODUCCIÓN

En 1946 comienza el largo período de la guerra fría entre la antigua Unión Soviética (URSS) y las potencias aliadas (principalmente, Inglaterra y Estados Unidos). Uno de los episodios más llamativos de esa guerra fría se produjo a mediados de 1948, cuando la URSS bloqueó las comunicaciones terrestres desde las zonas alemanas en poder de los aliados con la ciudad de Berlín, iniciando el bloqueo de Berlín. A los aliados se les plantearon dos posibilidades: o romper el bloqueo terrestre por la fuerza, o llegar a Berlín por el aire. Se adoptó la decisión de programar una demostración técnica del poder aéreo norteamericano; a tal efecto, se organizó un gigantesco puente aéreo para abastecer a la ciudad: en diciembre de 1948 se estaban transportando 4500 toneladas diarias; en marzo de 1949, se llego a las 8000 toneladas, tanto como se transportaba por carretera y ferrocarril antes del corte de comunicaciones. En la planificación de los suministros se utilizó la programación lineal. (el 12 de mayo de 1949 los soviéticos levantaron el bloqueo).

Otras aplicaciones de la programación lineal son:

- El problema de la dieta, que trata de determinar en qué cantidades hay que mezclar diferentes piensos para que un animal reciba la alimentación necesaria a un coste mínimo.
- El problema del transporte, que trata de organizar el reparto de cualquier tipo de mercancías con un coste mínimo de tiempo o de dinero.
- El problema de la ruta más corta, que ayuda a ordenar las etapas de un viaje con el propósito de minimizar el recorrido.

En este tema antes de pasar a explicar lo que es la programación lineal, explicaremos dos conceptos básicos para la posterior resolución de los problemas de programación lineal, que son: las inecuaciones de 1º grado con dos incógnitas y los sistemas de inecuaciones de primer grado con incógnitas .Nos centraremos en la resolución de problemas de programación lineal con dos variables.

2 INECUACIONES DE 1º GRADO CON 2 INCÓGNITAS

Tienen la siguiente forma: $\boxed{ax+by+c>0 \quad ax+by+c\geq 0 \quad ax+by+c<0 \quad ax+by+c\leq 0}$

Se resuelven de la siguiente forma:

1. Dibujamos la recta $ax+by+c=0$.

- Si las desigualdades no son estrictas, es decir $ax+by+c>0 \quad ax+by+c<0$, la recta no forma parte de la solución y se dibuja discontinua

- Si las desigualdades son estrictas, es decir $ax+by+c\geq 0 \quad ax+by+c\leq 0$, la recta si forma parte de la solución y se dibuja continua

2. Seleccionamos un punto P(x,y) que no esté situado en la recta:

- Si el punto P verifica la inecuación, entonces todos los puntos del mismo semiplano también la verificarán y será la solución.
- Si el punto P no verifica la inecuación, entonces todos los puntos del mismo semiplano tampoco no la verificarán, por tanto, la solución será el otro semiplano.

Ejemplo: Resuelve: $\boxed{2x+y\leq 2}$

Solución

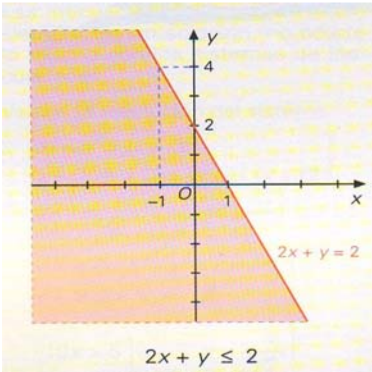
❑ Dibujamos la recta 2x + y = 2 . Damos dos valores a la x

x	0	1
y	2	0

❑ Las infinitas soluciones son los infinitos puntos de uno de los dos semiplanos que determina la recta. Para determinar cuál es, elegimos un punto cualquiera que no pertenezca a la recta, si verifica la inecuación la solución es el semiplano al que pertenece el punto, si no lo cumple es el otro semiplano.

En nuestro ejemplo elegimos el origen (0 , 0)

$$2x+y\leq 2$$
$$(0,0)\Rightarrow 2\cdot 0+0\leq 2$$
$$0\leq 2 \quad \text{Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen}$$



3 SISTEMAS DE INECUACIONES DE 1º GRADO CON 2 INCÓGNITAS

Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones: $\boxed{\begin{cases} x+y\le 1 \\ x-y\ge 1 \end{cases}}$

Solución

Resolvemos cada inecuación por separado.

1º Inecuación $x+y\le 1$

- Dibujamos la recta $x+y=1$. Damos dos valores a la x

x	0	1
y	1	0

Elegimos el origen (0 , 0)

$x+y\le 1$

$(0,0)\Rightarrow 0+0\le 1$

$0\le 1$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

2º Inecuación $x-y\ge 1$

- Dibujamos la recta $x-y=1$. Damos dos valores a la x

x	0	1
y	-1	0

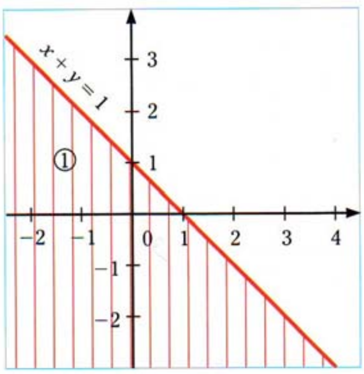
Elegimos el origen (0 , 0)

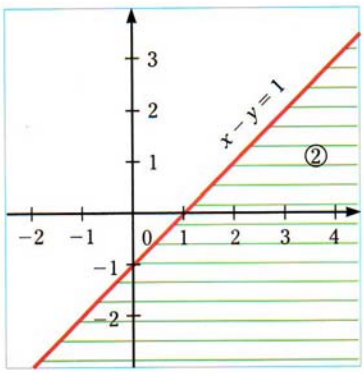
$x-y\ge 1$

$(0,0)\Rightarrow 0-0\ge 1$

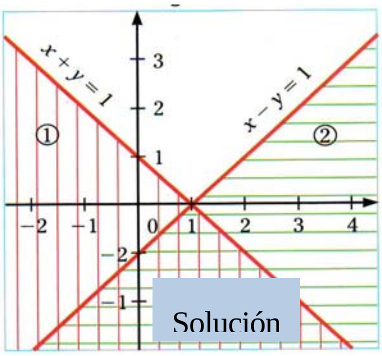
$0\ge 1$ No es Cierto, por tanto la solución es el semiplano donde no esta el origen

Gráficamente





Por lo tanto

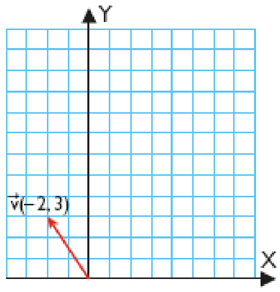


4 ¿QUÉ ES UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL?

Consiste en optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal, denominada *función objetivo*, estando las variables sujetas a una serie de restricciones expresadas mediante inecuaciones lineales

En este curso trataremos de resolver problemas de **programación lineal bidimensional**, es decir, maximizar o minimizar una función lineal con dos variables sujeta a unas restricciones que están dadas por inecuaciones lineales. En este tipo de problemas la función objetivo es una función lineal con dos variables. Se representa por: $\boxed{f(x,y)=ax+by}$

- La región del plano determinada por las distintas desigualdades o restricciones, se llama *región factible.*
- La *solución óptima* es aquella que maximiza o minimiza la función objetivo y se encuentra en la frontera de la región factible.
- El vector director de la función objetivo $f(x,y)=ax+by$ es el vector $\boxed{\vec{v}=(-b,a)}$. Las coordenadas del vector director de una función objetivo se pueden multiplicar o dividir por un mismo número distinto de cero, y su dirección no varía.
  - *Ejemplo* $f(x,y)=30x+20y \quad \Rightarrow \vec{v}=(-20,30) \Rightarrow \vec{v}=(-2,3)$



Métodos de resolución de un problema de programación lineal bidimensional

A) Método algebraico ó de los vértices: las soluciones obtenidas algebraicamente se encuentran en los vértices de la región factible.

Pasos:

1. Dibujar la región factible.
2. Determinar los vértices de la región factible.
3. Calcular el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices.
4. El mínimo se alcanza en el vértice de menor valor y el máximo en el vértice de mayor valor.
5. Interpretación del resultado en cada problema.

B) Método gráfico o de las rectas de nivel: consiste en obtener gráficamente la solución.

Las rectas de nivel son las rectas paralelas al vector director de la función objetivo que pasan por los puntos de la región factible.

Pasos:

1. Dibujar la región factible.
2. Se representa la recta de beneficio nulo $f(x,y) = ax + by = 0$ y se desplaza paralelamente a ella (rectas de nivel) hasta encontrar el vértice (solución única) o un lado (infinitas soluciones) de la región factible que cumpla la condición de máximo o mínimo.

En las rectas que solo corten a la región factible en el vértice, analizamos el signo del coeficiente de la variable y en la función objetivo $f(x,y) = ax + by$.

- Si $\boxed{b>0}$ $\begin{cases} \text{El máximo se alcanza en el vértice cuya recta tenga mayor ordenada.} \\ \text{El mínimo se alcanza en el vértice cuya recta tenga menor ordenada.} \end{cases}$
- Si $\boxed{b<0}$ $\begin{cases} \text{El máximo se alcanza en el vértice cuya recta tenga menor ordenada.} \\ \text{El mínimo se alcanza en el vértice cuya recta tenga mayor ordenada.} \end{cases}$

Ejemplo 1:

En una confitería se dispone de 24 kg de polvorones y 15 kg de mantecados, que se envasan en dos tipos de cajas de la siguiente forma.

- Caja 1 : 200g de polvorones y 100g de mantecados. Precio: 4 euros.
- Caja 2 : 200g de polvorones y 300g de mantecados. Precio: 6 euros.

¿Cuántas cajas de cada tipo se tendrán que preparar y vender para obtener el máximo de ingresos?

Solución

Veamos la solución por los métodos vistos anteriormente:

- Método algebraico ó de los vértices

La información del ejercicio la podemos organizar mediante una tabla:

	Nº de Cajas	Polvorones (g)	Mantecados (g)	Ingresos €
Caja 1	x	200	100	4
Caja 2	y	200	300	6
Total	x+y	≤ 24000	≤ 15000	4x+6y

Función Objetivo (Ingresos totales) $\boxed{F = 4x + 6y}$ (maximizar)

Restricciones: $$\boxed{\left.\begin{array}{l} 200x + 200y \leq 24000 \\ 100x + 300y \leq 15000 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\} \underset{\text{Simplificando}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} x + y \leq 120 \\ x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}}$$

- El primer paso es representar gráficamente el sistema de inecuaciones formado por las restricciones y obtenemos la región factible. (ver apartado 2 y 3 del tema):

$\boxed{x + y \leq 120}$

x	0	120
y	120	0

- Dibujamos la recta x + y = 120 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

$x + y \leq 120$

$(0,0) \Rightarrow 0 + 0 \leq 120$

$0 \leq 120$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

$\boxed{x+3y \leq 150}$

x	0	150
y	50	0

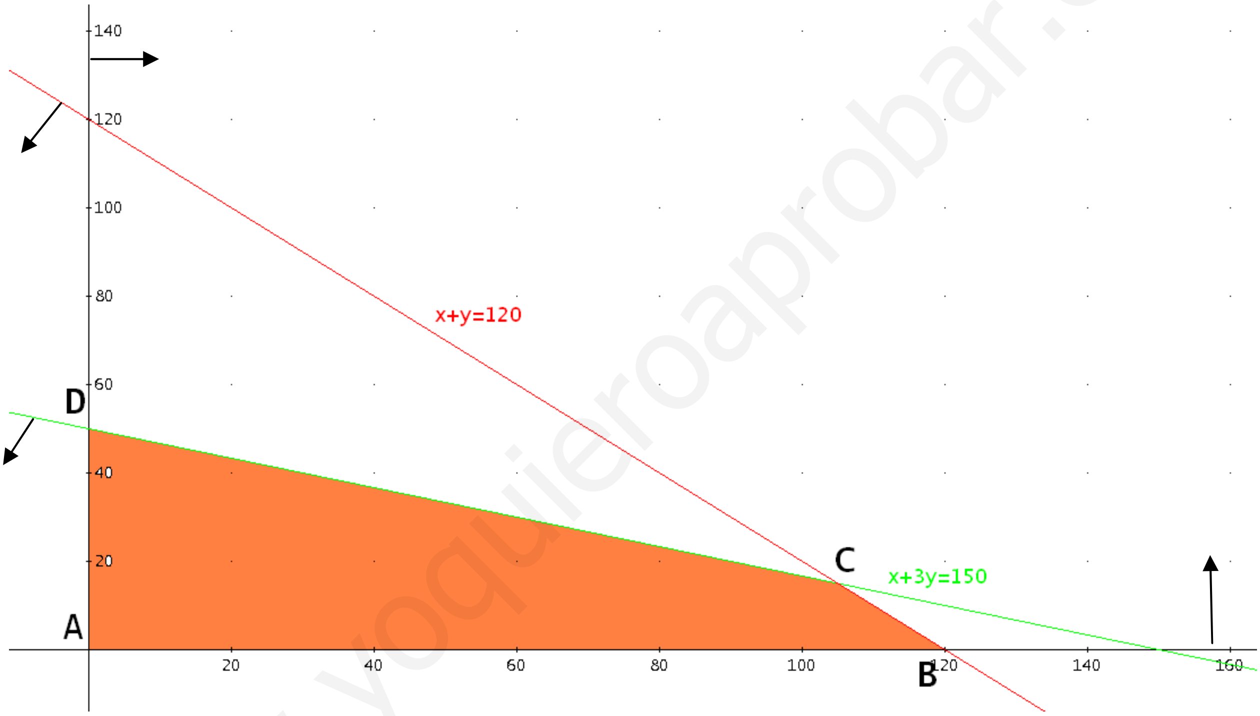
- Dibujamos la recta x + 3y = 150 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

$$x+3y \leq 150$$
$$(0,0) \Rightarrow 0+3 \cdot 0 \leq 150$$

$0 \leq 150$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

$\boxed{x \geq 0, y \geq 0}$, indica que estamos en el primer cuadrante.

Por tanto la región factible es:



- Hallamos los vértices de la región factible:

$$\boxed{\begin{array}{l} A(0,0) \\ B(120,0) \\ C: \begin{cases} x+y=120 \\ x+3y=150 \end{cases} \underset{\text{RESOLVIENDO EL SISTEMA}}{\Rightarrow} \begin{cases} x=105 \\ y=15 \end{cases} \Rightarrow C(105,15) \\ D(0,50) \end{array}}$$

- Hallamos los valores de la función objetivo $F = 4x + 6y$ en cada uno de los vértices:

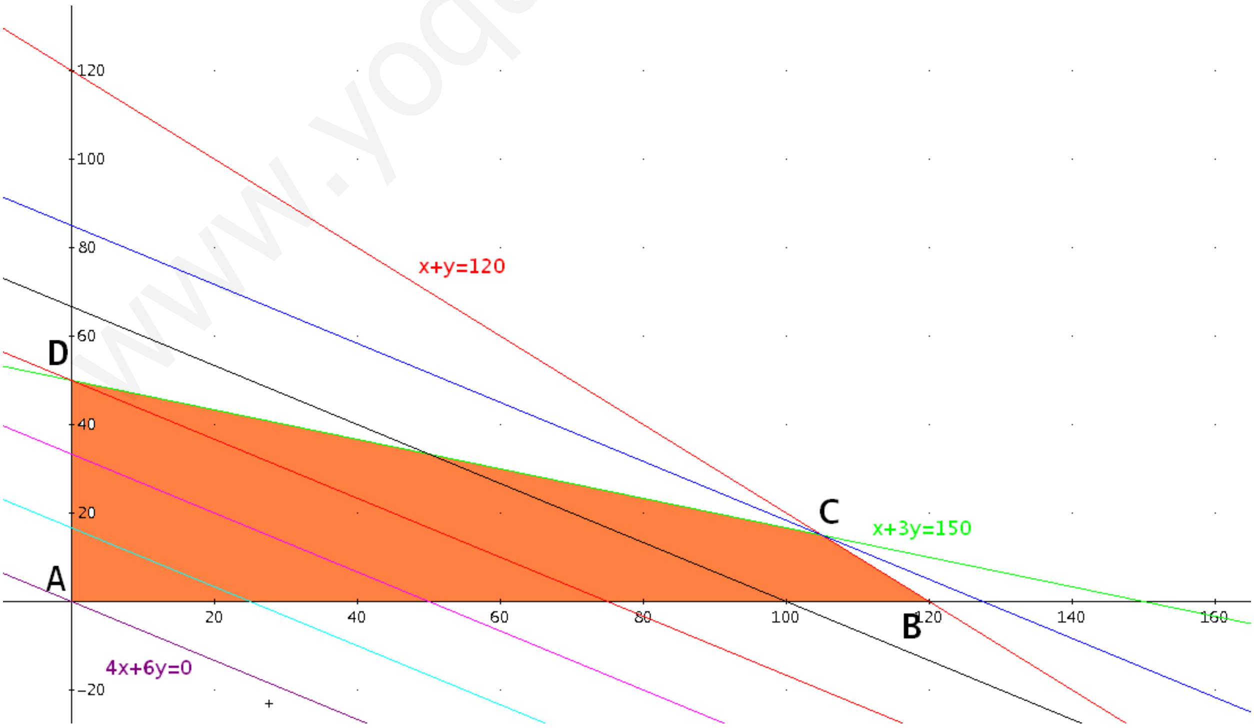
$$A(0,0) \underset{\boxed{F=4x+6y}}{\Rightarrow} F = 4\cdot 0 + 6\cdot 0 = 0_{€}$$
$$B(120,0) \underset{\boxed{F=4x+6y}}{\Rightarrow} F = 4\cdot 120 + 6\cdot 0 = 480_{€}$$
$$C(105,15) \underset{\boxed{F=4x+6y}}{\Rightarrow} F = 4\cdot 105 + 6\cdot 15 = 510_{€}$$
$$D(0,50) \underset{\boxed{F=4x+6y}}{\Rightarrow} F = 4\cdot 0 + 6\cdot 50 = 300_{€}$$

- La solución óptima corresponde al vértice en el que la función objetivo toma el valor máximo, que es el vértice C(105,15).

  Por tanto, hay que hacer 105 cajas del tipo 1 y 15 del tipo 2, siendo los ingresos máximos totales que se pueden obtener de su venta 510 euros.

Método gráfico o de las rectas de nivel:

- El primer paso es representar gráficamente el sistema de inecuaciones formado por las restricciones y obtenemos la región factible.(paso realizado antes)
- Representamos la recta de nivel de beneficio nulo 4x+6y=0 y la desplazamos paralelamente a ella misma hasta encontrar el vértice (solución única) o un lado (infinitas soluciones) de la región factible que cumpla la condición de máximo o mínimo, en este caso el máximo.

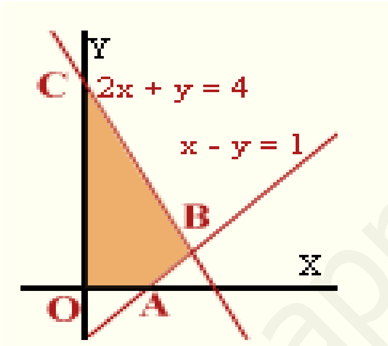


- Observando la gráfica, la recta de máximo nivel pasa por el punto C(105,15).
- Por tanto, hay que hacer 105 cajas del tipo 1 y 15 del tipo 2, siendo los ingresos máximos totales que se pueden obtener de su venta 510 euros.

Ejemplo 2:
Determinar el máximo de la función $z = 3x + 6y$ sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} 2x + y \leq 4 \\ x - y \leq 1 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución



$$\begin{cases} O(0,0) \Rightarrow z = 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0 \\ A(1,0) \Rightarrow z = 3 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 3 \\ B(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}) \Rightarrow z = 3 \cdot \frac{5}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = 5 + 4 = 9 \\ \boxed{C(0,4)} \Rightarrow z = 3 \cdot 0 + 6 \cdot 4 = 24 \Rightarrow \end{cases}$$

Se alcanza el máximo en este vértice, por tanto la función objetivo se hace máxima si $x = 0$ e $y = 4$

5 PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL CON INFINITAS SOLUCIONES

Como hemos visto en el apartado anterior, si la región factible está acotada, entonces el máximo o el mínimo de la función objetivo se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Pero si el máximo o el mínimo se encuentran en dos vértices adyacentes de la región factible, entonces se alcanzará en los infinitos puntos del lado que los une. Gráficamente este lado es paralelo al vector director de la función objetivo.

Ejemplo: Determina la solución del siguiente problema de programación lineal para maximizar la función objetivo:

Función objetivo: $F = x + y$ (maximizar)

Restricciones: $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x - y \leq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Solución

- El primer paso es representar gráficamente el sistema de inecuaciones formado por las restricciones y obtenemos la región factible. (ver apartado 2 y 3 del tema):

$\boxed{x + y \leq 5}$

- Dibujamos la recta x + y = 5 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

x	0	5
y	5	0

$x + y \leq 5$

$(0,0) \Rightarrow 0 + 0 \leq 5$

$0 \leq 5$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

$\boxed{x - y \leq 3}$

- Dibujamos la recta x -y = 3 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

x	0	3
y	-3	0

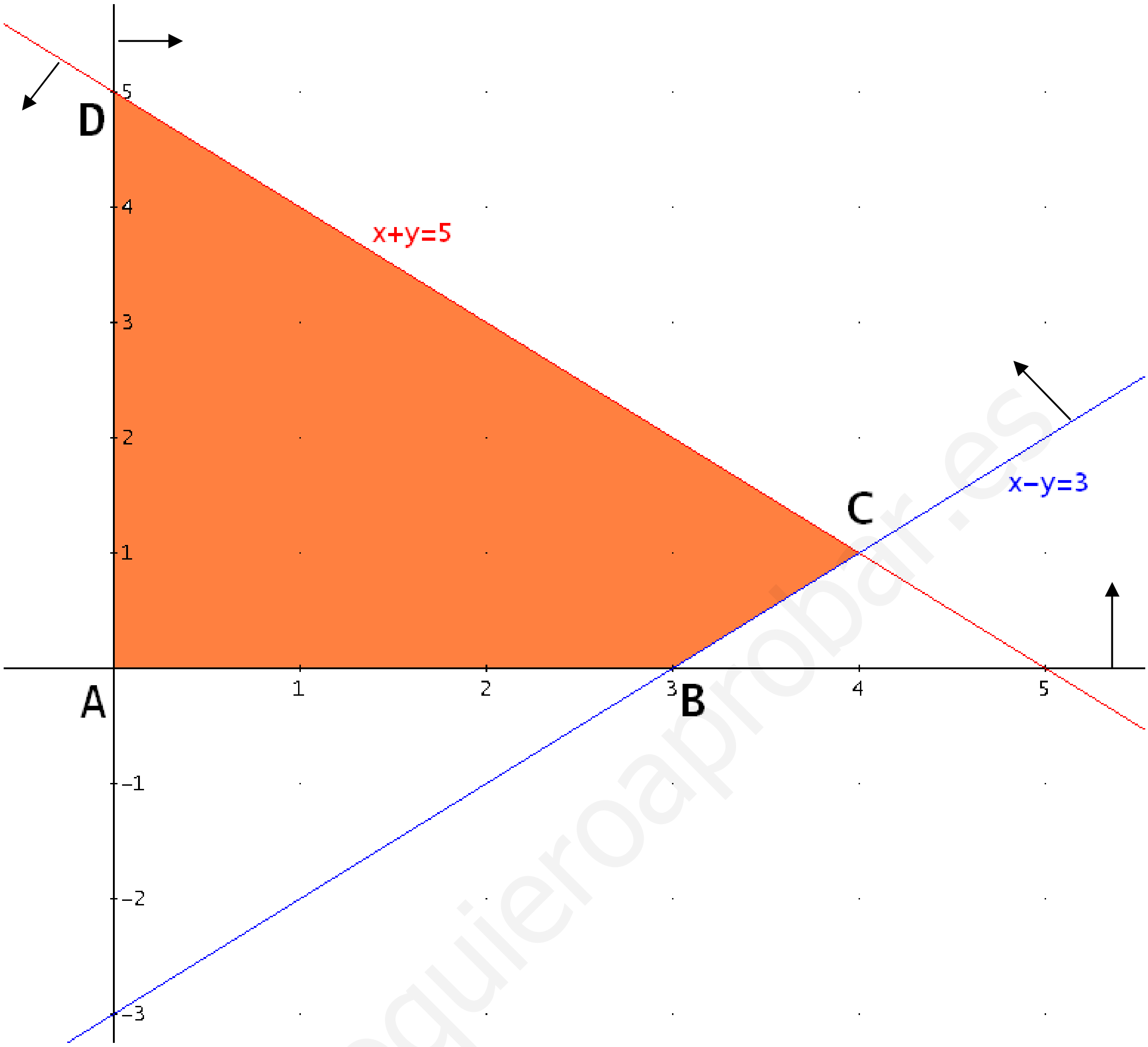
$x - y \leq 3$

$(0,0) \Rightarrow 0 - 0 \leq 3$

$0 \leq 3$ Es Cierto, por tanto la solución es el semiplano al que pertenece el origen

$\boxed{x \geq 0, y \geq 0}$, indica que estamos en el primer cuadrante.

Por tanto la región factible es:



- Hallamos los vértices de la región factible:

$$\boxed{\begin{array}{l} A(0,0) \\ B(3,0) \\ C:\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases} \underset{\text{RESOLVIENDO EL SISTEMA}}{\Rightarrow} \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow C(4,1) \\ D(0,5) \end{array}}$$

- Hallamos los valores de la función objetivo $F = x + y$ en cada uno de los vértices:

$$\boxed{\begin{array}{l} A(0,0) \underset{\boxed{F=x+y}}{\Rightarrow} F=0+0=0 \\ B(3,0) \underset{\boxed{F=x+y}}{\Rightarrow} F=3+0=3 \\ C(4,1) \underset{\boxed{F=x+y}}{\Rightarrow} F=4+1=5 \\ D(0,5) \underset{\boxed{F=x+y}}{\Rightarrow} F=0+5=5 \end{array}}$$

La función objetivo alcanza el valor máximo en los vértices C y D y, por tanto, en todos los puntos del segmento CD. Hay infinitas soluciones, solución múltiple, que corresponden a los puntos del segmento situados entre el vértice C y el D.

6 PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL SIN SOLUCIÓN.

Un problema de programación lineal puede que no tenga solución, debido a una de estas dos razones:

a) Porque la región factible sea vacía.

b) Porque la región factible no éste acotada y no se alcance nunca en ella la solución óptima.

Ejemplo 1: Determina la solución del siguiente problema de programación lineal para minimizar y maximizar la función objetivo:

Función objetivo: $F = 15x + 25y$

Restricciones: $\begin{cases} 2x + 6y \geq 12 \\ 7x + 3y \geq 21 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Solución

- El primer paso es representar gráficamente el sistema de inecuaciones formado por las restricciones y obtenemos la región factible. (ver apartado 2 y 3 del tema):

$\boxed{2x + 6y \geq 12}$

- Dibujamos la recta 2x + 6y = 12 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

x	0	6
y	2	0

$2x + 6y \geq 12$

$(0,0) \Rightarrow 2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \geq 12$

$0 \geq 12$ No es Cierto, por tanto la solución es el semiplano donde no se encuentra el origen

$\boxed{7x + 3y \geq 21}$

- Dibujamos la recta 7x +3y =21 . Damos dos valores a la x
- Elegimos el origen (0 , 0)

x	0	3
y	7	0

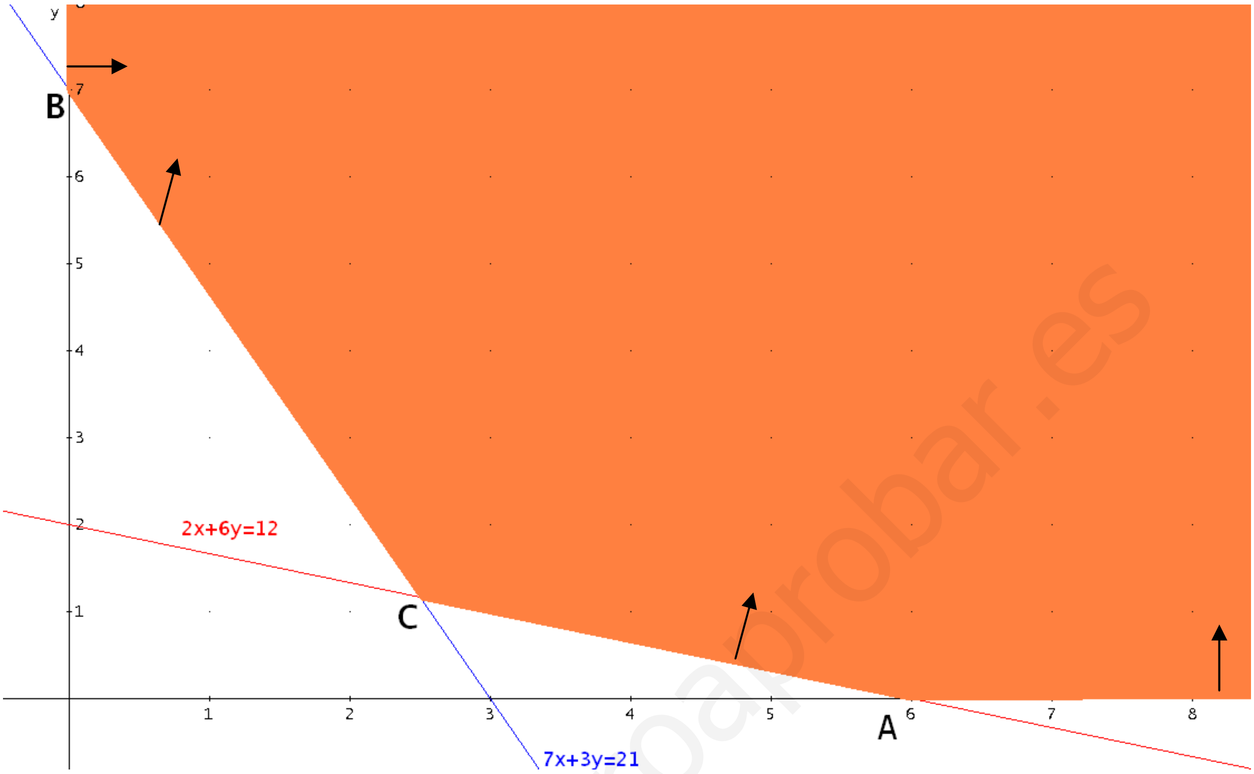
$7x + 3y \geq 21$

$(0,0) \Rightarrow 7 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \geq 21$

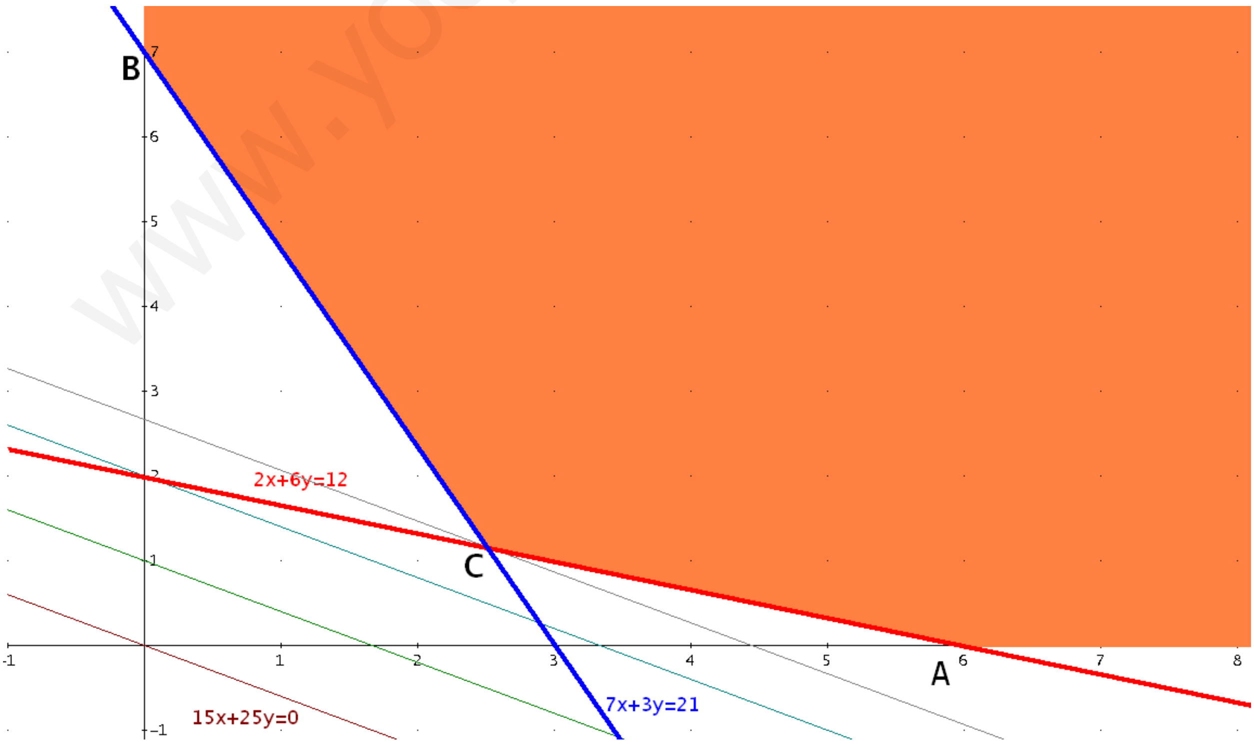
$0 \geq 21$ No es Cierto, por tanto la solución es el semiplano donde no se encuentra el origen

$\boxed{x \geq 0, y \geq 0}$, indica que estamos en el primer cuadrante.

Por tanto la región factible es:



- Representamos la recta de nivel de beneficio nulo 15x+25y=0 y la desplazamos paralelamente a ella misma hasta encontrar el vértice (solución única) o un lado (infinitas soluciones) de la región factible que cumpla la condición de máximo o mínimo,
- Observando la gráfica, la recta de mínimo nivel pasa por el punto C.



Calculamos el punto C : $C:\begin{cases}2x+6y=12\\7x+3y=21\end{cases}\underset{\text{RESOLVIENDO EL SISTEMA}}{\Rightarrow}\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\y=\dfrac{7}{6}\end{cases}\Rightarrow C(\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{6})$

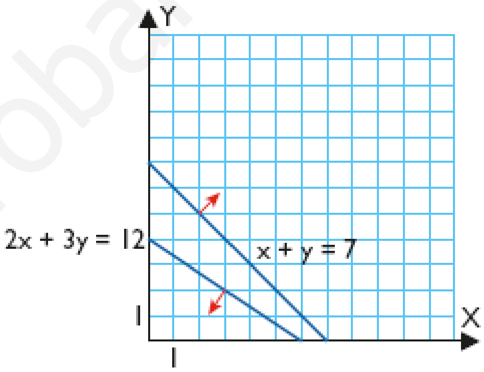
- Se observa que la región factible no está acotada y, por tanto, nunca se alcanza en ningún punto de ella el valor máximo.

Ejemplo 2: Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$\begin{cases}x+y\geq 7\\2x+3y\leq 12\\x\geq 0, y\geq 0\end{cases}$, minimiza en dicho recinto el valor de la función $f(x,y)=5x+2y$

Solución

Se representa la región factible, ver imagen, y se observa que la región factible está vacía, es decir, no hay ningún punto en el plano que verifique las restricciones del enunciado del problema.



7 EJERCICIOS

1. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x-y\le 1 \\ 5x+3y\le 15 \end{cases}$.

2. Representa el recinto formado por las siguientes restricciones: $\begin{cases} y-x\le 2 \\ x+5y\ge 10 \\ x+2y\le 16 \\ 2x+y\le 20 \end{cases}$

3. Determina la solución del siguiente problema de programación lineal para maximizar la función objetivo:

Función objetivo: $F=3x+6y$

Restricciones: $\begin{cases} x+y\le 10 \\ 0\le x\le 6 \\ x\ge y \\ y\ge 2 \end{cases}$

4. Un estudiante reparte propaganda publicitaria en su tiempo libre. La empresa A le paga 0,05 € por impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes, le paga 0,07 € por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos de tipo A, en la que le caben 120, y otra para los de tipo B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día puede repartir 150 impresos como máximo. ¿Cuántos impresos habrá de repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo?

5. Un autobús Madrid-París ofrece plazas para fumadores al precio de 100 € y a no fumadores al precio de 60 €. Al no fumador se le deja llevar 50 kg de peso y al fumador 20 kg. Si el autobús tiene 90 plazas y admite un equipaje de hasta 3 000 kg, ¿cuál debería ser la oferta de la compañía si se quiere obtener el máximo beneficio?

6. Un comerciante acude a cierto mercado a comprar naranjas con 500 €. Le ofrecen dos tipos de naranjas: las de tipo A a 0,5 € el kg y las de tipo B a 0,8 € el kg. Sabemos que solo dispone en su furgoneta de espacio para transportar 700 kg de naranjas como máximo y que piensa vender el kilo de naranjas de tipo A a 0,58 € y el de tipo B a 0,9 €. ¿Cuántos kilogramos de naranjas de cada tipo deberá comprar para obtener beneficio máximo?

7. Un sastre tiene 80 m^2 de tela de algodón y 120 m^2 de tela de lana. Un traje de caballero requiere 1 m^2 de algodón y 3 m^2 de lana y un vestido de señora necesita 2 m^2 de cada una de las telas. Calcula el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden por 15 € cada uno.

8. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. La unidad de tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 25 €. La de tipo B se vende a 30 € y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata. Si solo se dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

9. Un pastelero fabrica dos tipos de tartas T1 y T2, para lo que usa tres ingredientes, A, B y C. Dispone de 150 kg de A, 90 kg de B y 150 kg de C. Para fabricar una tarta T1 debe mezclar 1 kg de A, 1 kg de B y 2 kg de C, mientras que para hacer una tarta T2 necesita 5 kg de A, 2 kg de B y 1 kg de C.

Si se venden las tartas T1 a 10 €, y las tartas T2 a 23 € ¿qué cantidad debe fabricar de cada clase para maximizar sus ingresos?

10. En un taller de carpintería se fabrican mesas de cocina de formica y de madera. Las de formica se venden a 210€ y las de madera a 280€. La maquinaria del taller condiciona la producción, por lo que no se pueden fabricar al día más de 40 mesas de formica, ni más de 30 de madera, ni tampoco más de 50 mesas en total. Si se vende todo lo que se fabrica. ¿Cuántas mesas de cada tipo les convendría fabricar para ingresar por su venta la máxima cantidad de dinero posible?

Apuntes

MATEMÁTICAS

TEMA 5

Límites y Continuidad

TEMA 5: LÍMITES Y CONTINUIDAD

ÍNDICE

1. **Introducción**
2. **Concepto de función.**
3. **Dominio e imagen de una función.**
4. **Gráfica de algunas funciones elementales.**
5. **Funciones a trozos.**
6. **Concepto de Límite**
7. **Límites en un punto.**
8. **Límites en el infinito.**
9. **Continuidad de una función.**
10. **Ejercicios.**

1. Introducción

El límite de una función está íntimamente unido a su representación gráfica y a la interpretación de la misma debido a que lo que nos indica es el comportamiento o tendencia de la gráfica. Por esta razón, el concepto de límite es básico en el Análisis Matemático.

Las primeras definiciones de límite aparecen en la obra de Jonh Wallis (1616-1703) y en ella se utiliza por primera vez el símbolo infinito. Con posterioridad Jean Le Rond D'Alembert perfeccionó la definición de límite. Fue Ausgustin Cauchy (1789-1857) quien dio la definición de límite que utilizamos hoy en día.

En esta unidad didáctica se estudian los conceptos de límite y se definía con rigor, analizando todas sus posibles presentaciones (límites finitos en un punto, límites infinitos en un punto, límites en el infinito, límites laterales). Por último se dedica un apartado al análisis de los llamados límites indeterminados, mostrando con ejemplos el significado de estas indeterminaciones y aclarando un concepto que produce muchas confusiones en los alumnos.

En esta unidad se presenta el concepto de continuidad de funciones. En primer lugar se hace un acercamiento intuitivo al concepto de continuidad utilizando distintos ejemplos. Posteriormente se introduce el concepto riguroso de continuidad y se ven los distintos tipos de discontinuidades.

2. Concepto de función

Función es una correspondencia entre dos conjuntos por la que a cada elemento del conjunto inicial, le corresponde un elemento y sólo uno del conjunto final.
(Normalmente trabajaremos con funciones reales de variable real)

La manera de escribir una función es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to y = f(x) \\ \text{variable} & \text{imagende f de x} \end{array}$$

Gráfica de una función es el conjunto de puntos que resulta de unir los pares $(x, f(x))$

Formas de expresar una función: esta relación puede venir definida por una descripción verbal, una tabla de valores, una gráfica o una fórmula matemática.
Veamos un ***ejemplo***:

Escribe una tabla de valores, dibuja la gráfica de la función y encuentra su fórmula para la función descrita verbalmente como:

"A cada número le corresponde su doble"

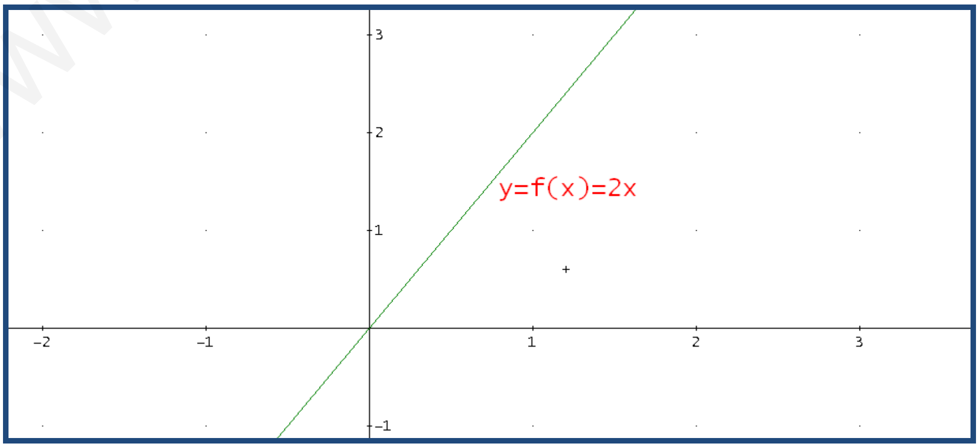
SOLUCIÓN:
Una posible tabla de valores es la siguiente

X	...	-1,5	-1,8	0	1	1,7	2	...
Y	...	-3	-3,6	0	2	3,4	2	...

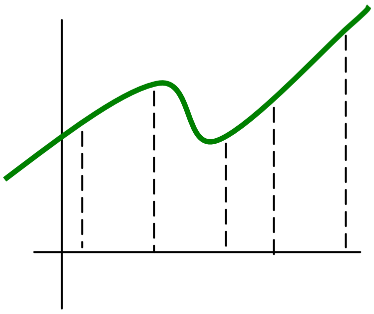
La fórmula de esta función es la siguiente:

$$f(x) = 2x$$

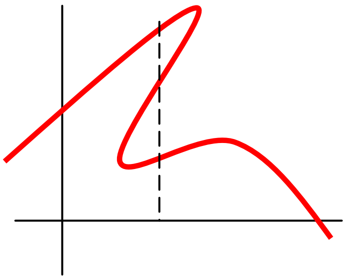
Y la gráfica de esta función es la siguiente,



Hay que tener en cuenta que no todas las gráficas son funciones. Es importante la idea de que la imagen y de cada valor de x es única. Veamos el siguiente ejemplo:



SI ES UNA FUNCIÓN



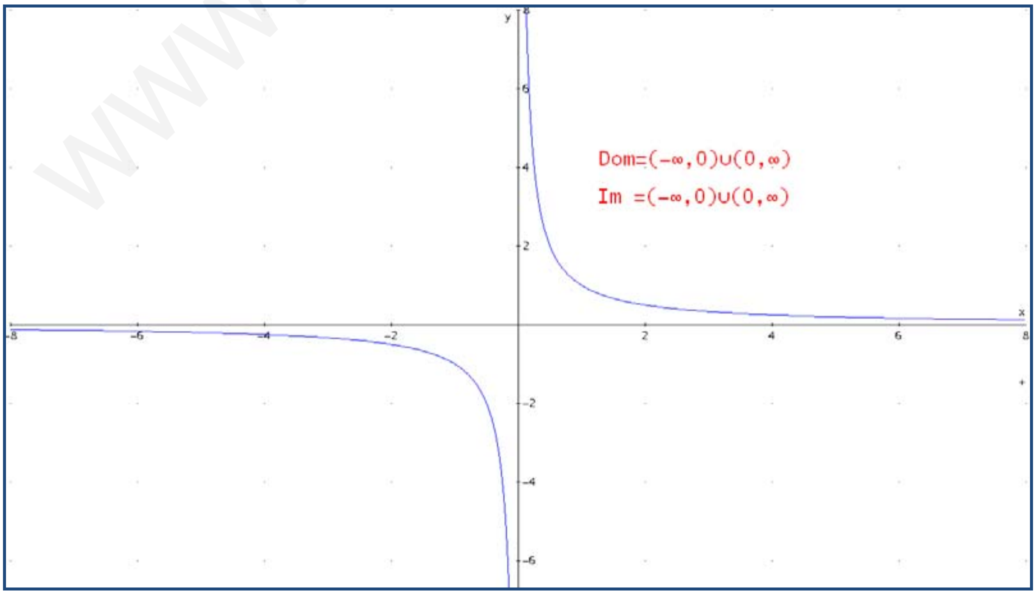
NO ES UNA FUNCIÓN

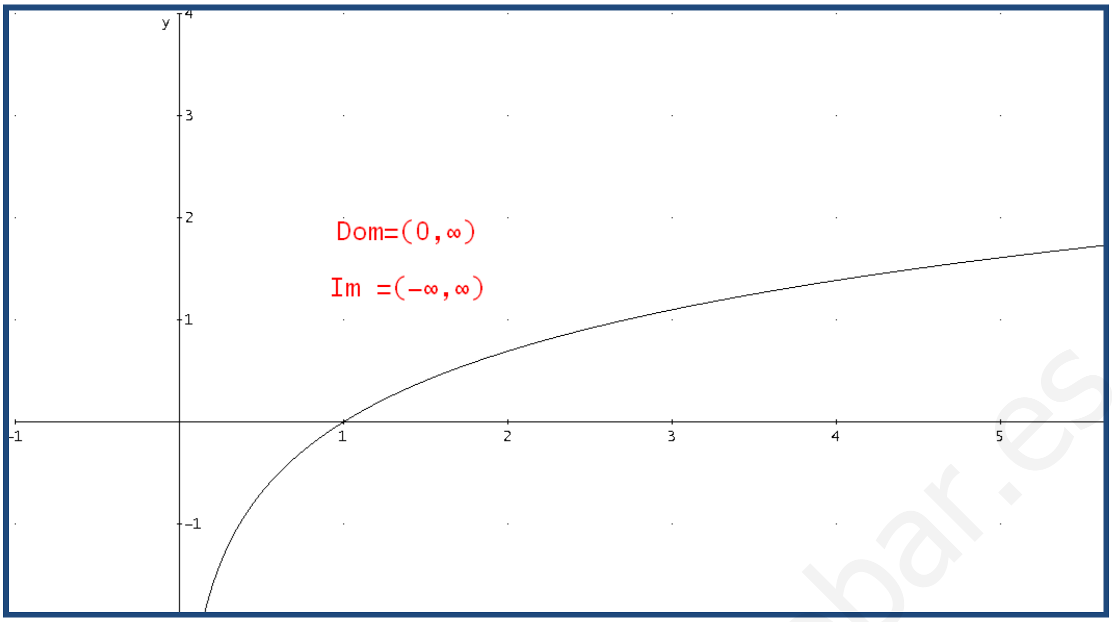
3. Dominio e imagen de una función.

- **Dominio de una función f (Dom (f))**: conjunto de valores para los cuales está definida la función.
- **Imagen de una función (Im (f))** : conjunto de valores que toma la función.

- El cálculo gráfico del dominio de una función se calcula a partir de su gráfica buscando sobre el eje horizontal los valores de x tales que la recta vertical que pasa por x corta a la gráfica de la función.
- El cálculo gráfico de la imagen de una función se calcula a partir de su gráfica buscando sobre el vertical los valores de y tales que la recta horizontal que pasa por y corta a la gráfica de la función.

Ejemplo: Observando la gráfica de la función, di cual es su dominio e imagen.





- **Cálculo algebraico del dominio de una función**: a partir de la fórmula que describe una función podemos encontrar el dominio de la misma. En estos casos, el tipo de función determina la estrategia que debe ser utilizada para encontrar dicho dominio. El alumno de primero de bachillerato debe tener presente las siguientes ideas a la hora de calcular dominios de funciones:

  - ✓ El dominio de **funciones polinómicas** son todos los números reales
  - ✓ El dominio de las **funciones racionales** son todos los números reales que hacen el denominador distinto de cero.
  - ✓ El dominio de las **funciones irracionales de índice impar** son todos los números reales.
  - ✓ El dominio de las **funciones irracionales de índice par** son todos los números reales que hacen el radicando mayor o igual que cero.
  - ✓ El dominio de **funciones logarítmicas** son todos los números que hacen mayor estrictamente que cero la expresión de la que se calcula el logaritmo.
  - ✓ El dominio de **funciones exponenciales** son todos los números reales.

Ejemplo: Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-5}$

$*$Vemos para que valor de x se hace cero el denominador $x-5=0 \Rightarrow \boxed{x=5}$

Por tanto $D(f)=\{x\in\mathbb{R}-\{5\}\}$

b) $g(x)=5x^2-x+8 \quad D(g)=\mathbb{R}$

c) $h(x)=\dfrac{3}{x^2-5x+6}$

$*$Vemos para que valor de x se hace cero el denominador $\boxed{x^2-5x+6=0}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases} x=\dfrac{5+1}{2}=\dfrac{6}{2}=3 \\ x=\dfrac{5-1}{2}=\dfrac{4}{2}=2\end{cases}$$

Por tanto $D(h)=\{x\in\mathbb{R}-\{2,3\}\}$

d) $r(x)=+\sqrt{3x-6}$

$*$Ver para que valores de x se verifica $\boxed{3x-6\geq 0}$ (Inecuación de 1º grado) $\Rightarrow$

$3x-6\geq 0\Rightarrow \quad 3x\geq 6\Rightarrow \boxed{x\geq 2}$

Por tanto $D(r)=\{x\in[2,\infty)\}$

4. Gráfica de algunas funciones elementales.

- Representar una recta: $y=f(x)=ax+b \quad \begin{cases} a = \text{Pendiente} \\ b = \text{Ordenada en el origen}\end{cases}$

Simplemente damos dos valores a la x y calculamos su imagen

Ejemplo: Dibuja las gráficas:

$y=f(x)=3x-4 \quad \Rightarrow$

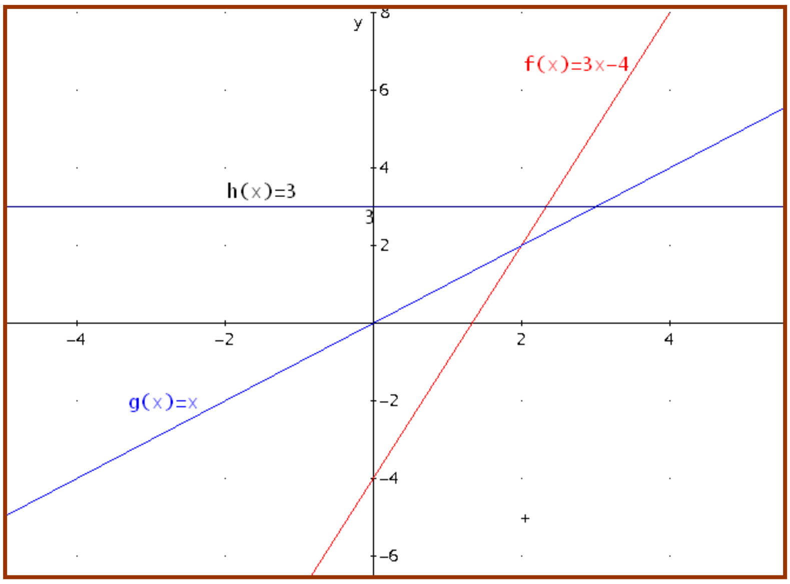
x	0	1
y	-4	-1

$y=g(x)=x \quad \Rightarrow$

x	0	2
y	0	2

$y=h(x)=3 \quad \Rightarrow$

x	0	1
y	3	3



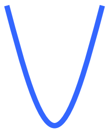
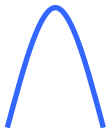
- Representar una parábola: $\boxed{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$

1º) Calculamos el Vértice $\begin{cases} x_v = \dfrac{-b}{2a} \\ y_v = f(x_v) \end{cases}$ $\quad V(x_v, y_v)$

2º) Puntos de corte con los ejes:

$\boxed{\text{Eje x}}$ $y = 0 \Rightarrow 0 = ax^2 + bx + c$

$\boxed{\text{Eje y}}$ $x = 0 \Rightarrow y = c$

3º) $\boxed{a > 0}$ $\Rightarrow$  $\boxed{a < 0}$ $\Rightarrow$ 

4º) Tabla de valores: Damos valores a la x para obtener más puntos de la parábola.

Ejemplo $\boxed{y = f(x) = x^2 - 2x - 8}$ Solución

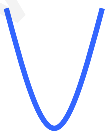
1º) Calculamos el Vértice $\begin{cases} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2 \cdot 1} = 1 \\ y_v = f(x_v) = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = -9 \end{cases} \Rightarrow \boxed{V(1,-9)}$

2º) Puntos de corte con los ejes:

$\boxed{\text{Eje x}}$ $y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 2x - 8$

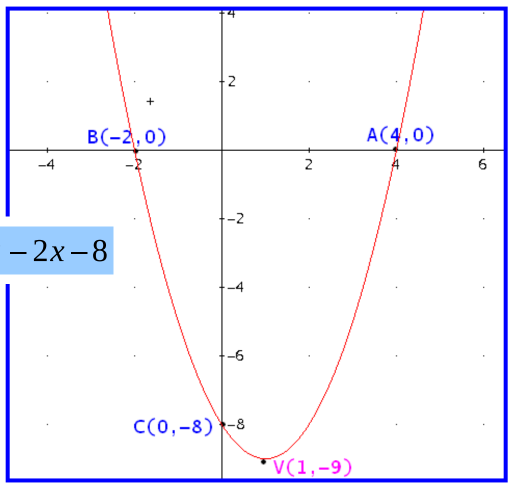
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x = \dfrac{2+6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \Rightarrow A(4,0) \\ x = \dfrac{2-6}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \Rightarrow B(-2,0) \end{cases}$$

$\boxed{\text{Eje y}}$ $x = 0 \Rightarrow y = -8 \quad C(0,-8)$

3º) $a = 1 > 0 \Rightarrow$ 

4º) Tabla de valores
[Doy un valor a la x y sustituto en la función f(x)]

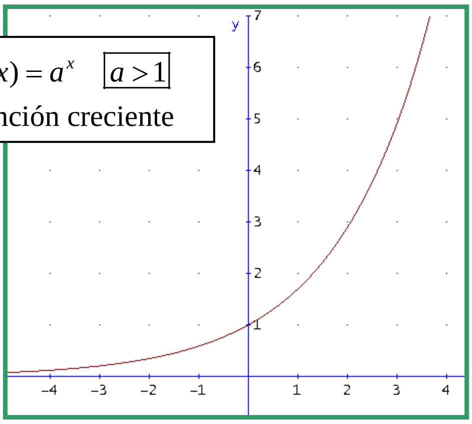
x	2	-1	3
y	-8	-5	-5



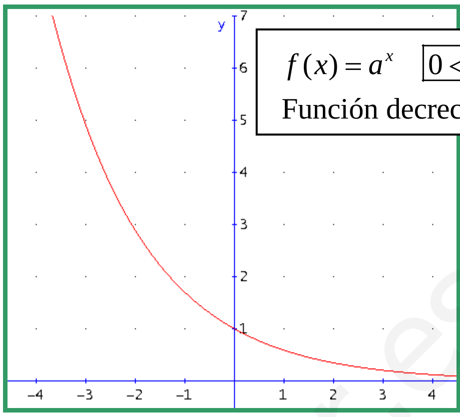
$y = f(x) = x^2 - 2x - 8$

- Representar una función exponencial: $y = f(x) = a^x$

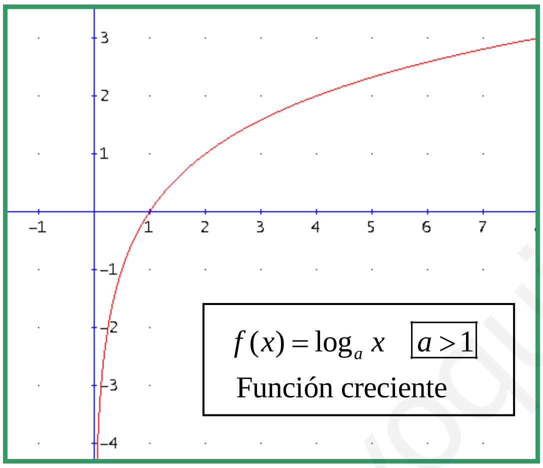
$f(x) = a^x$ $\boxed{a > 1}$
Función creciente



$f(x) = a^x$ $\boxed{0 < a < 1}$
Función decreciente

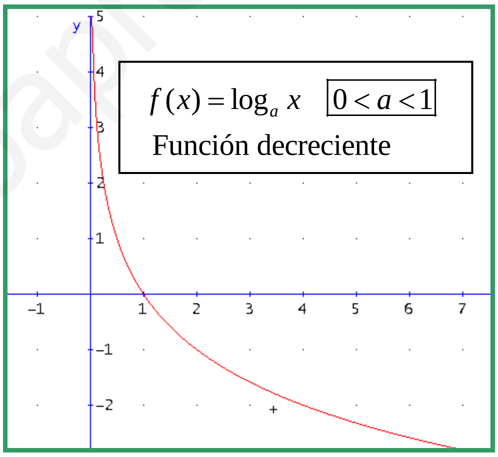


- Representar una función logarítmica: $y = f(x) = \log_a x$



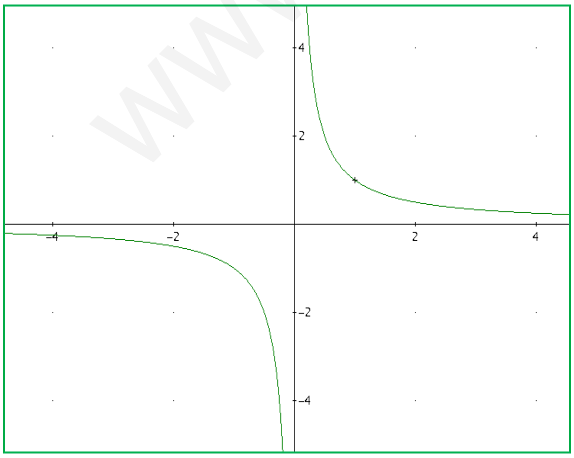
$f(x) = \log_a x$ $\boxed{a > 1}$
Función creciente

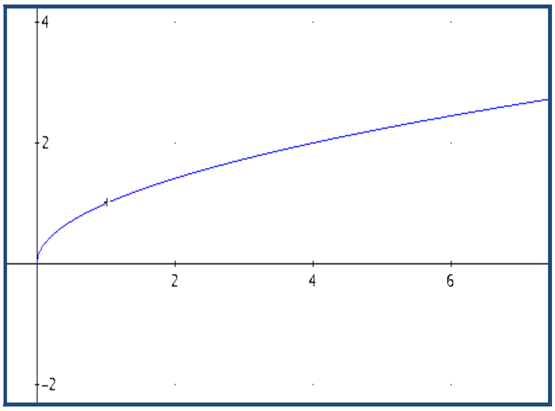
$f(x) = \log_a x$ $\boxed{0 < a < 1}$
Función decreciente



- Representar: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ Dando valores a x

Representar: $y = f(x) = \sqrt{x}$ Dando valores a x





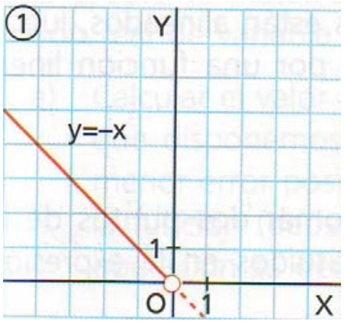
5. Funciones a trozos.

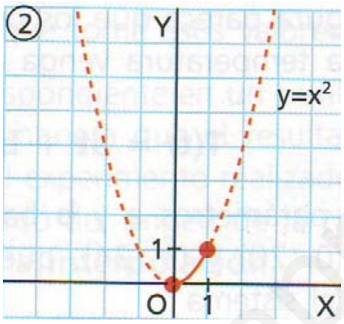
5. Funciones a trozos. son aquellas que poseen una expresión algebraica diferente para distintos valores o intervalos de números reales.

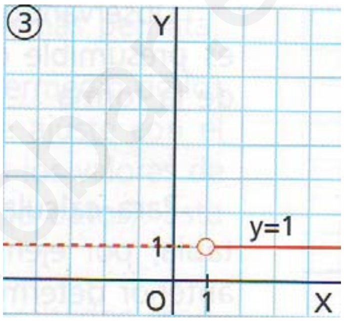
Ejemplo Representar la función $\boxed{f(x)=\begin{cases} -x & \text{si} \quad x<0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ 1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}}$

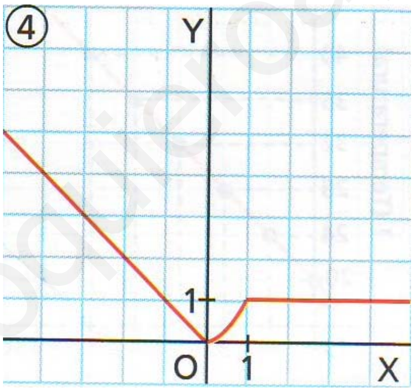
Solución:

Se representa cada uno de los trozos, y finalmente se representa la función completa









6. Concepto de Límite

El límite de una función f (x) en un punto a es el valor L al que se aproxima f (x) cuando x se aproxima al valor de a. Notación: $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=L}$

Después tenemos el significado de los <u>límites laterales</u>. Cuando la variable x se acerca al valor a pero tomando valores menores que a se dice que x tiende hacia a por su izquierda y se escribe $\boxed{x\to a^-}$. Análogamente la expresión $\boxed{x\to a^+}$ indica que x tiende hacia a pero tomando valores mayores que a, se dice que x tiende a a por la derecha.

Una función tiene límite en un punto si los límites laterales en dicho punto existen y son iguales.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L}$$

Ejemplo: Sea $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x<-2 \\ x-2 & \text{si} \quad -2<x<1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$. Estudia los límites cuando $\begin{matrix} x\to -2 \\ x\to 1 \end{matrix}$

Solución

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to -2^-}(2x)=2\cdot(-2)=-4 \\ \lim\limits_{x\to -2^+}(x-2)=-2-2=-4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+} f(x) \Rightarrow \underset{\text{(Existe)}}{\exists} \lim_{x\to -2} f(x)=-4$$

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 1^-}(x-2)=1-2)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-1)=1^2-1=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \underset{\text{(No Existe)}}{\nexists} \lim_{x\to 1} f(x)$$

- Operaciones con límites

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$, siendo L y M números finitos, entonces:

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=L+M$
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=L-M$
- $\lim\limits_{x\to a}[k\cdot f(x)]=k\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)=k\cdot L \qquad \text{donde } k\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=L\cdot M$
- $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L}{M} \qquad \text{con } \lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$

Ejemplo: Sabiendo que las funciones f(x) y g(x) tienen por límite -2 y 5, respectivamente, cuando x tiende a 3, calcula el valor de los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3}[5\cdot f(x)-g(x)]=$ b) $\lim\limits_{x\to 3}[f(x)+2g(x)]=$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2\cdot f(x)}{7\cdot g(x)}=$

Solución $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-2$ y $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=5$

a) $\lim\limits_{x\to 3}[5\cdot f(x)-g(x)]=5\cdot\lim\limits_{x\to 3} f(x)-\lim\limits_{x\to 3} g(x)=5\cdot(-2)-5=-10-5=-15$

b) $\lim\limits_{x\to 3}[f(x)+2g(x)]=\lim\limits_{x\to 3} f(x)+2\cdot\lim\limits_{x\to 3} g(x)=-2+2\cdot 5=-2+10=8$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2\cdot f(x)}{7\cdot g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3} 2\cdot f(x)}{\lim\limits_{x\to 3} 7\cdot g(x)}=\dfrac{2\cdot\lim\limits_{x\to 3} f(x)}{7\cdot\lim\limits_{x\to 3} g(x)}=\dfrac{2\cdot(-2)}{7\cdot 5}=-\dfrac{4}{35}$

- Operaciones con infinitos: $\boxed{a \in \mathbb{R}}$

SUMAS	PRODUCTOS	COCIENTES
$a+\infty=+\infty$ $+\infty+\infty=+\infty$ $a-\infty=-\infty$ $-\infty-\infty=-\infty$ $-(-\infty)=+\infty$	$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ $\text{Si } a>0 \begin{cases} a\cdot(+\infty)=+\infty \\ a\cdot(-\infty)=-\infty \end{cases}$ $\text{Si } a<0 \begin{cases} a\cdot(+\infty)=-\infty \\ a\cdot(-\infty)=+\infty \end{cases}$	$\frac{a}{\pm\infty}=0$ $\frac{a}{0}=\pm\infty,\ si\ a\neq 0$ $\frac{\pm\infty}{0}=\pm\infty$ $\frac{0}{\pm\infty}=0$

7. Límites en un punto.

A) **Límite de una función continua**: simplemente sustituimos x en la función por el valor al que tiende.

B) **Límite del tipo** $\boxed{\boxed{\frac{k}{0}}\quad k\neq 0}$:

$*$ No existe el límite
$*$ Se hacen los límites laterales que valdrán $+\infty$ o $-\infty$

Expresión Conjugada de A + B es A - B.

C) **Indeterminación** $\boxed{\frac{0}{0}}$

$\boxed{\text{Función Racional}}$: en este caso se factoriza el numerador y el denominador y se simplifica los factores comunes.

$\boxed{\text{Función Irracional}}$: se multiplica el numerador y el denominador por la expresión conjugada de la que tiene radicales.

Ejemplo: Calcula los siguientes límites de funciones continuas:

$a)\lim_{x\to 2}\frac{3x+1}{x}=\frac{3\cdot 2+1}{2}=\frac{7}{2}$ c) $\lim_{x\to 4} 7=7$

b) $\lim_{x\to 0}(e^x-5)=e^0-5=1-5=-4$ d) $\lim_{x\to -2}(x-5)=-2-5=-7$

Ejemplo: Calcula los siguientes límites:

$$a)\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}\boxed{\tfrac{0}{0}}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(x-2)}=\frac{3+3}{3-2}=6$$

$$b)\lim_{x\to 5}\frac{x^2-10x+25}{x-5}\boxed{\tfrac{0}{0}}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)^2}{x-5}=\lim_{x\to 5}(x-5)=5-5=0$$

$$c)\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\boxed{\tfrac{0}{0}}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3})^2-2^2}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\cdot(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{\sqrt{1+3}+2}=\frac{1}{4}$$

8. Límites en el infinito. $\boxed{\begin{array}{l}x\to+\infty\\ x\to-\infty\end{array}}$

A) **Límite de funciones polinómicas** $\boxed{f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0}$:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n=\pm\infty\left(\begin{array}{l}\text{El signo depende de si}\\ \text{n es par o impar y del signo de } a_n\end{array}\right)}$$

B) **Indeterminación** $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$: en el libro explican la forma de hacerlo tanto para funciones racionales como irracionales. A continuación pongo un esquema para calcular más rápidamente estos límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^n+\ldots+bx+c}{dx^m+\ldots+ex+f}=\begin{cases}\boxed{0} & \text{si} \quad \text{grado } P(x)<\text{grado } Q(x)\\ \boxed{\dfrac{a}{d}} & \text{si} \quad \text{grado } P(x)=\text{grado } Q(x)\\ \boxed{\pm\infty}\ \text{(El signo del límite lo da el signo de los coeficientes a y d)} & \text{si} \quad \text{grado } P(x)>\text{grado } Q(x)\end{cases}$$

NOTA: Cuando $\boxed{x\to-\infty}$ el criterio sigue siendo el mismo, mirando los signos en el caso: grado $P(x)>$ grado $Q(x)$.

C) **Indeterminación** $\boxed{\infty-\infty}$: puede ser resolverse realizando la operación indicada o en otros casos hay que multiplicar el numerador y el denominador por la expresión conjugada.

Ejemplo: Calcula los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}(5x^2+2x-14)=+\infty \qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+3}{-6x^2+x+6}\overset{\boxed{\frac{\infty}{\infty}}}{\underset{\boxed{\text{Ver Cuadro}}}{=}}-\frac{7}{6} \qquad c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{9x+15}{6x^2-x+5}\overset{\boxed{\frac{\infty}{\infty}}}{\underset{\boxed{\text{Ver Cuadro}}}{=}}0$$

$$d)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-6x^2+x-10}{8x-6}\overset{\boxed{\frac{\infty}{\infty}}}{\underset{\boxed{\text{Ver Cuadro}}}{=}}+\infty \qquad e)\ \lim_{x\to\infty}\frac{9}{x-1}=\frac{9}{\infty}=0 \qquad f)\ \lim_{x\to-\infty}(-23x^3-8x+30)=+\infty$$

$$g)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+7}{-5x^2+2x-7}\overset{\boxed{\frac{\infty}{\infty}}}{\underset{\boxed{\text{Ver Cuadro}}}{=}}-\infty \qquad h)\ \lim_{x\to\infty}\frac{7}{\sqrt{2x+5}+6x}=\frac{7}{\infty}=0 \qquad i)\ \lim_{x\to\infty}\frac{13x+2}{\sqrt{4x^2+3x+2}}=\frac{13}{\sqrt{4}}=\frac{13}{2}$$

$$j)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x-3}{\sqrt{x^2-7x}+3x}=\frac{5}{\sqrt{1}+3}=\frac{5}{4} \qquad k)\ \lim_{x\to\infty}\frac{34x^2}{\sqrt[3]{8x^2+x-5}}=+\infty \qquad l)\ \lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+5}{\sqrt[3]{6x^7+x-15}}=0$$

$$m)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x+5}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-x}}=\frac{5}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{5}{2}$$

$$n)\ \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{2x-1}-\frac{3x^2}{x+2}\right]\overset{\boxed{\infty-\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2\cdot(x+2)-3x^2\cdot(2x-1)}{(2x-1)\cdot(x+2)}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+2x^2-6x^3+3x^2}{2x^2+4x-x-2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-5x^3+5x^2}{2x^2+3x-2}\right]=-\infty$$

$$o)\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})\overset{\boxed{\infty-\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+5})^2-(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+5-x}{\sqrt{n+5}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}=\frac{5}{\infty}=0$$

$$p)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x^2+5}}\overset{\boxed{\infty-\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+7x}+\sqrt{x^2+5}}{(\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x^2+5})\cdot(\sqrt{x^2+7x}+\sqrt{x^2+5})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+7x}+\sqrt{x^2+5}}{\left(\sqrt{x^2+7x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+7x}+\sqrt{x^2+5}}{x^2+7x-x^2-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+7x}+\sqrt{x^2+5}}{7x-5}=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{1}}{7}=\frac{2}{7}$$

9. Continuidad de una función.

Durante mucho tiempo fue aceptada como idea intuitiva que " *una función continua es aquella cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel* " .

Esta idea fue formalizada por Cauchy :

La función <u>f(x) es continua en x = a</u> si $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$

Es decir

f (x) es continua en x = a si $\begin{cases} 1) \underset{\text{(Existe)}}{\exists} f(a) \\ 2) \underset{\text{(Existe)}}{\exists} \lim_{x\to a} f(x) \\ 3) \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \end{cases}$

<u>Propiedades de las funciones continuas</u>

Si f (x) y g(x) son continuas en x=a $\Rightarrow \begin{cases} (f+g)(x) \text{ es continua en x = a} \\ (f \cdot g)(x) \text{ es continua en x = a} \\ (f/g)(x) \text{ es continua en x = a si } g(a) \neq 0 \end{cases}$

Cuando una función no es continua en un punto se dice que es discontinua en dicho punto.

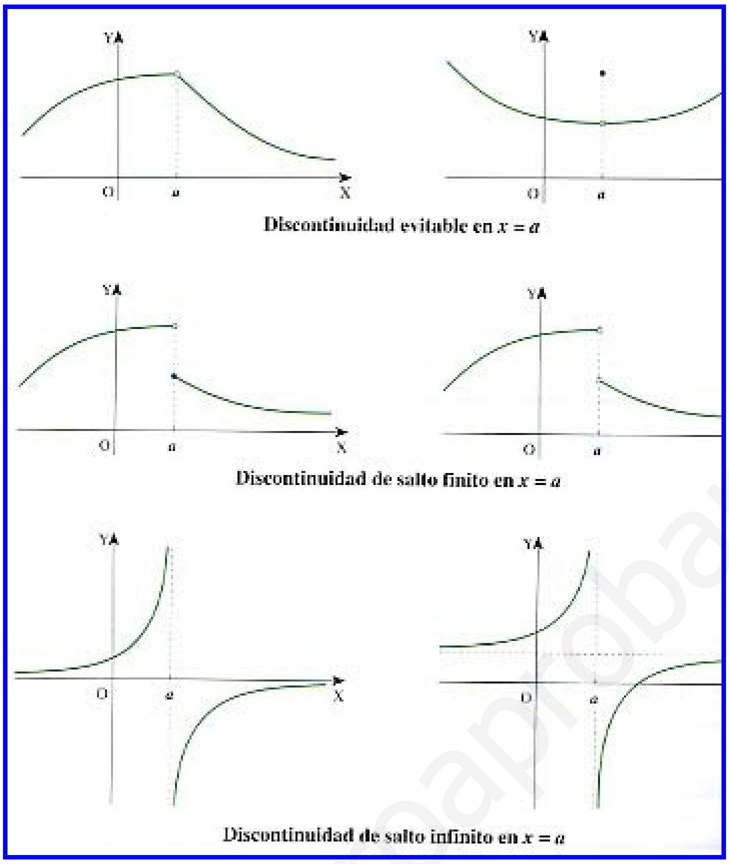
<u>Algunos Tipos de discontinuidades</u>

- ***Discontinuidad evitable:*** se produce cuando

  $* \text{ Existe } f(a) \; y \; \lim_{x\to a} f(x), \text{ pero } \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

  $* \text{ No Existe } f(a) \; y \; sí \; \lim_{x\to a} f(x)$

- ***Discontinuidad de salto finito:*** se produce cuando no existe lim f (x) porque los dos límites laterales son finitos, pero no iguales. Da lo mismo si f (a) existe o no.
- ***Discontinuidad de salto infinito:*** se produce cuando uno o los dos límites laterales son ∞. En este caso, f (a) puede existir o no.



En general las funciones con las que se va a trabajar habitualmente: las funciones polinómicas, la función sen x y cos x , las funciones exponenciales y logarítmicas, son continuas en todo su dominio. Por eso si se quiere calcular el límite de alguna de estas funciones en un punto de su dominio basta con calcular el valor de la función en dicho punto.

Ejemplo:. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$a)\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-1} & \text{si} \quad x<1 \\ 5 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \quad \text{en } \ x=1$$

Se trata de una función a trozos. Las funciones parciales son continuas en sus dominios. Estudiemos la continuidad de la función $g(x)$ en los puntos de unión (en este caso $x=1$).

$\boxed{x=1}$

1) $g(1)=5$

$$2)\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2}{x-1} \overset{\frac{2}{0^-}}{=} -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 5 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} g(x) \neq \lim_{x\to 1^+} g(x) \Rightarrow \underset{\text{(No Existe)}}{\nexists} \lim_{x\to 1} g(x)$$

$\boxed{\text{DISCONTINUIDAD DE SALTO INFINITO}}$

$b)\ f(x)=\begin{cases}-2x-x^2 & \text{si} \quad x\le -1\\ -x & \text{si} \quad -1<x<1\\ x^2-2x & \text{si} \quad x>1\end{cases}$ en $x=-1$ y $x=1$

Se trata de una función a trozos. Las funciones parciales son continuas en sus dominios. Estudiemos la continuidad de la función $f(x)$ en los puntos de unión (en este caso $x=-1\ \ y\ \ x=1$).

$\boxed{x=-1}$

1) $f(-1)=-2\cdot(-1)-(-1)^2=2-1=1$

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}(-2x-x^2)=-2\cdot(-1)-(-1)^2=2-1=1\\ \lim\limits_{x\to -1^+}(-x)=-(-1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\Rightarrow \underset{\text{(Existe)}}{\exists}\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1=f(-1)$

$\boxed{f(x)\text{ ES CONTINUA EN } x=-1}$

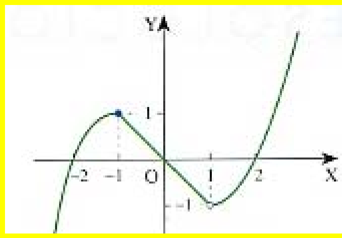
$\boxed{x=1}$

1) $\nexists f(1)$

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}(-x)=-1\\ \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-2x)=1^2-2\cdot 1=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow \underset{\text{(Existe)}}{\exists}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-1$

$\boxed{\text{DISCONTINUIDAD EVITABLE}}$

$\boxed{\text{Gráficamente}\Rightarrow}$



Ejemplo:.

Calcular el valor de a para que f(x) sea continua en todos los números reales.

$f(x)=\begin{cases}e^{x-1} & \text{si} \quad x<1\\ (x+a)^2 & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$

Solución

$f(x)=\begin{cases}e^{x-1} & \text{si} \quad x<1\\ (x+a)^2 & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$

Se trata de una función a trozos. Las funciones parciales son continuas en sus dominios. Vamos a imponer que la función $f(x)$ sea continua en $x=1$.

$\boxed{x=1}$

1) $f(1)=(1+a)^2=1+a^2+2a$

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} e^{x-1}=e^{1-1}=e^0=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+}(x+a)^2=(1+a)^2=1+a^2+2a\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow 1=1+a^2+2a\Leftrightarrow 0=a^2+2a=a(a+2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(a+2)=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ a=-2\end{cases}$ $\boxed{f(x)\text{ es continua en todo }\mathbb{R}\text{ si } a=0\ \text{ o }\ a=-2}$

Ejemplo:.

Calcular el valor de a y b para que f(x) sea continua en todos los números reales.

$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{si} \quad x<-1 \\ ax+b & \text{si} \quad -1\leq x<1 \\ x^2 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Solución

$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{si} \quad x<-1 \\ ax+b & \text{si} \quad -1\leq x<1 \\ x^2 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Se trata de una función a trozos. Las funciones parciales son continuas en sus dominios. Vamos a imponer que la función $f(x)$ sea continua en $x=-1$ y $x=1$.

$\boxed{x=-1}$

1) $f(-1)=a\cdot(-1)+b=-a+b$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-}(-x-2)=-(-1)-2=1-2=-1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+}(ax+b)=-a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow \boxed{-1=-a+b}$

$\boxed{x=1}$

1) $f(1)=1^2=1$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}(ax+b)=a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x^2=1^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \boxed{1=a+b}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -1=-a+b \\ 1=a+b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} -1=-a+b \\ 1=a+b \end{array}\right\} \underset{\text{RESOLVIENDO EL SISTEMA}}{\Rightarrow} \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ es continua en todo } \mathbb{R} \text{ si } a=1 \text{ y } b=0}$$

Ejemplo:.

Hallar el valor de k para que la función f(x) sea continua en x=-2

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{si} \quad x\neq -2 \\ k & \text{si} \quad x=-2 \end{cases}$$

Solución

La función f(x) es continua en x = -2 si $\boxed{\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)}$

$\boxed{x=-2}$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f(-2) = k \\ 2)\ \lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x+2}\boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim_{x \to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{(x+2)}} = \lim_{x \to -2}(x-2) = -2-2 = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{k=-4}$$

10. Ejercicios.

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$a)\ \mathrm{f}(x) = \frac{2x+1}{x^2+4} \quad b)\ \mathrm{g}(x) = +\sqrt{\frac{x-6}{x+1}} \quad c)\ h(x) = +\sqrt{x^2-4x+3}$

2. Representa: $a)\ f(x) = x^2-4x+4 \quad b)\ g(x) = -x^2+x+6$

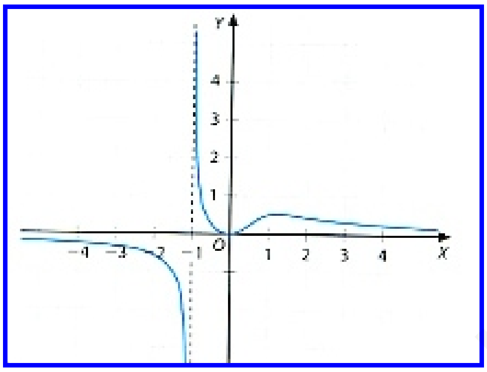
3. Representar la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < -1 \\ x+2 & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

4. Sea $f(x) = \begin{cases} -5 & \text{si} \quad x < 0 \\ 7x+1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ x^2+7 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$. Estudia los límites cuando $\boxed{\begin{array}{l} x \to 0 \\ x \to 1 \end{array}}$.

5. Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x-2 & \text{si} \quad 0 < x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

6. Dada la siguiente gráfica de la función f(x), calcula los límites que se indican:

$a)\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ $\quad$ $b)\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$ $\quad$ $c)\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=$ $\quad$ $d)\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=$ $\quad$ $e)\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$



7. Calcula los siguientes límites:

$a)\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-6x}{2x^2-14x+12}=$ $\quad$ $b)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x^2-8x}=$ $\quad$ $c)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-8}{\sqrt{x-3}-1}=$ $\quad$ $d)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}}{x-1}=$ $\quad$ $e)\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^2-9}=$

8. Calcula los siguientes límites :

$a)\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x^3+7x+3)$ $\quad$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^3+7}{-x^2+2x-7}$ $\quad$ $c)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{\sqrt{2x-1}+6x}$

$d)\lim\limits_{x\to\infty}(-4x^2+2x-14)=$ $\quad$ $e)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+3}{5x^2+x+6}$ $\quad$ $f)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-5}{5x^2-4x+5}$

$g)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+2x-1}{3x-6}$ $\quad$ $h)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x-1}$ $\quad$ $i)\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})$

$j)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x+5}}$ $\quad$ $k)\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-6}-\sqrt{x^2-9})=$

9. Estudiar la continuidad de $f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & \text{si} \quad x\le 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad 1<x<2 \\ 2x-3 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$

10. Estudiar la continuidad de $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x+1} & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

11. Estudiar la continuidad de $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x\le 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0<x<3 \\ -x^2+3x-2 & \text{si} \quad x\ge 3 \end{cases}$ y represéntala.

12. Calcular el valor de a para que f(x) sea continua en todos los números reales.

$$f(x)=\begin{cases} 3-ax^2 & \text{si} \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{ax} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

13. Calcular el valor de a, b, c y d para que f(x) sea continua en todos los números reales.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x & \text{si} \quad x<2 \\ 3x-a & \text{si} \quad 2\le x<3 \\ \text{b} & \text{si} \quad 3\le x<5 \\ -x+c & \text{si} \quad 5\le x<7 \\ \text{d} & \text{si} \quad x\ge 7 \end{cases}$$

14. Calcular el valor de a y b para que f(x) sea continua en todos los números reales.

$f(x)=\begin{cases} -2x-a & \text{si} \quad x\le 0 \\ x-1 & \text{si} \quad 0<x\le 2 \\ bx-5 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$. Para esos valores de a y b representa la función f(x)

15. Calcular el valor de a y b para que f(x) sea continua en todos los números reales. $f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si} \quad x<0 \\ x-a & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ \dfrac{a}{x}+b & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$

Apuntes

MATEMÁTICAS

TEMA 6

Derivadas

TEMA 6: DERIVADAS

ÍNDICE

1. **Introducción**
2. **Concepto de Derivada de una Función en un punto.**
3. **Cálculo de Derivadas.**
4. **Recta tangente.**
5. **Derivabilidad y Continuidad.**
6. **Ejercicios.**

1. Introducción

La derivada inaugura una de las partes más importantes de las matemáticas: el cálculo diferencial. La derivada de una función en un punto x_0 surge del problema de calcular la tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x_0, y fue Fermat el primero que aportó la primera idea al tratar de buscar los máximos y mínimos de algunas funciones.

El concepto se derivada se aplica en los casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una situación. Por ello es una herramienta de cálculo fundamental en los estudios de Física, Química y Biología. También en las ciencias sociales como la Economía y la Sociología se utiliza el análisis matemático para explicar la rapidez de cambio en las magnitudes que les son propias.

En este tema, además de definir el concepto de derivada, se mostrará su significado y se hallarán las derivadas de las funciones más usuales. Es de capital importancia dominar la derivación para después poder abordar el trazado de curvas, así como para comprender la utilidad del cálculo integral.

El objetivo fundamental de esta unidad es que el alumno domine a la perfección el cálculo de las derivadas de las principales funciones (potenciales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc) así como el cálculo de la ecuación de la recta tangente a una función en un punto.

2. Concepto de derivada de una Función en un punto

Tasa de Variación Media (T.V.M.).

Sea f(x) definida en el intervalo [a , b] , se llama Tasa de Variación Media (T.V.M.) al número $\boxed{T.V.M. = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}$

Ejemplo: Dada la función $f(x) = 5x^2 + x - 3$. Calcula su Tasa de Variación Media (T.V.M.) en los intervalos:

$a)[0,4]$ $\qquad$ $b)[-1,2]$

$$a)[0,4] \Rightarrow T.V.M. = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{81 - (-3)}{4} = \frac{81 + 3}{4} = \frac{84}{4} = 21$$

$$f(x) = 5x^2 + x - 3 \Rightarrow \begin{cases} f(4) = 5 \cdot 4^2 + 4 - 3 = 80 + 4 - 3 = 81 \\ f(0) = 5 \cdot 0^2 + 0 - 3 = -3 \end{cases}$$

$$b)[-1,2] \Rightarrow T.V.M. = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{19 - 1}{2 + 1} = \frac{18}{3} = 6$$

$$f(x) = 5x^2 + x - 3 \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 5 \cdot 2^2 + 2 - 3 = 20 + 2 - 3 = 19 \\ f(-1) = 5 \cdot (-1)^2 + (-1) - 3 = 5 - 1 - 3 = 1 \end{cases}$$

Derivada de una función en un punto.

Dada una función f, llamamos derivada de f en un punto a al límite:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)}$$

Cuando existe este límite, decimos que la función f es derivable en x = a

En la práctica el cálculo de la derivada no se realiza por su definición por ser demasiado engorroso.

3. Cálculo de Derivadas.

Veamos el cálculo de derivadas y las reglas de derivación. Para resumirlas todas se adjunta en la última página de este tema la TABLA DE DERIVADAS.

Ejemplo Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$y=3 \quad y=-5x \quad y=4x^2-3x+1 \quad y=(4x^3+x)^3$$

$$y=\sqrt{x^2+x+1} \quad y=e^{2x} \quad y=2^{5x+1} \quad y=e^{x^2+3}+3x$$

$$y=\ln(x+1) \quad y=\log_2(4x^2+2) \quad y=(5x+e^x)^2 \quad y=tg(4x+5)$$

$$y=\frac{1}{x} \quad y=(x+2)\cdot e^{3x} \quad y=sen\ x \quad y=\cos(3x+5)\cdot\ln x$$

$$y=\frac{x^2}{x+1} \quad y=\ln^2(x+2) \quad y=\frac{3x-5}{x-2} \quad y=e^{\cos(3x+5)}$$

$$y=3x+1 \quad y=(x+2)^4 \quad y=\frac{x^2}{3}-x+1 \quad y=(\cos x+x)^2$$

$$y=\sqrt[3]{2x+1} \quad y=x\cdot\ln x \quad y=\frac{sen\ x}{e^x} \quad y=(3x^2+2)^3\cdot tg(x+1)$$

$$y=\frac{2}{x^3} \quad y=\ln(\cos x) \quad y=arctg(4x) \quad y=\frac{x^2}{x+7}$$

$$y=(x+1)\cdot e^{-4x^2+2x+1} \quad y=(3x-sen\ x)\cdot e^{-x} \quad y=sen\ (\ln x) \quad y=\cos^2(3x+5)$$

SOLUCIÓN

$$y=3 \quad \Rightarrow y'=0$$
$$y=-5x \quad \Rightarrow y'=-5$$
$$y=4x^2-3x+1 \quad \Rightarrow y'=8x-3$$
$$y=(4x^3+x)^3 \quad \Rightarrow y'=3(4x^3+x)^2\cdot(12x^2+1)$$

$$y=\sqrt{x^2+x+1}=(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow y'=\frac{1}{2}(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(2x+1)=\frac{1}{2}(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+1)=$$
$$\frac{2x+1}{2\cdot(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2x+1}{2\cdot\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$y=e^{2x} \quad \Rightarrow y'=2\cdot e^{2x}$$
$$y=2^{5x+1} \quad \Rightarrow y'=5\cdot 2^{5x+1}\cdot\ln 2$$
$$y=e^{x^2+3}+3x \quad \Rightarrow y'=2x\cdot e^{x^2+3}+3$$

$$y=\ln(x+1) \quad \Rightarrow y'=\frac{1}{x+1}$$
$$y=\log_2(4x^2+2) \quad \Rightarrow y'=\frac{8x}{4x^2+2}\log_2 e$$
$$y=(5x+e^x)^2 \quad \Rightarrow y'=2\cdot(5x+e^x)(5+e^x)$$
$$y=tg(4x+5) \quad \Rightarrow y'=4\cdot(1+tg^2(4x+5))$$

$$y=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow y'=\frac{-1}{x^2}$$
$$y=(x+2)\cdot e^{3x} \quad \Rightarrow y'=e^{3x}+(x+2)\cdot 3\cdot e^{3x}=e^{3x}[1+(x+2)\cdot 3]=e^{3x}(1+3x+6)=e^{3x}(7+3x)$$
$$y=sen\ x \quad \Rightarrow y'=\cos x$$
$$y=\cos(3x+5)\cdot\ln x \quad \Rightarrow y'=-3sen(3x+5)\cdot\ln x+\cos(3x+5)\cdot\frac{1}{x}=-3sen(3x+5)\cdot\ln x+\frac{\cos(3x+5)}{x}$$

$$y=\frac{x^2}{x+1} \quad \Rightarrow y'=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$
$$y=\ln^2(x+2)=[\ln(x+2)]^2 \quad \Rightarrow y'=2\cdot\ln(x+2)\cdot\frac{1}{x+2}=\frac{2\cdot\ln(x+2)}{x+2}$$
$$y=\frac{3x-5}{x-2} \quad \Rightarrow y'=\frac{3(x-2)-(3x-5)}{(x-2)^2}=\frac{3x-6-3x+5}{(x-2)^2}=\frac{-1}{(x-2)^2}$$
$$y=e^{\cos(3x+5)} \quad \Rightarrow y'=-3\cdot sen(3x+5)\cdot e^{\cos(3x+5)}$$

$$y=3x+1 \quad \Rightarrow y'=3$$
$$y=(x+2)^4 \quad \Rightarrow y'=4\cdot(x+2)^3$$
$$y=\frac{x^2}{3}-x+1 \quad \Rightarrow y'=\frac{2x}{3}-1$$
$$y=(\cos x+x)^2 \quad \Rightarrow y'=2\cdot(\cos x+x)\cdot(-sen\ x+1)$$

$$y=\sqrt[3]{2x+1}=(2x+1)^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow y'=\frac{1}{3}\cdot(2x+1)^{\frac{1}{3}-1}\cdot 2=\frac{1}{3}\cdot(2x+1)^{\frac{-2}{3}}\cdot 2=\frac{2}{3\cdot(2x+1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$$
$$y=x\cdot\ln x \quad \Rightarrow y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$
$$y=\frac{sen\ x}{e^x} \quad \Rightarrow y'=\frac{\cos x\cdot e^x-sen\ x\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{\cancel{e^x}\cdot(\cos x-sen\ x)}{(e^x)^{\cancel{2}}}=\frac{\cos x-sen\ x}{e^x}$$
$$y=(3x^2+2)^3\cdot tg(x+1) \quad \Rightarrow y'=3(3x^2+2)^2\cdot 6x\cdot tg(x+1)\ +\ (3x^2+2)^3\cdot(1+tg^2(x+1)\ )$$

$$y=\frac{2}{x^3} \Rightarrow y'=\frac{-2\cdot 3x^2}{(x^3)^2}=\frac{-6x^2}{x^6}=\frac{-6}{x^4}$$

$$y=\ln(\cos x) \Rightarrow y'=\frac{-sen\ x}{\cos x}=-tgx$$

$$y=arctg(4x) \Rightarrow y'=\frac{4}{1+(4x)^2}=\frac{4}{1+16x^2}$$

$$y=\frac{x^2}{x+7} \Rightarrow y'=\frac{2x\cdot(x+7)-x^2}{(x+7)^2}=\frac{2x^2+14x-x^2}{(x+7)^2}=\frac{x^2+14x}{(x+7)^2}$$

$$y=(x+1)\cdot e^{-4x^2+2x+1} \Rightarrow y'=e^{-4x^2+2x+1}+(x+1)(-8x+2)e^{-4x^2+2x+1}$$

$$y=(3x-sen\ x)\cdot e^{-x} \Rightarrow y'=(3-\cos x)\cdot e^{-x}+(3x-sen\ x)\cdot(-e^{-x})$$

$$y=sen\ (\ln x) \Rightarrow y'=\frac{1}{x}\cos(\ln x)=\frac{\cos(\ln x)}{x}$$

$$y=\cos^2(3x+5)=[\cos(3x+5)]^2 \Rightarrow y'=2\cdot\cos(3x+5)\cdot(-3sen(3x+5))=-6\cdot\cos(3x+5)\cdot sen(3x+5)$$

4. Recta tangente.

∗ *Gráficamente*: La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.

∗ *Fórmula*: La ecuación de la recta tangente (r_t) a la gráfica de la función f (x) en x = a es

$$\boxed{r_t:\quad y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)}$$

Ejemplo 1 Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica $\boxed{f(x)=3x^2-x+2}$ en $\boxed{x=1}$

Solución

La ecuación de la recta tangente (r_t) a la gráfica de la función f (x) en $x=1$ es

$$\boxed{r_t:\quad y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)} \qquad \left\{\begin{array}{l} f(x)=3x^2-x+2 \Rightarrow f(1)=3\cdot1^2-1+2=4 \\ f'(x)=6x-1 \Rightarrow f'(1)=6\cdot1=6 \end{array}\right.$$

$$r_t:\quad y-4=6(x-1)$$
$$r_t:\quad y-4=6x-6$$
$$r_t:\quad y=6x-6+4$$
$$r_t:\quad y=6x-2$$

Ejemplo 2 Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica $\boxed{f(x)=-x^2+2}$ en $\boxed{x=-1}$.
Dibuja aproximadamente la función y la recta tangente.

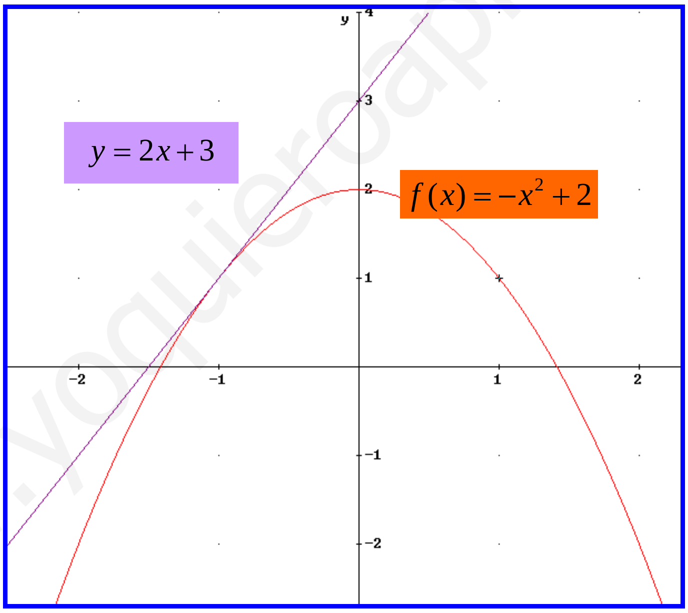
Solución

La ecuación de la recta tangente (r_t) a la gráfica de la función f (x) en $x=-1$ es

$$\boxed{r_t:\quad y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x-(-1))}\qquad \begin{cases} f(x)=-x^2+2 \Rightarrow f(-1)=-(-1)^2+2=-1+2=1 \\ f'(x)=-2x \Rightarrow f'(-1)=-2\cdot(-1)=2 \end{cases}$$

$$r_t:\quad y-1=2(x+1)$$
$$r_t:\quad y-1=2x+2$$
$$r_t:\quad y=2x+2+1$$
$$r_t:\quad y=2x+3$$

GRÁFICAMENTE



5. Derivabilidad y Continuidad.

❖ Recordemos que para que una función f(x) fuera continua en x=a debía cumplir lo siguiente:

f (x) es continua en x = a si $\begin{cases} 1) \ \underset{(\text{Existe})}{\exists} f(a) \\ 2) \ \underset{(\text{Existe})}{\exists} \lim_{x\to a} f(x) \\ 3) \ \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \end{cases}$

❖ Si una función es derivable en un punto entonces es continua en ese punto. Asimismo, que una función sea continua en un punto, no implica necesariamente que dicha función sea derivable. Por otra parte, si una función no es continua en un punto, no puede ser derivable, ya que si lo fuera, sería entonces continua. Resumiendo:

$$* f(x) \text{ es derivable en } x = a \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = a.$$
$$* f(x) \text{ no es continua en } x = a \Rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = a.$$
$$* f(x) \text{ es continua en } x = a \text{ no implica que sea derivable en } x = a.$$

❖ Derivadas laterales

Las derivadas laterales son los límites laterales en la definición de derivada.

- Derivada por la izquierda: $f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- Derivada por la derecha: $f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$f(x) \text{ es derivable en } x = a \Leftrightarrow f'(a^-) = f'(a^+)$$

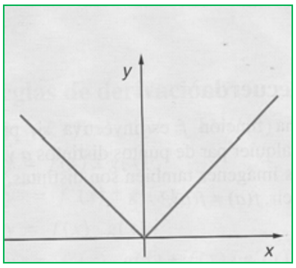
- Las derivadas laterales se pueden calcular usando su definición; sin embargo, en el caso de una función continua, este cálculo puede hacerse de una forma más sencilla:

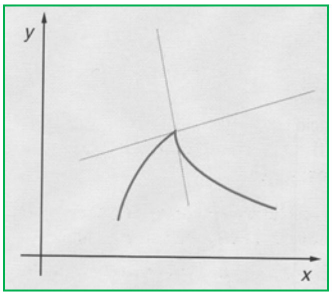
  Si f(x) es continua en x=a y f'(x) es continua por la izquierda y por la derecha de a, entonces las derivadas laterales se pueden calcular de la siguiente manera:

$$f'(a^-) = \lim_{x\to a^-} f'(x) \qquad f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

❖ Funciones derivables

Geométricamente si una función es derivable en un punto la recta tangente dibujada por la derecha e izquierda de ese punto debe coincidir, lo que ocurre siempre que la función tenga en ese punto una variación "suave". Los **puntos angulosos** son puntos en los que la función no es derivable, aun siendo continua.(ver imágenes)





- ❖ La mayoría de las funciones que hemos estudiado hasta este momento son derivables en sus respectivos dominios de definición:
  - Las funciones polinómicas
  - Las funciones trigonométricas sen(x) y cos(x), aunque no la tangente.
  - Las funciones exponenciales y logarítmicas en su dominio.

Además, la derivabilidad se conserva al hacer las operaciones de suma, producto, cociente (siempre que esté definido) y composición de funciones derivables, como ocurría en la continuidad.

Ejemplo 1. Estudiar la derivabilidad de la siguiente función en x= -1 y en x=1:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x\le 0 \\ x+1 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ x^2-2x & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

* Primero estudiamos la continuidad en x=0 y en x=1

$\boxed{x=0}$

1) $f(0)=e^0=1$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \underset{\text{(Existe)}}{\exists} \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$

$\boxed{f(x) \text{ ES CONTINUA EN } x=0}$

$\boxed{x=1}$

1) $f(1)=1^2-2\cdot 1=-1$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-2x)=1^2-2\cdot 1=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \underset{\text{(No Existe)}}{\nexists} \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ NO ES CONTINUA EN } x=1 \\ \text{DISCONTINUIDAD DE SALTO FINITO} \end{array}}$

* Derivabilidad en x=0 y en x=1

Las funciones parciales son derivables en sus dominios $f'(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x<0 \\ 1 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

*$\boxed{x=1}$ $f(x)$ *no es continua en* $x=1 \Rightarrow f(x)$ *no es derivable en* $x=1$.

*$\boxed{x=0}$ $\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=1 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+) \Rightarrow f(x)$ *es derivable en* $x=0$

Ejemplo 2. Estudiar la derivabilidad de la siguiente función en x= -1 y en x=2:

$$f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x<-1 \\ 2x^2+1 & \text{si } -1\le x<2 \\ 5x-1 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

∗ Primero estudiamos la continuidad en x=-1 y en x=2

$\boxed{x=-1}$

1) $f(-1)=2\cdot(-1)^2+1=3$

$$2)\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} 3=3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+}(2x^2+1)=2\cdot(-1)^2+1=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)\Rightarrow \underset{\text{(Existe)}}{\exists}\lim_{x\to -1} f(x)=3=f(-1)$$

$\boxed{f(x)\text{ ES CONTINUA EN } x=-1}$

$\boxed{x=2}$

1) $f(2)=5\cdot 2-1=9$

$$2)\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}(2x^2+1)=2\cdot 2^2+1=9 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}(5x-1)=5\cdot 2-1=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)\Rightarrow \underset{\text{(Existe)}}{\exists}\lim_{x\to 2} f(x)=9=f(2)$$

$\boxed{f(x)\text{ ES CONTINUA EN } x=2}$

∗ *Derivabilidad en* $x=0$ *y en* $x=1$

Las funciones parciales son derivables en sus dominios $f'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-1 \\ 4x & \text{si } -1<x<2 \\ 5 & \text{si } x>2 \end{cases}$

$$*\boxed{x=-1}\quad \left.\begin{array}{l} f'(-1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} 0=0 \\ f'(-1)=\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} 4x=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(-1^-)\ne f'(-1^+)\Rightarrow f(x)\ \textit{es}\ \text{no}\ \textit{derivable en}\ x=-1$$

$$*\boxed{x=2}\quad \left.\begin{array}{l} f'(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 4x=-8 \\ f'(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 5=5 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)\ne f'(2^+)\Rightarrow\Rightarrow f(x)\ \textit{es}\ \text{no}\ \textit{derivable en}\ x=2$$

Ejemplo 3. Calcular el valor de m y n para que la siguiente función sea derivable en todos los números reales.

$$\boxed{f(x)=\begin{cases} x^2-5x+m & \text{si} \quad x\le 1 \\ -x^2+nx & \text{si} \quad x>1 \end{cases}}$$

$*$ Se trata de una función a trozos. Las funciones parciales son continuas en sus dominios. Vamos a imponer que la función $f(x)$ sea continua en $x=1$.

$\boxed{x=1}$

1) $f(1)=1^2-5\cdot 1+m=-4+m$

2) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-5x+m)=-4+m \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(-x^2+nx)=-1^2+n\cdot 1=-1+n \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow -4+m=-1+n \Leftrightarrow \boxed{m-n=3}$$

$*$ Las funciones parciales son derivables en sus dominios $f'(x)=\begin{cases} 2x-5 & \text{si} \quad x\le 1 \\ -2x+n & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

Vamos a imponer que la función $f(x)$ sea derivable en $x=1$.

$$\boxed{x=1} \quad \left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x-5)=-3 \\ f'(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-2x+n)=-2+n \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)=f'(1^+) \Rightarrow -3=-2+n \Leftrightarrow \boxed{-1=n}$$

$$m-n=3 \underset{n=-1}{\Rightarrow} m-(-1)=3 \Leftrightarrow m+1=3 \Leftrightarrow \boxed{m=2}$$

$$\boxed{\bullet\ f(x) \text{ es derivable en todo } \mathbb{R} \text{ si } \begin{cases} m=2 \\ n=-1 \end{cases}}$$

6. Ejercicios

1. Dada $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$, halla $f'(2)$ aplicando la definición de derivada y explica su significado.

2. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$y=\dfrac{3x}{1+3x^3}$	$y=x^2\cdot e^{-x}$	$y=tg(x)\cdot senx$	$y=\ln\left(\dfrac{2x^2-3}{3-6x}\right)$
$y=\dfrac{x}{x-1}$	$y=e^{4x}\cdot(3x-1)$	$y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$	$y=sen(3x)\cdot\sqrt{x}$

3. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$

a) Averigua para que valor de x es $f'(x)=0$.

b) Averigua para que valor de x es $f'(x)=-\dfrac{3}{4}$.

4. La función f(x) está definida de la siguiente manera: $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x\le 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0<x<3 \\ -x^2+3x+2 & \text{si} \quad x\ge 3 \end{cases}$.

Estudia su continuidad y derivabilidad.

5. La función f(x) está definida de la siguiente manera: $f(x)=\begin{cases} (1-x^2)^2 & \text{si} \quad x\le 2 \\ \dfrac{36}{2+x} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$.

Estudia su continuidad y derivabilidad.

6. Sea la función f(x) definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2x-1} & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$.

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f(x) .

b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = -1

7. Calcular el valor de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} x^3-x & \text{si} \quad x<-1 \\ ax^2+bx & \text{si} \quad x\ge -1 \end{cases}$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

8. Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+6x+8 & \text{si} \quad x\le -2 \\ 2x+4 & \text{si} \quad -2<x\le 0 \\ a\cdot\cos x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

a) Calcular el valor de a para que f(x) sea continua en x=0.

b) Para el valor de a calculado en el apartado anterior estudiar la derivabilidad de f(x).

9. Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si} \quad x<0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0\le x\le 3 \\ x-5 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$, con a y $b\in\mathbb{R}$.

a) Calcular el valor de a y b para que f(x) sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Para esos valores de a y b, calcula la derivada de f(x) donde exista. Justifica los casos en los que f(x) no sea derivable.

Tabla de derivadas

Función	Derivada	Ejemplos	
Constante			
$y=k$	$y'=0$	*y=8*	*y'=0*
Identidad			
$y=x$	$y'=1$	*y=x*	*y'=1*
Funciones potenciales			
$y=x^m$	$y'=m\cdot x^{m-1}$	$y=x^6$	$y'=6x^5$
$y=u^m$	$y'=mu^{m-1}u'$	$y=(2x^2+1)^3$	$y'=3(2x^2+1)^2\cdot 4x$
$y=\sqrt{u}$	$y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y=\sqrt{5x}$	$y'=\dfrac{5}{2\sqrt{5x}}$
$y=\sqrt[m]{u}$	$y'=\dfrac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$	$y=\sqrt[5]{3x^2}$	$y'=\dfrac{6x}{5\sqrt[5]{(3x^2)^4}}$
Funciones exponenciales			
$y=e^u$	$y'=u'e^u$	$y=e^{3x^2+1}$	$y'=6xe^{3x^2+1}$
$y=a^u$	$y'=u'\cdot a^u\cdot\ln a$	$y=5^{3x-4}$	$y'=3\cdot 5^{3x-4}\cdot\ln 5$
Funciones logarítmicas			
$y=\ln u$	$y'=\dfrac{u'}{u}$	$y=\ln(x^2+7x)$	$y'=\dfrac{2x+7}{x^2+7x}$
$y=\log_a u$	$y'=\dfrac{u'}{u}\log_a e$	$y=\log_2(5x+7)$	$y'=\dfrac{5}{5x+7}\log_2 e$
Funciones trigonométricas			

$y = \operatorname{sen} u$	$y' = u' \cos u$	$y = \operatorname{sen} 5x$	$y' = 5 \cos 5x$
$y = \cos u$	$y' = -u' \operatorname{sen} u$	$y = \cos 3x^2$	$y' = -6x \operatorname{sen} x^2$
$y = \operatorname{tg} u$	$y' = u' \cdot (1 + tg^2 u)$ $y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $y' = u' \cdot \sec^2 u$	$y = \operatorname{tg} 7x$	$y' = 7 \cdot (1 + tg^2 7x)$ $y' = \frac{7}{\cos^2 7x}$ $y' = 7 \cdot \sec^2 7x$
$y = \cot g u$	$y' = -u' \cdot \cos ec^2 u$	$y = \cot g (4x + 5)$	$y' = -4 \cos ec^2 (4x + 5)$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \cdot \operatorname{tg} u$	$y = \sec x^3$	$y' = 3x^2 \sec x^3 \operatorname{tg} x^3$
$y = \cos ec u$	$y' = -u' \cos ec u \cot g u$	$y = \cos ec x^2$	$y' = -2x \cos ec x^2 \cot g x^2$
$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	$y = \arcsin x^2$	$y' = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$
$y = \arccos u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	$y = \arccos 3x$	$y' = \frac{-3}{\sqrt{1 - 9x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} u$	$y' = \frac{u'}{1 + u^2}$	$y = \operatorname{arctg} 3x$	$y' = \frac{3}{1 + 9x^2}$
Derivadas de sumas, restas, productos y cocientes de funciones			
$y = ku$	$y' = ku'$	$y = 3x^5$	$y' = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$
$y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$	$y = 3x^2 - 2x + 5$	$y' = 6x - 2$
$y = uv$	$y' = u'v + uv'$	$y = x^2 \cos x$	$y' = 2x \cos x + x^2 (-\operatorname{sen} x)$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$y = \frac{2x^2}{x^3 - 1}$	$y' = \frac{4x(x^3 - 1) - 2x^2 (3x^2)}{(x^3 - 1)^2}$

Apuntes

MATEMÁTICAS

TEMA 7

Aplicaciones de la Derivada

TEMA 7:
APLICACIONES DE LA DERIVADA

ÍNDICE

1. **Introducción**
2. **Máximos y mínimos.**
3. **Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento).**
4. **Criterio de la Segunda Derivada.**
5. **Problemas de Optimización.**
6. **Ejercicios.**

1. Introducción

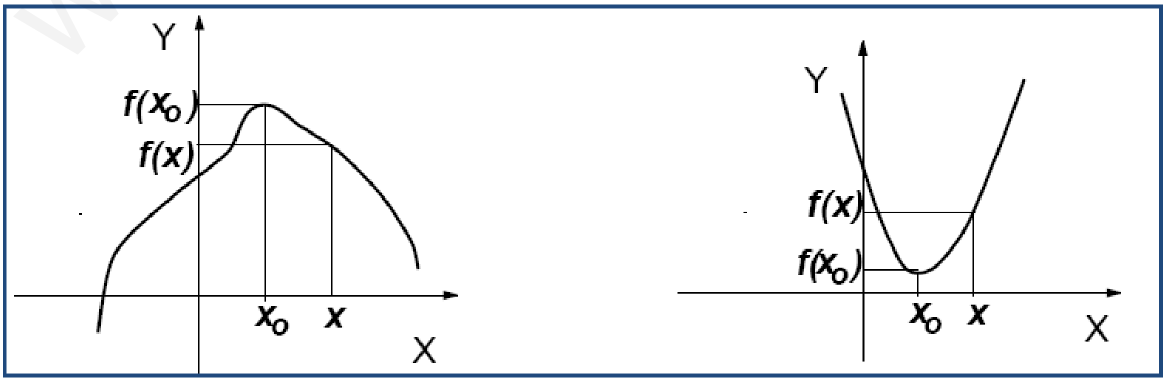
En este tema veremos varias aplicaciones de la derivada. Una de ellas es la de encontrar los máximos y mínimos de una función que es una pequeña introducción de la rama de las matemáticas, la optimización.

2. Máximos y mínimos

La idea de un mínimo relativo es donde la función alcanza el valor más bajo de todos los que se encuentran cerca, y análogamente acurre con un máximo relativo. Formalmente se expresa así:

- Una función f tiene en el punto $x=x_0$ un <u>mínimo relativo</u> si existe algún intervalo abierto I que incluya a x_0, tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x del intervalo I.
- Una función f tiene en el punto $x=x_0$ un <u>máximo relativo</u> si existe algún intervalo abierto I que incluya a x_0, tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x del intervalo I.

MÁXIMO	MÍNIMO



- Si x_0 es un máximo o mínimo relativo de una función f, y la función es derivable en ese punto, entonces $\boxed{f'(x_0)=0}$
- Los puntos donde la derivada es nula o no exista se llaman <u>puntos críticos</u>

3. Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento).

* Si $f'(x)>0$ para todos los valores de x en el intervalo (a, b) $\Rightarrow$ $f(x)$ es creciente en ese intervalo
* Si $f'(x)<0$ para todos los valores de x en el intervalo (a, b) $\Rightarrow$ $f(x)$ es decreciente en ese intervalo

<u>Criterio de la primera derivada</u> (para máximos y mínimos relativos)
Si en un punto x_0 la función pasa de creciente a decreciente en ese punto hay un máximo relativo.
Si pasa de decreciente a creciente, hay un mínimo relativo.

Para estudiar los <u>intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función</u>, en la práctica, ponemos en la recta real los puntos críticos, es decir, los valores que anulan la primera derivada y aquellos valores donde no existe la primera derivada y en cada intervalo estudiamos el signo de la primera derivada.

<u>EJEMPLOS</u>

a) $\boxed{f(x)=x^3-3x^2-9x+5}$

$f(x)=x^3-3x^2-9x+5 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x-9$

Vemos para que valores se anula la primera derivada

$f'(x)=3x^2-6x-9=0 \underset{:3}{\Rightarrow} x^2-2x-3=0$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases} x=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=\underline{3|} \\ x=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=\underline{-1|}\end{cases}$$

Ponemos en la recta real los valores que anulan la primera derivada (en este caso x = 3 y x = -1) y aquellos valores donde no existe la primera derivada (en este caso existe para todos los valores) y en cada intervalo estudiamos el signo de la primera derivada.

Signo $f'(x)=3x^2-6x-9$

$-\infty$ a -1	-1 a 3	3 a ∞
$\Uparrow$	$\Downarrow$	$\Uparrow$
$f'(-2)>0$	$f'(0)<0$	$f'(4)>0$

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Creciente} \Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty) \\ \textit{Decreciente} \Rightarrow x\in(-1,3)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\text{Un máximo relativo en x = -1} \\ \text{Un mínimo relativo en x = 3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Mx(-1,f(-1)) \quad \boxed{Mx(-1,10)} \\ \min(3,f(3)) \quad \boxed{\min(3,-22)}\end{cases}$$

b) $\boxed{f(x)=x^3-3x}$

$b)\boxed{f(x)=x^3-3x} \Rightarrow f'(x)=3x^2-3$

Vemos para que valores se anula la primera derivada

$f'(x)=3x^2-3=0 \underset{:3}{\Rightarrow} x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$

Ponemos en la recta real los valores que anulan la primera derivada (en este caso x = -1 y x = 1) y aquellos valores donde no existe la primera derivada(en este caso existe para todos los valores) y en cada intervalo estudiamos el signo de la primera derivada.

Signo $f'(x)=3x^2-3$

-∞ a -1	-1 a 1	1 a ∞
$\Uparrow$	$\Downarrow$	$\Uparrow$
$f'(-2)>0$	$f'(0)<0$	$f'(2)>0$

$\begin{cases} Creciente \Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty) \\ Decreciente \Rightarrow x\in(-1,1) \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Mx relativo en x = -1} \\ \text{Min relativo en x = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Mx(-1, f(-1)) \boxed{Mx(-1,2)} \\ \min(1, f(1)) \ \boxed{\min(1,-2)} \end{cases}$

c) $\boxed{f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}}$

$c)\, f(x)=\dfrac{x^2}{x-2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\dfrac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

Vemos para que valores se anula la primera derivada

$f'(x)=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}=0 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$

Ponemos en la recta real los valores que anulan la primera derivada (en este caso x = 0 y x = 4) y aquellos valores donde no existe la primera derivada(en este caso x = 2) y en cada intervalo estudiamos el signo de la primera derivada.

Signo $f'(x)=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

-∞ a 0	0 a 2	2 a 4	4 a ∞
$\Uparrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Uparrow$
$f'(-1)>0$	$f'(1)<0$	$f'(3)<0$	$f'(5)>0$

$\begin{cases} Creciente \Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(4,\infty) \\ Decreciente \Rightarrow x\in(0,2)\cup(2,4) \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Mx relativo en x = 0} \\ \text{Min relativo en x = 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Mx(0, f(0)) \ \boxed{Mx(0,0)} \\ \min(4, f(4)) \ \boxed{\min(4,8)} \end{cases}$

4. Criterio de la Segunda Derivada.

Veamos otro criterio para determinar los máximos y mínimos relativos de una función.

* Si $\boxed{f'(x_0)=0 \text{ y } f''(x_0)>0} \Rightarrow f$ *tiene en* x_0 *un* ***mínimo*** *relativo*
* Si $\boxed{f'(x_0)=0 \text{ y } f''(x_0)<0} \Rightarrow f$ *tiene en* x_0 *un* ***máximo*** *relativo*

Ejemplo: Determinar los máximos y mínimos relativos de la función $\boxed{f(x)=2x^3-9x^2+12x}$

- Se calculan los puntos críticos por medio de la primera derivada

$$f'(x)=6x^2-18x+12=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

- Se calcula después la segunda derivada $f''(x)=12x-18$

$$\boxed{\begin{cases} x=1 \Rightarrow f''(1)=12\cdot 1-18=-6<0 \Rightarrow \text{hay un máximo en } x=1 \\ x=2 \Rightarrow f''(2)=12\cdot 2-18=6>0 \Rightarrow \text{hay un mínimo en } x=2 \end{cases}}$$

5. Problemas de Optimización.

Optimizar una función es encontrar valores máximos y mínimos de una función. Hay situaciones en matemáticas, física, química, economía y en otras disciplinas en las que aparece una función que conviene optimizar. Para abordar estos problemas no existen unas normas fijas para resolverlos, pero sí hay unas reglas o pasos que habitualmente debes seguir:

1. Hallar la expresión algebraica de la función teniendo en cuenta los datos del problema.
2. Si la función depende de más de una variable, hay que buscar relaciones entre ellas hasta dejar la función dependiendo de una sola variable.
3. Calcular los máximos y mínimos de la función.
4. Interpretar los resultados en el contexto del problema analizando si se adaptan o no a lo pedido en el problema.

Vamos a ver algunos ejemplos en los que aplicaremos estas reglas.

EJEMPLOS

1. En una ciudad de 10.000 habitantes, el tanto por ciento de ciudadanos que ven la TV local, entre las 6 de la mañana y las 12 de la mañana está dado por la función: $S(t)=660-231t+27t^2-t^3$ $\quad (t \text{ indica la hora})$

a) ¿A qué hora tiene la TV la máxima audiencia? ¿Y mínima audiencia?

b) ¿Cuántos ciudadanos están viendo la TV local en las horas de máxima y mínima audiencia?

Solución

- t = horas
- Tanto por ciento de ciudadanos que ven la TV Local (%)

$S(t)=660-231t+27t^2-t^3 \qquad (t \text{ indica la hora}) \quad t\in[6,12]$

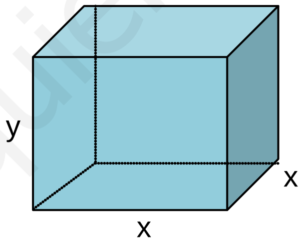
a) (Criterio segunda derivada)

$$\boxed{\begin{array}{l} S(t)=660-231t+27t^2-t^3 \\ S'(t)=-231+54t-3t^2=0 \underset{\text{Haciendo la Ecuación de 2º grado}}{\Rightarrow} \begin{cases} t=7 \\ t=11 \end{cases} \\ S''(t)=54-6t \Rightarrow \begin{cases} t=7 \Rightarrow S''(7)=54-6\cdot 7>0 \Rightarrow \text{En } t=7 \text{ hay un mínimo} \\ t=11 \Rightarrow S''(11)=54-6\cdot 11<0 \Rightarrow \text{En } t=11 \text{ hay un máximo} \end{cases} \end{array}}$$

A las 7 tendrá la mínima audiencia y a las 11 la máxima audiencia.

b) $\begin{cases} t=7 \Rightarrow S(7)=660-231\cdot 7+27\cdot 7^2-7^3=23\% \Rightarrow Ciudadanos=10000\cdot 23\%=2300 \; ciudadanos \\ t=11 \Rightarrow S(11)=660-231\cdot 11+27\cdot 11^2-11^3=55\% \Rightarrow Ciudadanos=10000\cdot 55\%=5500 \; ciudadanos \end{cases}$

2. Se quiere construir una piscina en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada. La superficie total que hay que recubrir es de 192 m². Calcula las dimensiones para que su volumen sea máximo.



Solución

La función que debemos maximizar es $\boxed{V=x^2\cdot y}$ que depende de dos variables. Se ha de encontrar una relación entre ellas, utilizando el dato del área de la piscina:

$$A=x^2+4xy=192 \Leftrightarrow 4xy=192-x^2 \Leftrightarrow \boxed{y=\frac{192-x^2}{4x}}$$

Sustituyendo en la expresión del volumen

$V=x^2\cdot y=x^{\cancel{2}}\cdot\left(\dfrac{192-x^2}{4\cancel{x}}\right)=\dfrac{x\cdot(192-x^2)}{4}=\boxed{\dfrac{192x-x^3}{4}=V(x)}$. Derivamos e igualamos a cero.

$V'(x)=\dfrac{192-3x^2}{4}=0 \Leftrightarrow 192-3x^2=0 \Leftrightarrow 192=3x^2 \Leftrightarrow 64=x^2 \Leftrightarrow x=\pm 8$. Desechamos la solución negativa porque no representa una longitud.

Debemos asegurarnos de que x=8 corresponde a un máximo. Para ello utilizamos el criterio de la segunda derivada.

$$V''(x)=\frac{-6x}{4}=-\frac{3x}{2} \qquad x=8 \Rightarrow V''(8)=-\frac{3\cdot 8}{2}=-12<0 \Rightarrow \text{hay un máximo en } x=8$$

Finalmente, calculamos la altura de la piscina sustituyendo en la fórmula del área:

$$y=\frac{192-x^2}{4x}\underset{\boxed{x=8}}{=}\frac{192-8^2}{4\cdot 8}=\frac{192-64}{32}=\frac{128}{32}=4$$

Por tanto la altura de la piscina debe de ser de 4 m. y la base cuadrada debe medir 8 m.

6. Ejercicios

1. Una compañía de autobuses interurbanos ha comprobado que el nº de viajeros (N) diarios depende del precio del billete(p) según la expresión $N(p)=300-6p$

a) Dar la expresión que nos proporciona los ingresos diarios (I) de esa compañía en función del precio del billete.

b) ¿Qué ingreso diario se obtiene si el precio del billete es 15 euros?

c) ¿Cuál es el precio del billete que hace máximo los ingresos diarios?

d) ¿Cuáles son esos ingresos?

2. (PAU Madrid, Junio 2004-05)

La función $B(x)=\frac{-x^2+9x-16}{x}$ representa, en miles de euros, el beneficio neto de un proceso de venta, siendo x el nº de artículos vendidos. Calcular el nº de artículos que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determinar dicho beneficio máximo.

3. Supongamos que el rendimiento r(t) de una alumna en un examen que dura dos horas viene dado por la relación $r(t)=75t\cdot(2-t)$ donde t , con $0\le t\le 2$, es el tiempo en horas.

a) ¿En qué momento se obtiene mayor rendimiento?

b) ¿En qué momento el rendimiento es nulo?

4. La producción (P) en kg. de cierta hortaliza en un invernadero depende de la temperatura (t) de éste en grados centígrados y viene dada por la expresión: $P(t)=(t+1)^2\cdot(32-t)$.

a) ¿Qué producción se obtiene si la temperatura es de 18ºC?

b) ¿A qué temperatura se produce la máxima producción?

c) ¿Cuál es esa máxima producción?

5. Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad R en euros viene dada por $R(x) = -0'01x^2 + 5x + 2500$, siendo x la cantidad que se invierte.

a) ¿Qué rentabilidad obtiene un inversor que invierte 1000 euros?
b) ¿Cuánto ha de invertir si quiere obtener una rentabilidad máxima?
c) Calcula esa rentabilidad máxima.

6. El beneficio de una empresa viene dado mediante la relación funcional $B(x) = -x^2 + 12x - 27$, siendo x el número de años de vida de la empresa y B el beneficio en millones de euros. Se desea estudiar el comportamiento de la empresa durante los primeros 7 años. Se pide:

a) ¿Cuáles fueron las ganancias o pérdidas de la empresa durante el primer y séptimo año?
b) ¿En qué año se obtienen los mayores beneficios y a cuánto ascienden éstos?

7. El beneficio (en miles de euros) de una empresa viene dado por la relación funcional $B(x) = 230 + 20x - \frac{1}{2}x^2$ donde x es la cantidad de dinero (en ciento de euros) gastada en publicidad. Se pregunta.

a) ¿Qué beneficio obtendría la empresa si no gastase nada en publicidad?
b) ¿Cuál es el valor de x que hace máximo el beneficio?
c) ¿Cuál es el valor de ese beneficio?

8. Se ha observado que en una carretera de salida de una gran ciudad la velocidad de los coches entre las 2h. y las 6h. de la tarde viene dada por :

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8 \qquad \text{para } t \in [2,6]$$

a) ¿A qué hora circulan los coches con mayor velocidad? Justifica la respuesta.
b) ¿A qué hora circulan los coches con menor velocidad? Justifica la respuesta.

9. Una empresa ha estimado que los ingresos y los gastos anuales (en euros) que genera la fabricación y venta de x unidades de un determinado producto vienen dados por las funciones $R(x) = 28x^2 + 36000x$ y $C(x) = 44x^2 + 12000x + 700000$, respectivamente.

Determinar la función que define el beneficio anual y el número de unidades que hay que vender para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el valor de dicho beneficio?

10. La temperatura T, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión:

$$T(t) = 40t - t^2 \quad \text{con} \quad 0 \le t \le 40$$

a) Represente gráficamente la función T y determine la temperatura máxima que alcanza la pieza.

b) ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida una hora? ¿Volverá a tener esa misma temperatura en algún otro instante?

11. Descomponer el nº 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.

12. Un pastor quiere vallar un campo rectangular de 3600m^2 de superficie. ¿Cómo le indicaríamos las dimensiones para que el coste fuera mínimo?

13. Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos materiales distintos. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser de un metro?

14. De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 15 cm, halla las dimensiones del que tiene área máxima.

15. Una hoja de papel debe contener 18cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2cm cada uno y los laterales 1cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto sea mínimo.

16. En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que, doblándolo convenientemente, haga con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido.

Calcula la cuantía del máximo premio que se puede obtener en ese concurso.

17. Queremos limitar una parcela rectangular de 24 dam^2 por medio de una valla, y dividirla en dos partes iguales mediante otra valla paralela a uno de los lados. ¿Qué dimensiones deben elegirse para que la cantidad de valla utilizada sea mínima?

18. Se dispone de una barra de hierro de 10 metros para construir una portería, de manera que la portería tenga la máxima superficie interior posible, ¿qué longitud deben de tener los postes y el larguero? ¿Cuál sería su superficie?

19. (PAU Madrid, Septiembre 2007-08) Se desea fabricar un acuario con base cuadrada y sin tapa, de capacidad 500 dm^3. La base y las paredes del acuario han de estar realizadas en cristal. ¿Cuáles deben de ser sus medidas para minimizar la superficie total del cristal empleado?

20. (PAU Madrid, JUNIO 2011-12) Una empresa vinícola tiene plantadas 1200 cepas de vid en una finca, produciendo cada cepa una media de 16 kg de uva. Existe un estudio previo que garantiza que por cada cepa que se añade a la finca, las cepas producen de media 0,01 kg menos de uva cada una. Determínese el número de cepas que se deben añadir a las existentes para que la producción de uvas de la finca sea máxima.

21. El coste de fabricación de una serie de hornos microondas viene dado por la función $C(x) = x^2 + 40x + 30000$ donde x representa el número de hornos fabricados. Supongamos que cada horno se vende por 490 euros.

a) Determínese la función de beneficios.

b) ¿Cuántos microondas deben fabricarse y venderse para que los beneficios sean máximos?¿Cuál es el importe de esos beneficios máximos?

22. Un vendedor de pólizas de seguros tiene un sueldo fijo de 1000€, más una comisión que viene dada por la función $17x - 0.0025x^3$, donde x representa el número de pólizas vendidas. Si el vendedor tiene mensualmente un gasto de 200€, más otro de 5€ por póliza contratada , calcular el número de pólizas que debe contratar mensualmente para que su ganancia sea máxima. ¿A cuánto asciende dicha ganancia?

23. (Examen modelo curso 2011-12) Una empresa de productos de limpieza fabrica cajas de cartón con tapa, para comercializar un determinado tipo de detergente. Las cajas son prismas rectos de 9000 cm3 de volumen y base rectangular de largo igual al doble de su anchura. Calcúlense las dimensiones en centímetros (largo, anchura, altura) que ha de tener cada caja para que la superficie de cartón empleada en su fabricación sea mínima.

24. Se considera un rectángulo R de lados x, y.

a) Si el perímetro de R es igual a 12 m, calcúlense x, y para que el área de R sea máxima y calcúlese el valor de dicha área máxima.

b) Si el área de R es igual a 36 m^2, calcúlense x, y para que el perímetro de R sea mínimo y calcúlese el valor de dicho perímetro mínimo.

25. (PAU JUNIO 2010) Se considera el rectángulo (R) de vértices BOAC con B(0,b), O(0,0), A(a,0), C(a,b), a > 0 y b>0 , y cuyo vértice C esta situado en la parábola de ecuación $y = -x^2 + 12$.

a) Para a=3, determínense las coordenadas de los vérices de (R) y calcúlese el área de (R)

b) Determínense las coordenadas de los vértices de (R) de manera que el área de (R).

c) Calcúlese el valor de dicha área máxima

26. (PAU SEPTIEMBRE 2009) El beneficio semanal (en miles de euros) que obtiene una central lechera por la producción de leche desnatada está determinado por la función. $\boxed{B(x) = -x^2 + 7x - 10}$ en donde la x representa los hectolitros de leche desnatada producidos en una semana.

a) Represéntese gráficamente la función B(x) con $x \geq 0$.

b) Calcúlense los hectolitros de leche desnatada que debe producir cada semana la central lechera para maximizar su beneficio. Calcúlese dicho beneficio máximo.

c) Calcúlense las cantidades mínima y máxima de hectolitros de leche desnatada que debe producir la central lechera cada semana para no incurrir en perdidas (es decir, beneficio negativo)

Apuntes

MATEMÁTICAS

TEMA 8

Representación de Funciones

TEMA 8:

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

ÍNDICE

1. Introducción
2. Monotonía (Crecimiento y decrecimiento de una función). Máximos y mínimos.
3. Concavidad y convexidad. Puntos de Inflexión.
4. Asíntotas.
5. Representación de funciones.
6. Ejercicios

1. Introducción

Dada una función f(x), el objetivo de este tema es representarla gráficamente, es decir, representar en el plano cartesiano la curva de ecuación y=f(x) que define su gráfica.

Como una curva plana es un conjunto de puntos del plano, podíamos pensar en primera aproximación que la función se representa dando valores, esto es, calculando puntos por los que pasa su gráfica. El inconveniente de este procedimiento es claro: tendríamos que obtener muchos puntos y aún así la curva obtenida no sería una representación muy fiel de la función. Por ello, vamos a estudiar algunas propiedades de las funciones como su monotonía, la curvatura, las asíntotas, puntos de corte con los ejes, etc para tener una idea más clara de la gráfica de la función.

2. Monotonía (Crecimiento y decrecimiento de una función). Máximos y mínimos.

$*$ Si $f'(x) > 0$ para todos los valores de x en el intervalo (a, b) $\Rightarrow$ $f(x)$ es creciente en ese intervalo

$*$ Si $f'(x) < 0$ para todos los valores de x en el intervalo (a, b) $\Rightarrow$ $f(x)$ es decreciente en ese intervalo

Criterio de la primera derivada (para máximos y mínimos relativos)

Si en un punto x_0 la función pasa de creciente a decreciente en ese punto hay un máximo relativo.

Si pasa de decreciente a creciente, hay un mínimo relativo.

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, en la práctica, ponemos en la recta real los valores que anulan la primera derivada y aquellos valores donde no existe la primera derivada y en cada intervalo estudiamos el signo de la primera derivada.

1. Estudia la monotonía, máximos y mínimos de las siguientes funciones.

$a)\ \boxed{f(x)=x^3-3x^2-9x+5}$

$b)\ \boxed{f(x)=x^3-3x}$

$c)\ \boxed{f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}}$

Solución

$a)\ \boxed{f(x)=x^3-3x^2-9x+5} \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x-9 \qquad \boxed{Dom(f)=\mathbb{R}}$

Vemos para que valores se anula la primera derivada

$$f'(x)=3x^2-6x-9=0 \underset{\boxed{:3}}{\Rightarrow} x^2-2x-3=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm4}{2}=\begin{cases} x=\dfrac{2+4}{2}=\dfrac{6}{2}=\underline{3|} \\ x=\dfrac{2-4}{2}=\dfrac{-2}{2}=\underline{-1|} \end{cases}$$

Ponemos en la recta real los valores que anulan la primera derivada (en este caso x = 3 y x = -1) y aquellos valores donde no existe la primera derivada (en este caso existe para todos los valores) y en cada intervalo estudiamos el signo de la primera derivada.

	$-\infty$ a -1	-1 a 3	3 a ∞
	$\Uparrow$	$\Downarrow$	$\Uparrow$
Signo $f'(x)=3x^2-6x-9$	$f'(-2)>0$	$f'(0)<0$	$f'(4)>0$

$Creciente \Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$

$Decreciente \Rightarrow x\in(-1,3)$

Hay un $\begin{cases}\text{Un máximo relativo en x = -1}\\ \text{Un mínimo relativo en x = 3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Mx(-1,f(-1))\ \boxed{Mx(-1,10)} \\ \min(3,f(3))\ \boxed{\min(3,-22)}\end{cases}$

b) $\boxed{f(x) = x^3 - 3x} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$ $\boxed{Dom(f) = \mathbb{R}}$

Vemos para que valores se anula la primera derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \underset{\boxed{:3}}{\Rightarrow} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Ponemos en la recta real los valores que anulan la primera derivada (en este caso x = -1 y x = 1) y aquellos valores donde no existe la primera derivada(en este caso existe para todos los valores) y en cada intervalo estudiamos el signo de la primera derivada.

	$-\infty$ a **-1**	**-1** a **1**	**1** a ∞
	$\Uparrow$	$\Downarrow$	$\Uparrow$
Signo $f'(x) = 3x^2 - 3$	$f'(-2) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(2) > 0$

$$\begin{cases} Creciente \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ Decreciente \Rightarrow x \in (-1, 1) \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Mx relativo en x = -1} \\ \text{Min relativo en x = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Mx(-1, f(-1)) \ \boxed{Mx(-1,2)} \\ \min(1, f(1)) \ \boxed{\min(1,-2)} \end{cases}$$

c) $\boxed{f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$ $\boxed{Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}}$

Vemos para que valores se anula la primera derivada

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Ponemos en la recta real los valores que anulan la primera derivada (en este caso x = 0 y x = 4) y aquellos valores donde no existe la primera derivada(en este caso x = 2 , porque no pertenece al dominio de la función) y en cada intervalo estudiamos el signo de la primera derivada.

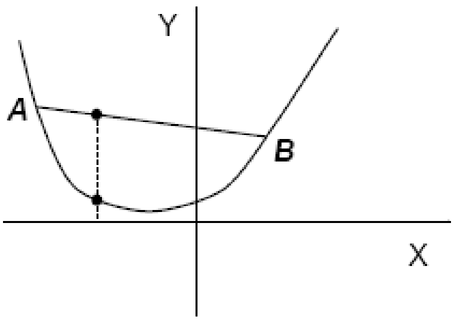
	$-\infty$ a **0**	**0** a **2**	**2** a **4**	**4** a ∞
	$\Uparrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Uparrow$
Signo $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$	$f'(-1) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) < 0$	$f'(5) > 0$

$$\begin{cases} Creciente \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty) \\ Decreciente \Rightarrow x \in (0, 2) \cup (2, 4) \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Mx relativo en x = 0} \\ \text{Min relativo en x = 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Mx(0, f(0)) \ \boxed{Mx(0,0)} \\ \min(4, f(4)) \ \boxed{\min(4,8)} \end{cases}$$

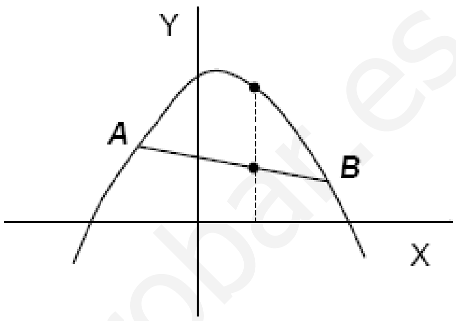
3. Concavidad y convexidad. Puntos de Inflexión.

* Si $f''(x) > 0$ para todos los valores de x en el intervalo (a, b) $\Rightarrow$ $f(x)$ es convexa en ese intervalo
* Si $f''(x) < 0$ para todos los valores de x en el intervalo (a, b) $\Rightarrow$ $f(x)$ es cóncava en ese intervalo

Función convexa

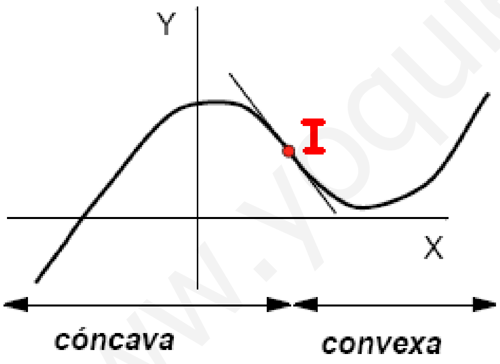


Función cóncava

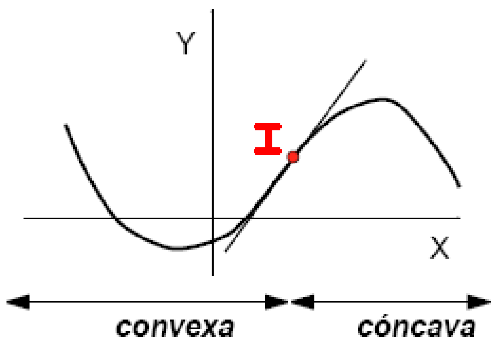


PUNTO DE INFLEXIÓN : es aquel en el que se produce un cambio de concavidad a convexidad o viceversa.

PUNTOS DE INFLEXIÓN



De cóncava a convexa



De convexa a cóncava

Para estudiar los intervalos de convexidad y concavidad de una función, en la práctica, ponemos en la recta real los valores que anulan la segunda derivada y aquellos valores donde no existe la segunda derivada, y en cada intervalo estudiamos el signo de la segunda derivada.

2. Determinar los intervalos de concavidad, convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones: $a)\ \boxed{f(x)=x^3-6x^2+12x-3}$ $\quad b)\ \boxed{f(x)=(x-2)^4-3}$ $\quad c)\ \boxed{f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}}$

$a)\ \boxed{f(x)=x^3-6x^2+12x-3} \qquad Dom(f)=\mathbb{R}$

$f(x)=x^3-6x^2+12x-3 \Rightarrow f'(x)=3x^2-12x \Rightarrow f''(x)=6x-12$

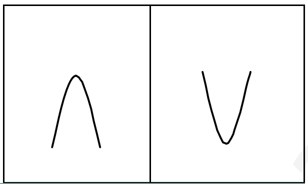
Vemos para que valores se anulan la segunda derivada

$f''(x)=6x-12=0 \Rightarrow 6x=12 \Rightarrow x=2$

Ponemos en la recta real los valores que anulan la segunda derivada (en este caso x = 2) y aquellos valores donde no existe la segunda derivada, en este caso existe para todo los valores y en cada intervalo estudiamos el signo de la segunda derivada.

$-\infty$ **2** ∞

Signo $f''(x)=6x-12$



$f''(0)<0 \quad f''(3)>0$

$$\begin{cases} Cóncava \Rightarrow x\in(-\infty,2) \\ Convexa \Rightarrow x\in(2,\infty) \end{cases}$$

Hay un punto de inflexión en $I(2,\ f(2))$ $\boxed{I(2,5)}$

$b)\ \boxed{f(x)=(x-2)^4-3} \ \Rightarrow f'(x)=4(x-2)^3 \Rightarrow f''(x)=12(x-2)^2 \quad \boxed{Dom(f)=\mathbb{R}}$

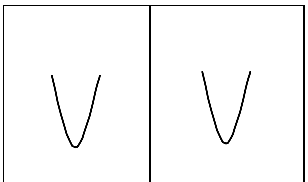
Vemos para que valores se anulan la segunda derivada

$f''(x)=12(x-2)^2=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$

Ponemos en la recta real los valores que anulan la segunda derivada (en este caso x = 2) y aquellos valores donde no existe la segunda derivada, en este caso existe para todo los valores y en cada intervalo estudiamos el signo de la segunda derivada.

$-\infty$ **2** ∞

Signo $f''(x)=12(x-2)^2$



$f''(0)>0 \quad f''(3)>0$

$Convexa \Rightarrow x\in(-\infty,2)\cup(2,\infty)$ No hay puntos de inflexión

c) $\boxed{f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}}$ $\qquad\qquad$ $\boxed{Dom(f)=\mathbb{R}-\{-3,3\}}$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-9)-x^2\cdot 2x}{(x^2-9)^2}=\frac{2x^3-18x-2x^3}{(x^2-9)^2}=\frac{-18x}{(x^2-9)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-18(x^2-9)^2-(-18)\cdot 2\cdot(x^2-9)\cdot 2x}{(x^2-9)^4}=\frac{\cancel{(x^2-9)}\cdot[-18(x^2-9)+18\cdot 2\cdot 2x]}{(x^2-9)^{\cancel{4}3}}=$$

$$=\frac{-18x^2+162+72x^2}{(x^2-9)^3}=\frac{54x^2+162}{(x^2-9)^3}$$

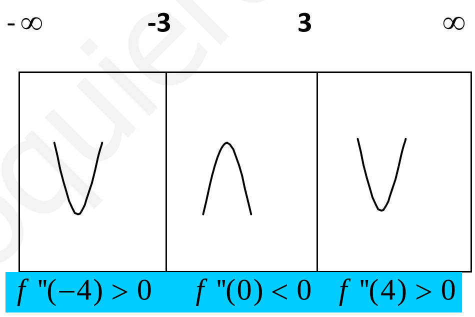
Vemos para que valores se anulan la segunda derivada

$$f''(x)=\frac{54x^2+162}{(x^2-9)^3}=0\Rightarrow 54x^2+162=0\Rightarrow 54x^2=-162\Rightarrow \cancel{x^2=\frac{-162}{54}}$$ No tiene solución

<u>No hay ningún valor de x que anule la 2ª derivada por tanto no hay puntos de inflexión</u>

Veamos los intervalos de concavidad y convexidad. Ponemos en la recta real los valores que anulan la segunda derivada (en este caso ninguno) y aquellos valores donde no existe la segunda derivada (en este caso x = -3 y x = 3) y en cada intervalo estudiamos el signo de la segunda derivada.

Signo $f''(x)=\dfrac{54x^2+162}{(x^2-9)^3}$



$$\begin{cases} Cóncava \Rightarrow x\in(-3,3) \\ Convexa \Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty) \end{cases}$$

4. Asíntotas.

Asíntotas: " son rectas que acompañan a la función en el infinito"

1) ASÍNTOTA VERTICAL (A.V.): la función f(x) tiene una asíntota vertical en la recta x = a cuando existe al menos uno de los límites laterales en x=a y vale +∞ o -∞, es decir, si

$$\left.\begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \\ o \\ \exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \end{cases}\right. \Rightarrow \text{en } \boxed{x=a} \text{ hay una A.V.}$$

NOTA: Para encontrar las A.V. se busca en los puntos donde la función f(x) no es continua.

2) ASÍNTOTA HORIZONTAL (A.H.): la función f(x) tiene una asíntota horizontal en la recta y = b cuando existe al menos uno de los siguientes límites $\begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \\ o \\ \exists \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b \end{cases} \Rightarrow \text{en } \boxed{y=b} \text{ hay una A.H.}$

NOTA: Para las funciones del tipo $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios) existe A.H. si el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador.

3) ASÍNTOTA OBLICUA (A.O.): la función f(x) tiene una asíntota oblicua en la recta $\boxed{y = mx + n}$ si existen los límites $\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ n = \lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - mx \right] \end{cases}$

NOTA: Para las funciones del tipo $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios) existe A.O. si el grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador.

Ejemplo: Calcula las asíntotas de las siguientes funciones: a) $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$ b) $f(x)=\frac{x^2}{x+3}$

Solución

$a)\ f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$ Dom f = $\mathbb{R}-\{1\}$

• ASINTOTA VERTICAL

El candidato a asintota vertical es la recta x=1, ya que en este punto la función no existe, por lo tanto, no es continua en ese punto.

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}\frac{3x+2}{x-1}\overset{\frac{5}{0^-}}{=}-\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x+2}{x-1}\overset{\frac{5}{0^+}}{=}+\infty\end{array}\right. \Rightarrow \text{en } \boxed{x=1} \text{ hay una A.V.}$$

• ASINTOTA HORIZONTAL

Existe A.H. porque el grado del numerador es ,en este caso, igual al del denominador.

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}3\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}3\end{array}\right. \Rightarrow \text{en } \boxed{y=3} \text{ hay una A.H.}$$

• ASINTOTA OBLICUA: no tiene

$b)\ f(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$ Dom f = $\mathbb{R}$-$\{$-3$\}$

• ASINTOTA VERTICAL

El candidato a asintota vertical es la recta x=-3, ya que en este punto la función no existe, por lo tanto, no es continua en ese punto.

$$\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{x^2}{x+3}\overset{\frac{9}{0^-}}{=}-\infty\\ \lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x^2}{x+3}\overset{\frac{9}{0^+}}{=}+\infty\end{cases}\right.\Rightarrow \text{en } \boxed{x=-3} \text{ hay una A.V.}$$

• ASINTOTA HORIZONTAL:no tiene

• ASINTOTA OBLICUA:

Existe A.O. porque el grado del numerador es ,en este caso,una unidad mayor que el grado del denominador. $\boxed{y=mx+n}$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x+3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+3x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x+3}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-x(x+3)}{x+3}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-3x)}{x+3}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-3x}{x+3}\right]\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\text{-3}$$

Por tanto la A.O es $\boxed{y=x\text{ - }3}$

5. Representación de funciones.

PASOS

1. Dominio de la función.
2. Puntos de corte con los ejes $\begin{cases} Eje\ x \Rightarrow y=0 \\ Eje\ y \Rightarrow x=0 \end{cases}$
3. Simetría: $\begin{cases} \text{Función Par} \Rightarrow\ si\ f(x) = f(-x) & \boxed{f(x)\ es\ simétrica\ con\ respecto\ al\ eje\ y} \\ \text{Función Impar} \Rightarrow\ si\ f(x) = -f(-x) & \boxed{f(x)\ es\ simétrica\ con\ respecto\ al\ origen} \end{cases}$
4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
5. Concavidad y Convexidad. Puntos de Inflexión.
6. Asíntotas. (Las funciones polinómicas no tienen asíntotas)
7. Representar la función: Se trata ahora de llevar a la gráfica todo lo que se ha obtenido en los puntos anteriores. Este último paso, es el mas delicado, ya que supone encajar toda la información que se ha recopilado en un dibujo y, en algunos casos, puede ser complicado, como encajar todas las piezas del rompecabezas. Aprender a representas gráficas de funciones es un proceso que lleva un cierto tiempo y requiere mucha práctica.

❖ Ejemplo: Representa las siguientes funciones :

a) $\boxed{f(x) = \dfrac{x}{x^2-5x+4}}$

- **Dominio** $x^2-5x+4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{1,4\}}$

- **Puntos de corte con los ejes**

$$\text{EJE X} \underset{\boxed{y=0}}{\Rightarrow} 0=\frac{x}{x^2-5x+4} \Rightarrow x=0 \quad (0,0)$$

$$\text{EJE Y} \underset{\boxed{x=0}}{\Rightarrow} y=\frac{0}{0^2-5\cdot0+4}=\frac{0}{4}=0 \Rightarrow y=0 \quad (0,0)$$

- **Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos**

$$f(x)=\frac{x}{x^2-5x+4}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-5x+4-x\cdot(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2}=\frac{x^2-5x+4-2x^2+5x}{(x^2-5x+4)^2}=\frac{-x^2+4}{(x^2-5x+4)^2}$$

Vemos para que valores se anula la primera derivada

$$f'(x)=\frac{-x^2+4}{(x^2-5x+4)^2}=0\Rightarrow -x^2+4=0\Rightarrow 4=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm 2\Rightarrow\begin{cases}x=2\\x=-2\end{cases}$$

Ponemos en la recta real los valores que anulan la primera derivada (en este caso x = 2 y x = -2 y aquellos valores donde no existe la primera derivada(en este caso x = 1 y x = 4) y en cada intervalo estudiamos el signo de la primera derivada.

	- ∞ a -2	-2 a 1	1 a 2	2 a 4	4 a ∞
Signo $f'(x)=\frac{-x^2+4}{(x^2-5x+4)^2}$	$\Downarrow$	$\Uparrow$	$\Uparrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
	$f'(-3)<0$	$f'(0)>0$	$f'(1'5)>0$	$f'(3)<0$	$f'(5)<0$

$$\begin{cases}Creciente\Rightarrow x\in(-2,1)\cup(1,2)\\Decreciente\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(2,4)\cup(4,\infty)\end{cases}$$

$$\text{Hay un}\begin{cases}Mx(2,f(2)) & \boxed{Mx(2,-1)}\\ \min(-2,f(-2)) & \boxed{\min(-2,-\frac{1}{9})}\end{cases}$$

- **Asíntotas**

$$f(x)=\frac{x}{x^2-5x+4}=\frac{x}{(x-1)\cdot(x-4)}\qquad \text{Dom f} = \mathbb{R}-\{1,4\}$$

- ASINTOTA VERTICAL

Los candidatos a asintota vertical son las rectas x = 1 y x = 4, ya que en este punto la función no existe, por lo tanto, no es continua en ese punto.

$$\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x}{(x-1)\cdot(x-4)}\overset{\frac{1}{0^+}}{=}+\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x}{(x-1)\cdot(x-4)}\overset{\frac{1}{0^-}}{=}-\infty\end{cases}\right\}\Rightarrow \text{en } \boxed{x=1} \text{ hay una A.V.}$$

$$\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to4^-}\frac{x}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to4^-}\frac{x}{(x-1)\cdot(x-4)}\overset{\frac{4}{0^-}}{=}-\infty\\ \lim\limits_{x\to4^+}\frac{x}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to4^+}\frac{x}{(x-1)\cdot(x-4)}\overset{\frac{4}{0^+}}{=}+\infty\end{cases}\right\}\Rightarrow \text{en } \boxed{x=4} \text{ hay una A.V.}$$

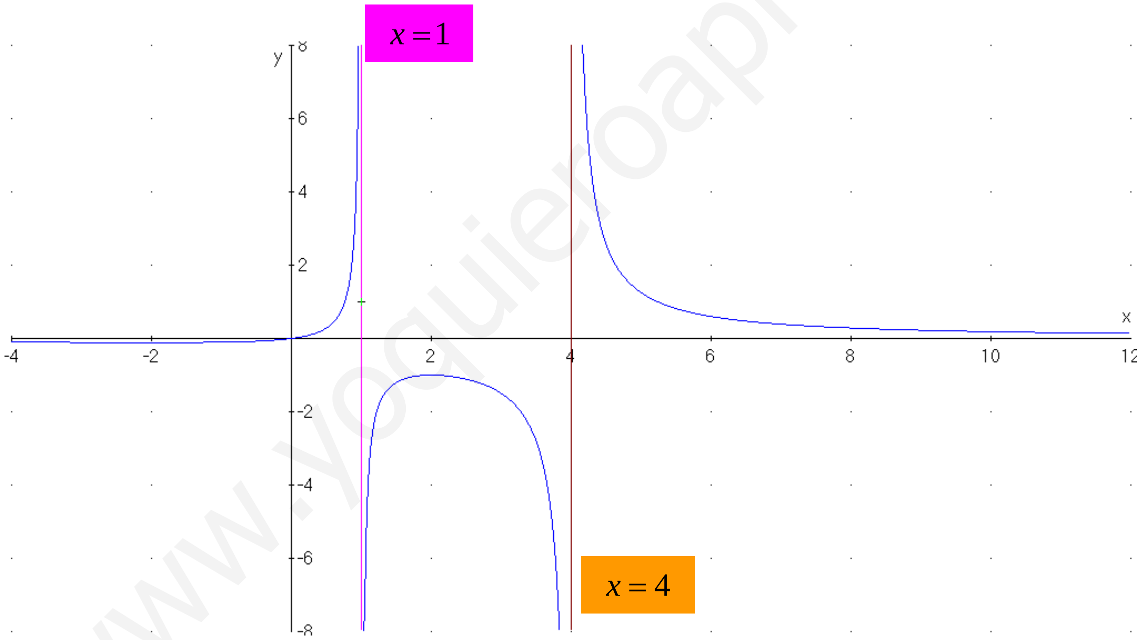
• ASINTOTA HORIZONTAL:

Existe A.H. porque el grado del numerador es ,en este caso, menor que el del denominador.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-5x+4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2-5x+4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{en } \boxed{y=0} \text{ hay una A.H.}$$

• ASINTOTA OBLICUA: no tiene

- **REPRESENTACIÓN GRÁFICA** $\boxed{f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+4}}$



b) $\boxed{f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}}$

- **Dominio** $x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1$ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{1\}}$

- **Puntos de corte con los ejes**

$$\text{EJE X} \underset{\boxed{y=0}}{\Rightarrow} 0=\frac{x^3}{x^2-2x+1} \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0 \quad (0,0)$$

$$\text{EJE Y} \underset{\boxed{x=0}}{\Rightarrow} y=\frac{0^3}{0^2-2\cdot 0+1}=\frac{0}{1}=0 \Rightarrow y=0 \quad (0,0)$$

- **Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos**

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-2x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2(x^2-2x+1)-x^3\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+1)^2}=\frac{3x^4-6x^3+3x^2-2x^4+2x^3}{(x^2-2x+1)^2}=$$

$$=\frac{x^4-4x^3+3x^2}{(x^2-5x+4)^2}=\frac{x^2\cdot(x^2-4x+3)}{(x^2-5x+4)^2}$$

Vemos para que valores se anula la primera derivada

$$f'(x)=\frac{x^2\cdot(x^2-4x+3)}{(x^2-5x+4)^2}=0 \Rightarrow x^2\cdot(x^2-4x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ x^2-4x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \end{cases}$$

Ponemos en la recta real los valores que anulan la primera derivada (en este caso x = 0 , x = 1 y x = 3 y aquellos valores donde no existe la primera derivada(en este caso x = 1) y en cada intervalo estudiamos el signo de la primera derivada.

	$-\infty$ a **0**	**0** a **1**	**1** a **3**	**3** a ∞
Signo $f'(x)=\dfrac{x^2\cdot(x^2-4x+3)}{(x^2-5x+4)^2}$	$\Uparrow$	$\Uparrow$	$\Downarrow$	$\Uparrow$
	$f'(-1)>0$	$f'(0'5)>0$	$f'(2)<0$	$f'(4)>0$

$$\begin{cases} \textit{Creciente} \Rightarrow x\in(-\infty,1)\cup(3,\infty) \\ \textit{Decreciente} \Rightarrow x\in(1,3) \end{cases}$$

Hay un $\min(3, f(3))$ $\min(3,\frac{27}{4})$ $\boxed{\min(3,6'75)}$

$*$ En x=1 no hay un máximo porque en x=1 no existe la función

Asíntotas

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-2x+1}=\frac{x^3}{(x-1)^2} \qquad \text{Dom f} = \mathbb{R}-\{1\}$$

• ASINTOTA VERTICAL

El candidato a asintota vertical es la rectas x = 1 , ya que en este punto la función no existe, por lo tanto, no es continua en ese punto.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3}{(x-1)^2}\overset{\frac{1}{0^+}}{=}+\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^3}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^3}{(x-1)^2}\overset{\frac{1}{0^+}}{=}+\infty \end{array}\right. \Rightarrow \text{en } \boxed{x=1} \text{ hay una A.V.}$$

• ASINTOTA HORIZONTAL: no tiene

• ASINTOTA OBLICUA:

Existe A.O. porque el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador. $\boxed{y=mx+n}$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-2x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-2x^2+x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}1$$

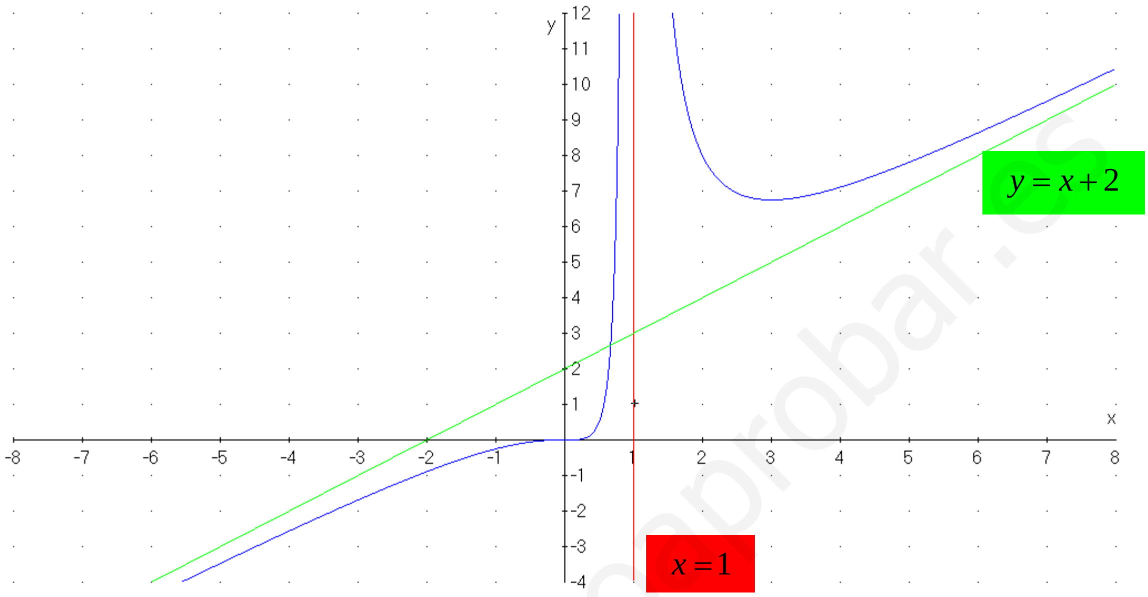
$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-2x+1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-x\cdot(x^2-2x+1)}{x^2-2x+1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+2x^2-x)}{x^2-2x+1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-x)}{x^2-2x+1}\right]\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}2$$

Por tanto la A.O es $\boxed{y=x+2}$

x	0	1
y	2	3

- **REPRESENTACIÓN GRÁFICA** $\boxed{f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}}$



c) $\boxed{f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}}$

- **Dominio** $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{-1,1\}}$

- **Puntos de corte con los ejes**

$$\text{EJE X} \underset{\boxed{y=0}}{\Rightarrow} 0=\frac{x^3}{x^2-1} \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0 \quad (0,0)$$

$$\text{EJE Y} \underset{\boxed{x=0}}{\Rightarrow} y=\frac{0^3}{0^2-1}=\frac{0}{-1}=0 \Rightarrow y=0 \quad (0,0)$$

- **Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos**

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2\cdot(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2\cdot(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

Vemos para que valores se anulan la primera derivada

$$f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=0 \Rightarrow x^4-3x^2=0 \Rightarrow x^2\cdot(x^2-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3}\approx 1'73 \\ x=-\sqrt{3}\approx -1'73 \end{cases} \end{cases}$$

Ponemos en la recta real los valores que anulan la primera derivada (en este caso x = 0 , x = $\sqrt{3}$ y x = - $\sqrt{3}$ y aquellos valores donde no existe la primera derivada(en este caso x = 1 y x = - 1) y en cada intervalo estudiamos el signo de la primera derivada.

Signo $f'(x)=\dfrac{x^2\cdot(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$	$-\infty$ a $-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$ a ∞
	$\Uparrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Uparrow$
	$f'(-2)>0$	$f'(-1'5)<0$	$f'(-0'5)<0$	$f'(0'5)<0$	$f'(1'5)<0$	$f'(3)>0$

$$\begin{cases} Creciente \Rightarrow x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty) \\ Decreciente \Rightarrow x\in(-\sqrt{3},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\text{Hay un} \begin{cases} \bullet Mx(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) \\ \boxed{Mx(-\sqrt{3},\frac{-3\sqrt{3}}{2}) \quad Mx(-\sqrt{3},-2'59...)} \\ \bullet \min(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) \\ \boxed{\min(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}) \quad \min(\sqrt{3},2'59...)} \end{cases}$$

- **Concavidad y convexidad. Puntos de Inflexión**

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(4x^3-6x)\cdot(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{\cancel{(x^2-1)}\cdot[(4x^3-6x)\cdot(x^2-1)-(x^4-3x^2)\cdot 2\cdot 2x]}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}=$$

$$=\frac{4x^5-4x^3-6x^3+6x-4x\cdot(x^4-3x^2)}{(x^2-1)^3}=\frac{\cancel{4x^5}-4x^3-6x^3+6x\cancel{-4x^5}+12x^3}{(x^2-1)^3}=$$

$$=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$$

Vemos para que valores se anulan la segunda derivada

$$f''(x)=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=0\Rightarrow 2x^3+6x=0\Rightarrow x\cdot(2x^2+6)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ 2x^2+6=0\Rightarrow 2x^2=-6\Rightarrow \cancel{x^2=-3}\end{cases}$$

NO TIENE SOLUCIÓN

Ponemos en la recta real los valores que anulan la segunda derivada (en este caso x = 0) y aquellos valores donde no existe la segunda derivada(en este caso x = 1 y x = -1) y en cada intervalo estudiamos el signo de la segunda derivada.

	$-\infty$ **-1**	**-1** **0**	**0** **1**	**1** ∞
Signo $f''(x)=\dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$	∩	∪	∩	∪
	$f''(-2)<0$	$f''(-0'5)>0$	$f''(0'5)<0$	$f''(2)>0$

$$\begin{cases}Cóncava\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)\\ Convexa\Rightarrow x\in(-1,0)\cup(1,\infty)\end{cases}$$

Hay un punto de inflexión en $I(0,\ f(0))$ $\boxed{I(0,0)}$

$*$ En x=1 y x=-1 no hay un pto de inflexión no existe la función en esos puntos.

- **Asíntotas**

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{x^3}{(x-1)\cdot(x+1)} \qquad \text{Dom f} = \mathbb{R}\text{-}\{-1,1\}$$

• ASINTOTA VERTICAL

Los candidatos a asintota vertical son las rectas x = -1 y x = 1, ya que en este punto la función no existe, por lo tanto, no es continua en ese punto.

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^3}{(x-1)\cdot(x+1)}\overset{\frac{-1}{0^+}}{=}-\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^3}{(x-1)\cdot(x+1)}\overset{\frac{-1}{0^-}}{=}+\infty \end{array}\right. \Rightarrow \text{en } \boxed{x=-1} \text{ hay una A.V.}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{(x-1)\cdot(x+1)}\overset{\frac{1}{0^-}}{=}-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{(x-1)\cdot(x+1)}\overset{\frac{1}{0^+}}{=}+\infty \end{array}\right. \Rightarrow \text{en } \boxed{x=1} \text{ hay una A.V.}$$

• ASINTOTA HORIZONTAL: no tiene

• ASINTOTA OBLICUA:

Existe A.O. porque el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador. $\boxed{y=mx+n}$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}1$$

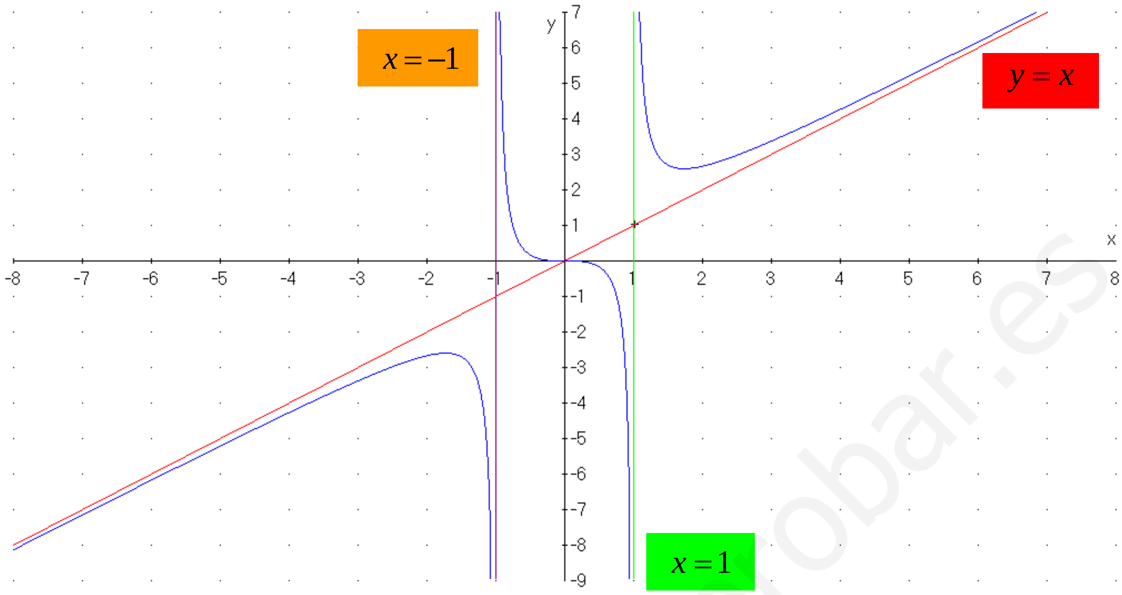
$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-x\cdot(x^2-1)}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+x)}{x^2-1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{x^2-1}\right]\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}0$$

Por tanto la A.O es $\boxed{y=x}$

x	0	1
y	0	1

- **REPRESENTACIÓN GRÁFICA** $\boxed{f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}}$



6. Ejercicios

1. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y di si tienen máximos o mínimos:

 a) $f(x)=x^4-4x^3+1$

 b) $f(x)=x^3-9x^2+24x-20$

 c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-6x+9}$

 d) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

 e) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+2x+2}$

 f) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$

 g) $f(x)=\dfrac{4+2x^2-x^3}{x^2}$

2. Estudia la concavidad y convexidad y halla los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

 a) $f(x)=x^4-6x^2$

 b) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

3. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=\dfrac{4x+2}{x^2+1}$ b) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-2}$ c) $f(x)=3x^3+14x^2+2x+5$ d) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}$

4. Representa las siguientes funciones:

   a) $f(x)=x^4-6x^2$

   b) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$

   c) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

   d) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

   e) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

5. Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$

   a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   b) Calcular las asíntotas
   c) Hallar la ecuación de la recta tangente a la grafica de f(x) en x = 0

6. Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x)=x^3-3x^2+2$ en los puntos de inflexión.

7. Sea la función $f(x)=\dfrac{-x^3+1}{2x^2+2x+12}$. Se pide.

   a) Especificar su dominio de definición.
   b) Estudiar su continuidad.
   c) Calcular las asíntotas si las hubiera.

8. Dada la función real de variable real definida por $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-4}$

   a) Calcular sus asíntotas y esbozar su grafica.
   b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la grafica de f en x = 0.

9. Para cada valor de a, se considera la función $f(x)=\dfrac{3x^2-ax}{x+2}$. Se pide:

   a) Calcular el valor de a para que f(x) tenga un mínimo relativo en x = 2.
   b) Hallar las asíntotas de la curva y = f(x) para el valor de a = 3

10. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx \quad ; \quad a,b \in \mathbb{R}$.

a) ¿Qué valores debe tomar a y b para que la f(x) tenga un máximo relativo en el punto P(1,4)?

b) Para a = -2 y b = -8 ; determínese los puntos de corte de la gráfica de f(x) con los ejes coordenados y determínese los puntos de inflexión de dicha gráfica.

11. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$, hallar el valor de a para que tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) cuando x=2. Encontrar, en este caso, todos los extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de inflexión.

12. Hallar el valor de a y b para que la curva $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tenga en el punto (0,1) un punto de inflexión y la pendiente, en ese punto, de la recta tangente valga 1.

13. Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.

b) Calcular las asíntotas

14. Consideremos la función $f(x) = 1 + \dfrac{a}{x} + \dfrac{6}{x^2} \qquad a \in \mathbb{R}$.

a) Calcula el valor del parámetro a sabiendo que f(x) tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = 3.

b) ¿Se trata de un máximo o un mínimo? Razona la respuesta

15. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{10}{a - x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

a) Calcula el valor del parámetro a para que la función f(x) sea continua en x = 3.

b) Para a=0, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Para a=4 calcular las asíntotas de la función f(x)

Apuntes

MATEMÁTICAS

TEMA 9

Integrales

TEMA 9: INTEGRALES

ÍNDICE

INTEGRALES (1ª PARTE: Integral Indefinida)

1. **Función Primitiva**
2. **Integrales Inmediatas.**

INTEGRALES (2ª PARTE: Integral Definida)

1. **Integral Definida.**
2. **Propiedades de la Integral Definida.**
3. **La Regla de Barrow**
4. **Área comprendida entre una curva y un segmento del eje X.**
5. **Cálculo del área entre dos gráficas.**

6. **Ejercicios**

INTEGRALES (1ª PARTE: Integral Indefinida)

1. FUNCIÓN PRIMITIVA

- La función $F(x)$ es una primitiva de una función $f(x)$ si $\boxed{F'(x) = f(x)}$
- Si F(x) es primitiva de una función f(x) también lo es cualesquiera de las F(x) + C.
- Al conjunto de todas las primitivas de una función f (x) se le llama **integral indefinida** de f(x) y se representa $\boxed{\int f(x)dx = F(x)+C}$.
- Propiedades

$$\boxed{\begin{array}{l} a)\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \\ b)\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx \\ c)\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx \qquad k\in\mathbb{R} \end{array}}$$

2. INTEGRALES INMEDIATAS

No hay un método general para el cálculo de integrales indefinidas de funciones elementales. Pero conocidas las derivadas de las funciones elementales y las funciones compuestas se deducen las siguientes integrales inmediatas:

(ver la última página TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS)

Ejercicio Mirando la tabla de integrales inmediatas, resuelve las siguientes integrales:

- Tipo Potencial $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

- $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$
- $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$
- $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4x^4} + C$
- $\int dx = x + C$
- $\int 5dx = 5x + C$
- $\int 5x^5 dx = 5 \cdot \frac{x^6}{6} = \frac{5x^6}{6} + C$
- $\int 2x dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} = x^2 + C$
- $\int \sqrt[5]{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} = \frac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3} + C$
- $\int (x^4 + x^3) dx = \int x^4 dx + \int x^3 dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + C$
- $\int (2x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x + 3) dx = 2 \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + \frac{7x^2}{2} + 3x + C$
- $\int 3x^2 + 4x - 5) dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x = x^3 + 2x^2 - 5x + C$
- $\int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x + C$

- Tipo Potencial $\int f'(x) \cdot f(x)^n dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

- $\int 2x(x^2+1)^3 dx = \frac{(x^2+1)^4}{4} + C$
- $\int (3x+1)^4 dx = \frac{1}{3} \cdot \int 3 \cdot (3x+1)^4 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+1)^5}{5} = \frac{(3x+1)^5}{15} + C$
- $\int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$
- $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int 2x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{(x^2-1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x^2-1} + C$
- $\int x\sqrt{x^2+3} dx = \int x(x^2+3)^{\frac{1}{2}} dx = = \frac{1}{2} \cdot \int 2x(x^2+3)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}} = \frac{\sqrt{(x^2+3)^3}}{3} + C$
- $\int e^x \cdot (e^x+1)^2 dx = \frac{(e^x+1)^3}{3} + C$
- $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^4 dx = \frac{\ln^5 x}{5} + C$
- $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \cdot (\ln x) dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$
- $\int \cos x \cdot sen^4 x dx = \int \cos x \cdot (sen\ x)^4 dx = \frac{sen^5 x}{5} + C$
- $\int \frac{x^2}{(2x^3+1)^2} dx = \int x^2 \cdot (2x^3+1)^{-2} dx = \frac{1}{6} \int 6x^2 \cdot (2x^3+1)^{-2} dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{(2x^3+1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{6(2x^3+1)} + C$
- $\int \frac{5}{(x+3)^2} dx = 5 \cdot \int (x+3)^{-2} dx = 5 \cdot \frac{(x+3)^{-1}}{-1} = -\frac{5}{x+3} + C$

- Tipo Exponencial $\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$

• $\int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + C$ • $\int e^{7x+1}dx = \frac{1}{7}\int 7\cdot e^{7x+1}dx = \frac{1}{7}e^{7x+1} = \frac{e^{7x+1}}{7} + C$ • $\int \cos x\cdot e^{senx}dx = e^{senx} + C$

• $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \int \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}dx = -\int -\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}dx = -e^{\frac{1}{x}} + C$ • $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx = \int \frac{1}{x}\cdot e^{\ln x}dx = e^{\ln x} + C$ • $\int e^x dx = e^x + C$

- Tipo Exponencial $\int f'(x)\cdot a^{f(x)}dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$

• $\int 7^{x+5}dx = \frac{7^{x+5}}{\ln 7} + C$ • $\int x\cdot 5^{3x^2+4}dx = \frac{1}{6}\int 6x\cdot 5^{3x^2+4}dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{5^{3x^2+4}}{\ln 5} = \frac{5^{3x^2+4}}{6\cdot\ln 5} + C$

- Tipo Logarítmica Neperiana $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

• $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln|x^2+1| + C$ • $\int \frac{3}{5x-7}dx = \frac{3}{5}\cdot\int \frac{5}{5x-7}dx = \frac{3}{5}\cdot\ln|5x-7| + C$ • $\int \frac{1}{x\cdot\ln x}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = \ln|\ln\ x| + C$

• $\int tgxdx = \int \frac{sen\ x}{\cos x}dx = -\int -\frac{sen\ x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + C$ • $\int \frac{x+2}{x^2+4x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cdot(x+2)}{x^2+4x}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x| + C$

• $\int \frac{sen\ x+\cos x}{\cos x - sen\ x}dx = -\int \frac{-(sen\ x+\cos x)}{\cos x - sen\ x}dx = -\ln|\cos x - sen\ x| + C$ • $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cdot e^{2x}}{e^{2x}+5}dx = \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+5| + C$

- Tipo Seno $\int f'(x)\cdot\cos f(x)dx = senf(x) + C$

• $\int e^x\cos(e^x+1)dx = sen(e^x+1) + C$ • $\int x^2\cos(3x^3+1)dx = \frac{1}{9}\int 9x^2\cos(3x^3+1)dx = \frac{1}{9}\cdot\text{sen}(3x^3+1) + C$

• $\int \cos xdx = sen\ x + C$ • $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = \int \frac{1}{x}\cdot\cos(\ln x)dx = sen(\ln x) + C$ • $\int \cos 5xdx = \frac{1}{5}\int 5\cdot\cos 5xdx = \frac{1}{5}\cdot sen\ 5x + C$

- Tipo Coseno $\int f'(x)\cdot senf(x)dx = -\cos f(x) + C$

• $\int e^{x+2}sen(e^{x+2})dx = -\cos(e^{x+2}) + C$ • $\int 5xsen(7x^2+1)dx = \frac{5}{14}\int 14x\cdot sen(7x^2+1)dx = -\frac{5}{14}\cdot\cos(7x^2+1) + C$

• $\int sen\ xdx = -\cos\ x + C$ • $\int \cos x\cdot sen(sen\ x)dx = -\cos(sen\ x) + C$

- Tipo Tangente $\int f'(x)\cdot[1+tg^2 f(x)]dx = tg\ f(x)+C$

  $\int f'(x)\cdot\sec^2\ f(x)dx = tg\ f(x)+C$

  $\int \frac{f'(x)}{\cos^2\ f(x)}dx = tg\ f(x)+C$

- $\int x\cdot[1+tg^2(2x^2)]dx = \frac{1}{4}\int 4x\cdot[1+tg^2(2x^2)]dx = \frac{1}{4}\cdot tg(2x^2)+C$
- $\int e^x\sec^2(e^x)dx = tg(e^x)+C$
- $\int \frac{3x^2+1}{\cos^2(x^3+x)}dx = tg(x^3+x)+C$

- Tipo arco tangente $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = arctg\ f(x)+C$

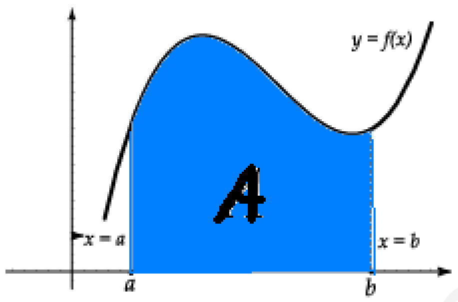
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+(x)^2}dx = arctg(x)+C$
- $\int \frac{x}{1+x^4}dx = \int \frac{x}{1+(x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\cdot arctg(x^2)+C$
- $\int \frac{e^x}{1+9e^{2x}}dx = \int \frac{e^x}{1+(3e^x)^2}dx = \frac{1}{3}\cdot\int \frac{3e^x}{1+(3e^x)^2}dx = \frac{1}{3}arctg(3e^x)+C$
- $\int \frac{x^2}{9+x^6}dx = \int \frac{\frac{x^2}{9}}{1+\frac{x^6}{9}}dx = \frac{1}{9}\cdot\int \frac{x^2}{1+(\frac{x^3}{3})^2}dx = \frac{1}{9}\cdot arctg(\frac{x^3}{3})+C$
- $\int \frac{3}{4+9x^2}dx = 3\cdot\int \frac{1}{4+9x^2}dx = 3\cdot\int \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{9x^2}{4}}dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{1+(\frac{3x}{2})^2}dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\int \frac{\frac{3}{2}}{1+(\frac{3x}{2})^2}dx = \frac{1}{2}\cdot arctg(\frac{3x}{2})+C$

INTEGRALES (2ª PARTE: Integral Definida)

La integración aparece en matemáticas no sólo como operación inversa de la derivación sino también en otros problemas, en particular en el que nos afecta al cálculo de áreas de figuras planas.

1. INTEGRAL DEFINIDA

Sea función f(x) continua y positiva en un el intervalo [a, b]. El área limitada por la función f(x), el Eje OX y las rectas x=a y x=b se denomina integral definida entre a y b de f(x) y se representa por $\int_a^b f(x)dx$.



$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx}$$

2. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

a) Se c $\in$ [a ,b] $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$

b) $\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$

c) $\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$

d) $\boxed{\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx}$

e) $\boxed{\int_a^b (k.f)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx}$ con k un número real

3. REGLA DE BARROW

$$\left.\begin{array}{l}\text{f continua en } [a,b] \\ \text{F primitiva de f}\end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \equiv \text{(notación) } \left[\text{F(x)}\right]_a^b$$

Ejemplos

$$\bullet \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\bullet \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{1}{3} - \frac{(-1)}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\bullet \int_1^3 (3x^2 - 2x + 5)dx = \left[3\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 5x\right]_1^3 = \left[x^3 - x^2 + 5x\right]_1^3 = 3^3 - 3^2 + 5\cdot 3 - (1^3 - 1^2 + 5\cdot 1) =$$

$$= 27 - 9 + 15 - (1 - 1 + 5) = 27 - 9 + 15 - 5 = 28$$

$$\bullet \int_0^4 (-x + 2x^4)dx = \left[-\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{x^5}{5}\right]_0^4 = -\frac{4^2}{2} - 2\cdot\frac{4^5}{5} - \left(-\frac{0^2}{2} - 2\cdot\frac{0^5}{5}\right) = -\frac{16}{2} - 2\frac{1024}{5} - (0) =$$

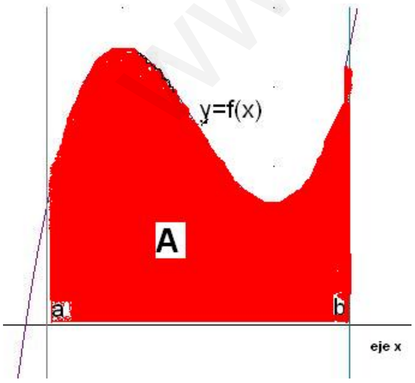
$$= -8 - \frac{2048}{5} = \frac{-40 - 2048}{5} = \frac{-2088}{5}$$

$$\bullet \int_0^3 e^x dx = \left[e^x\right]_0^3 = e^3 - e^0 = e^3 - 1$$

4. ÁREA COMPRENDIDA ENTRE UNA CURVA Y UN SEGMENTO DEL EJE OX

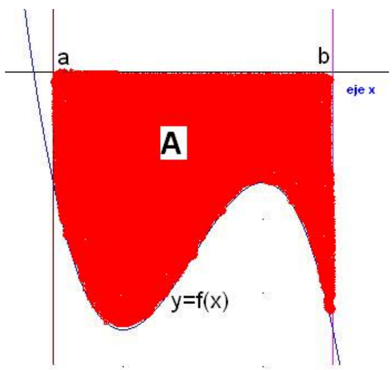
Supondremos que f(x) es continua en [a, b]

a) $\boxed{Si \;\; f(x) \geq 0 \;\text{ en }\; [a,b]}$



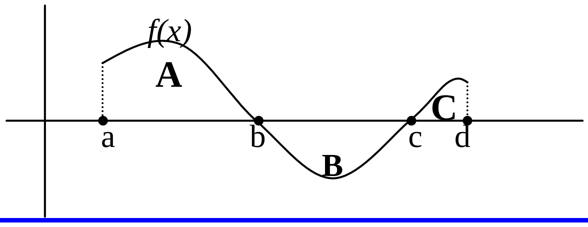
$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx}$$

b) $\boxed{Si \;\; f(x) \leq 0 \;\text{ en }\; [a,b]}$



$$\boxed{A = -\int_a^b f(x)dx}$$

c) $\boxed{Si\ \ f(x)\ \text{ cambia de signo en } [a,b]}$: Ejemplo

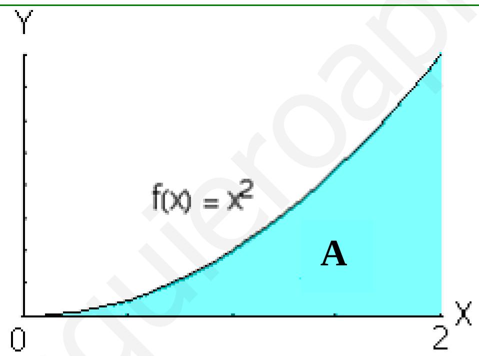


$$\boxed{Área = A + B + C = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx}$$

Ejercicio 1: Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f(x)=x^2 , el eje X y las rectas x=0 y x=2 .

Solución

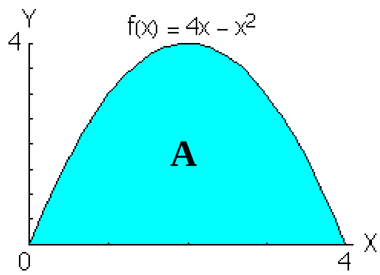
$$A = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}\ \mathrm{u}^2$$



Ejercicio 2: Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f(x)=4x-x^2 y el eje X.

Solución Calculamos los puntos de corte de la función f(x) con el eje x.

$f(x) = 4x - x^2 = 0 \Rightarrow x(4-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 4 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x=4} \end{cases}$. f(x) es una parábola. Dando algún valor entre 0 y 4 vemos que la gráfica de la función es:



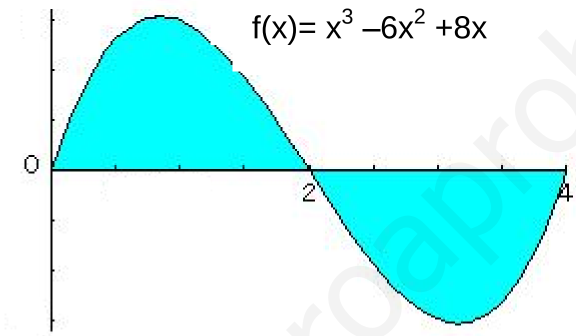
$$A = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left[4\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 2\cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = 32 - \frac{64}{3} = \frac{96-64}{3} = \frac{32}{3}\ \mathrm{u}^2$$

Ejercicio 3: Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f(x)= $x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje X.

Solución Calculamos los puntos de corte de la función f(x) con el eje x.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2} \\ \boxed{x = 4} \end{cases} \end{cases}$$

Dando algún valor entre 0 y 2 vemos que la gráfica es positiva y dando valores entre 2 y 4 la función es negativa



$$A = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx =$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - 6\cdot\frac{x^3}{3} + 8\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 6\cdot\frac{x^3}{3} + 8\cdot\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4 =$$
$$= \frac{2^4}{4} - 2\cdot 2^3 + 4\cdot 2^2 - \left(\frac{0^4}{4} - 2\cdot 0^3 + 4\cdot 0^2\right) - \left[\frac{4^4}{4} - 2\cdot 4^3 + 4\cdot 4^2 - \left(\frac{2^4}{4} - 2\cdot 2^3 + 4\cdot 2^2\right)\right] =$$
$$= 4 - 16 + 16 - 0 - [64 - 128 + 64 - (4 - 16 + 16)] = 8 \text{ u}^2$$

Ejercicio 4: Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = x\cdot e^{x^2}$, el eje X y la rectas x=0 y x=2

Solución : Como la función es positiva en el intervalo [0,2] el área pedida viene dada por la por el valor de la integral siguiente:

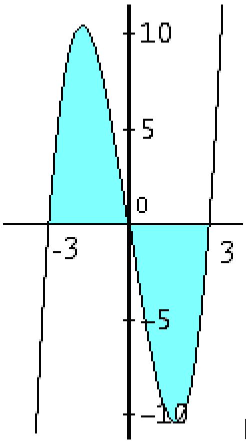
$$A = \int_0^2 x\cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^2 2x\cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{x^2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot(e^4 - e^0) = \frac{1}{2}\cdot(e^4 - 1) \text{ u}^2$$

Ejercicio 5: Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)= x^3 - 9x$ y el eje X.

Solución Calculamos los puntos de corte de la función f(x) con el eje x.

$$f(x) = x^3 - 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \begin{cases} \boxed{x=3} \\ \boxed{x=-3} \end{cases} \end{cases}$$

Dando algún valor entre -3 y 0 vemos que la gráfica es positiva y dando valores entre 0 y 3 la función es negativa.



$f(x) = x^3 - 9x$

Por tanto el área pedida es la siguiente:

$$A = \int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)dx - \int_{0}^{3} (x^3 - 9x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{0}^{3} = ...$$

•Si nos damos cuenta de la simetría impar de la función el área se puede calcular también de la siguiente forma

$$A = 2\int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)dx = 2\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^{0} = 2\cdot\left[\frac{0^4}{4} - \frac{9\cdot 0^2}{2} - \left(\frac{(-3)^4}{4} - \frac{9(-3)^2}{2}\right)\right] = 2\cdot\left[0 - \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\cdot\left[-\frac{81}{4} + \frac{81}{2}\right] = 2\cdot\left[\frac{-81+162}{4}\right] = 2\cdot\frac{81}{4} = \frac{81}{2} \ \mathrm{u}^2$$

Ejercicio 6: Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. Hallar

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos.

b) El área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x) y el eje X y las rectas x=-1 y x=1

Solución

$$a)\ f(x)=\frac{x}{x^2+1}\qquad \text{Dom}=\mathbb{R}$$

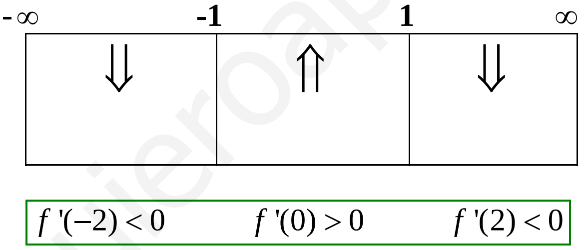
$$f'(x)=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

Vemos para que valores se anula la primera derivada

$$f'(x)=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow -x^2+1=0\Rightarrow 1=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

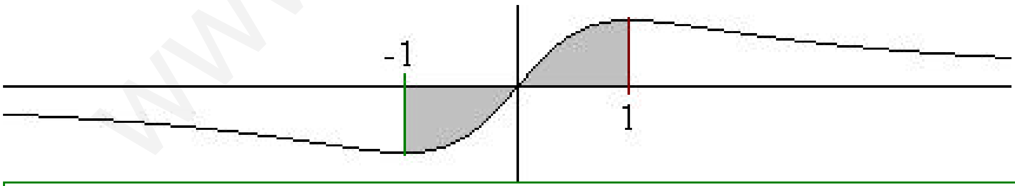
Ponemos en la recta real los valores que anulan la primera derivada (en este caso x = -1 y x = 1) y aquellos valores donde no existe la primera derivada(en este caso existe para todos los valores) y en cada intervalo estudiamos el signo de la primera derivada.

Signo $f'(x)=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$



$$\begin{cases}Creciente\Rightarrow x\in(-1,1)\\ Decreciente\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)\end{cases}\quad\begin{cases}\text{Mx relativo en x = 1}\\ \text{Min relativo en x =-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Mx(1,f(1))\ \boxed{Mx(1,0'5)}\\ \min(-1,f(-1))\ \boxed{\min(-1,0'5)}\end{cases}$$

b) Aunque no es necesario, es bueno hacerse un esbozo de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$



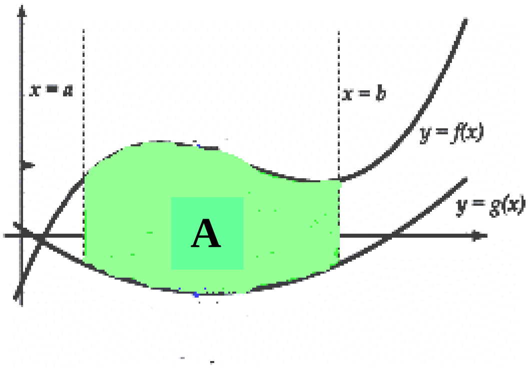
$$A=-\int_{-1}^{0}\frac{x}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=....$$

•Si nos damos cuenta de la simetría impar de la función el área se puede calcular también de la siguiente forma

$$A=2\cdot\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2-0=\ln 2\ \ \text{u}^2$$

5. CÁLCULO DE ÁREAS ENTRE DOS GRÁFICAS

Si f(x) y g(x) son continuas en [a,b] y f(x) $\geq$ g(x) en [a,b] .El área limitada por f(x) y g(x) y las rectas x=a y x=b es $A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$



$$\boxed{A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx}$$

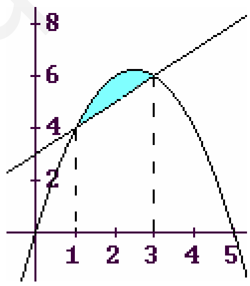
Ejercicio 7: Hallar el área del recinto limitado por las funciones f(x)= -x^2 +5x y g(x)=x+3.

Solución

La función f(x) es una parábola y g(x) es una recta. Calculamos los puntos de corte de la función f(x) con la función g(x). Los puntos de corte son las soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow -x^2 + 5x = x + 3 \Rightarrow 0 = x + 3 + x^2 - 5x \Rightarrow 0 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Gráficamente



$$A = \int_1^3 (-x^2 + 5x) - (x+3)dx = \int_1^3 (-x^2 + 5x - x - 3)dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 3x \right]_1^3 =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + 2\cdot 3^2 - 3\cdot 3 - \left(-\frac{1^3}{3} + 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 \right) \right] = \left[-9 + 18 - 9 - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) \right] =$$

$$= -9 + 18 - 9 + \frac{1}{3} - 2 + 3 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3} \text{ u}^2$$

Pablo Gª-Pulgar Perezagua
Departamento Matemáticas
I.E.S. GABRIEL CISNEROS

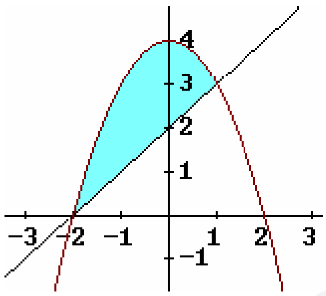
Ejercicio 8: Hallar el área del recinto limitado por las funciones f(x)= 4 -x^2 y g(x)=x+2.

Solución

La función f(x) es una parábola y g(x) es una recta. Calculamos los puntos de corte de la función f(x) con la función g(x). Los puntos de corte son las soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = x + 2 \Rightarrow 0 = x + 2 + x^2 - 4 \Rightarrow 0 = x^2 + x - 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Gráficamente



$$A = \int_{-2}^{1} (4 - x^2) - (x + 2)dx = \int_{-2}^{1} (4 - x^2 - x - 2)dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left[-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2{\cdot}1 - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2{\cdot}(-2) \right) \right] = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(+\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 =$$

$$= \frac{-2 - 3 + 12 - 16 + 12 + 24}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \text{ u}^2$$

Ejercicio 9: Hallar el área del recinto limitado por las funciones f(x)= 6x -x^2 y g(x)= x^2-2x.

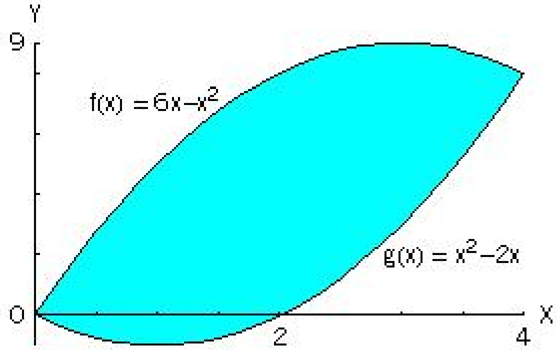
Solución

La función f(x) es una parábola y g(x) es otra parábola. Calculamos los puntos de corte entre las funciones f(x) y g(x). Los puntos de corte son las soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 0 = x^2 - 2x + x^2 - 6x \Rightarrow 0 = 2x^2 - 8x = 2x(x - 4) \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 4} \end{cases}$$

Gráficamente

$\Downarrow$



$$A=\int_0^4 (6x-x^2)-(x^2-2x)dx=\int_0^4(6x-x^2-x^2+2x)dx=\int_0^4(-2x^2+8x)dx=\left[-\frac{2x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}\right]_0^4=\left[-\frac{2x^3}{3}+4x^2\right]_0^4=$$

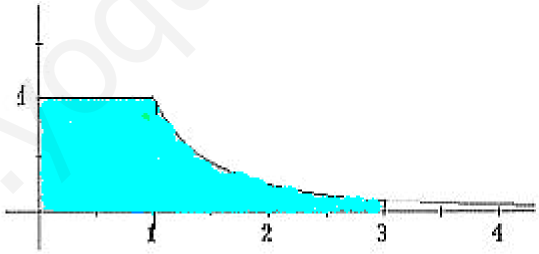
$$=-\frac{2\cdot 4^3}{3}+4\cdot 4^2-\left(-\frac{2\cdot 0^3}{3}-4\cdot 0^2\right)=-\frac{128}{3}+64-0=\frac{-128+192}{3}=\frac{64}{3}\ \text{u}^2$$

Ejercicio 10: Sea la función $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad 0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$

Hallar $\int_0^3 f(x)dx$ e interpretar geométricamente el resultado.

Solución

Gráficamente



$$\int_0^3 f(x)=\int_0^1 1dx+\int_1^3\frac{1}{x^2}dx=\int_0^1 1dx+\int_1^3 x^{-2}dx=[x]_0^1+\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^3=[x]_0^1+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3=1-0+\left[-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{1}\right)\right]=$$

$$=1-\frac{1}{3}+1=2-\frac{1}{3}=\frac{6-1}{3}=\frac{5}{3}$$

El número $\frac{5}{3}$ indica el área de la región sombreada de azul de la figura

Ejercicio 11 Sea la función $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

Calcular el valor de a>0 para el cual se verifica la igualdad $\int_0^a f(x)dx=1$.

Solución

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a \frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^a \frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^a=\frac{1}{2}[\ln(1+a^2)-\ln(1)]\underset{\boxed{\ln 1=0}}{=}\frac{1}{2}\ln(1+a^2)$$

$$Si\ \int_0^a f(x)dx=1\Rightarrow\frac{1}{2}\ln(1+a^2)=1\Rightarrow\ln(1+a^2)=2\Rightarrow 1+a^2=e^2\Rightarrow a^2=e^2-1\underset{a>0}{\Rightarrow}a=\sqrt{e^2-1}$$

Ejercicio 12 Calcular el polinomio de tercer grado $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ sabiendo que verifica:

a) tiene un máximo relativo en x=1

b) tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas (0,1)

c) se verifica $\int_0^1 p(x)dx=\dfrac{5}{4}$

Solución

$$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow p'(x)=3ax^2+2bx+c\Rightarrow p''(x)=6ax+2b$$

- Por tener un máximo en x = 1, **p'(1)=0** $\Rightarrow 0=3a+2b+c$
- Por pasar por el punto (0,1), **p(0)=1** $\Rightarrow \boxed{1=d}$
- Por tener un punto de Inflexión en (0,1), **p''(0)=0** $\Rightarrow 0=2b\Rightarrow\boxed{b=0}$

Tenemos de momento lo siguiente $\begin{cases} d=1 \\ b=0 \\ 0=3a+2b+c=3a+c\Rightarrow c=-3a \end{cases}$.

Por tanto $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow p(x)=ax^3-3ax+1$

- Como $\int_0^1 p(x)dx=\dfrac{5}{4}\Rightarrow\int_0^1(ax^3-3ax+1)dx=\dfrac{5}{4}\Rightarrow\left[\dfrac{ax^4}{4}-\dfrac{3ax^2}{2}+x\right]_0^1=\dfrac{5}{4}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{a}{4}-\frac{3a}{2}+1=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{a-6a+4}{4}=\frac{5}{4}\Rightarrow a-6a+4=5\Rightarrow-5a=1\Rightarrow\boxed{a=-\frac{1}{5}}\underset{c=-3a}{\Rightarrow}\boxed{c=\frac{3}{5}}$$

El polinomio p(x) que cumple todas las condiciones del ejercicio es:

$$\boxed{p(x)=-\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{5}x+1}$$

6. Ejercicios

1. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f(x)=x^2 –9, el eje X y las rectas x=3 y x=6 (Solución A=36 u^2)

2. Calcula el área de la región limitada la función f(x)=x^3-6x, el eje x y las rectas x=-1 y x=1. (Solución A=$\frac{11}{2}$ u^2)

3. Representar el recinto de la región del plano limitada por la función $f(x)=-x^2+x+2$ y el eje OX. Calcular dicha área. (Solución A=$\frac{9}{2}$ u^2)

4. Calcula el área comprendida entre el eje X y, las rectas x=0, x=2 y $f(x)=x^3-2x^2+x$. (Solución A=$\frac{2}{3}$ u^2).

5. Calcular el área de la región del plano limitada por la función $f(x)=x^2-4x$ y el eje OX. (Solución A=$\frac{32}{3}$ u^2).

6. Sea la función $f(x)=2x^3-3x^2+x$. Calcula el área del recinto limitado por dicha función y la función y=0. (Solución A=$\frac{1}{16}$ u^2).

7. Sea la función $f(x)=-(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-4)$. Halla el área del recinto limitado por la curva y el eje de las abscisas. (Solución A=60 u^2).

8. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$ y el eje OX. (Solución A=$\frac{4}{3}$ u^2).

9. Sea $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Determínese a, b y c de modo que f(x) tenga un extremo relativo en x=0, la recta tangente a la gráfica de f(x) en x=1 sea paralela a la recta $y-4x=0$ y el área comprendida por la gráfica de f(x), el eje OX y las rectas x=0 y x=1 sea igual a 1. (Solución a=1/2, b=0 y c=7/12).

10. Hallar k para que el área limitada por la curva $f(x)=(x-1)^2+k$, el eje OX y las rectas x=0 y x=2 sea igual a $\frac{10}{3}$. (Solución k=4/3).

11. Hallar el área de la figura limitada por la curva $f(x)=2x-x^2$ y la recta $g(x)=-x$

(Solución A= $\frac{27}{6}$ u^2).

12. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y=x^2-5$ y la recta $y=2x+3$

(Solución A= 36 u^2).

13. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y=x^2-4x$ y la recta $y=2x-5$

(Solución A= $\frac{32}{3}$ u^2).

14. Hallar el área de la figura limitada por la curva $f(x)=x^2-3x-10$ y la recta $g(x)=x$

(Solución A= $\frac{125}{6}$ u^2).

15. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y=x\cdot(6-x)$ y la recta $y=2x-5$

(Solución A= $\frac{32}{3}$ u^2).

16. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y=2x^2+5x-3$ y la recta $y=3x+1$

(Solución A= 9 u^2).

17. Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones siguientes $f(x)=-x^2+2x+4$ y $g(x)=2x$. (Solución A= $\frac{32}{3}$ u^2)

18. Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones siguientes $y=x^2+4x+4$ y $y=4$. (Solución A= $\frac{32}{3}$ u^2)

19. Dada la parábola $y=\frac{x^2}{4}$ y la recta $y=x$ Hallar el área del recinto limitado por dichas gráficas. (Solución A= $\frac{8}{3}$ u^2)

20. Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones siguientes: f(x)= x^2 +2x+1 y g(x)= 3x+3 (Solución A= $\frac{9}{2}$ u^2)

21. (PAU SEPTIEMBRE 2005-06) Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=9-x^2$ y $g(x)=3+x$ y obtener su área.

(Solución A= $\frac{125}{6}$ u^2)

22. Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones siguientes: f(x)= 6-x^2 y g(x)= x^2+4x. (Solución A=$\frac{64}{3}$ u^2)

23. (PAU JUNIO 2007-08) Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las funciones reales de variable real: $f(x)=x^2-x$ y $g(x)=1-x^2$.

(Solución A=$\frac{9}{8}$ u^2)

24. Hallar el área comprendida entre las parábolas $f(x)=x^2-2x+3$ y $g(x)=2x^2-4x+3$

(Solución A=$\frac{4}{3}$ u^2)

25. Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones siguientes f(x)= x^3 y g(x)= x^2 (Solución A=$\frac{1}{12}$ u^2)

26. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y=x^2$ y las rectas $y=x,\ \ x=0\ \ y\ \ x=2$. (Solución A=1 u^2)

27. Hallar el área de la figura limitada por la curva $y=x^2$ y las rectas $y=x$ e $y=2x$.

(Solución A=$\frac{7}{6}$ u^2)

28. Hallar el área de la figura limitada por las funciones $f(x)=5x^3-4x$ y $g(x)=x$

(Solución A=$\frac{5}{2}$ u^2).

29. Hallar el área de la figura limitada por las funciones $f(x)=x^4-4x^3$ y $g(x)=x^2-4x^3$

(Solución A=$\frac{4}{15}$ u^2).

30. Calcular el área limitada por las gráficas $y=2x-x^2,\ \ y=e^x,\ \ x=0\ \ y\ \ x=2$.

(Solución A=$e^2-\frac{7}{3}$ u^2)

31. Calcular el área limitada por las gráficas $y=2-x^2$ e $y=|x|$. (Solución A=$\frac{7}{3}$ u^2)

32. Sea $f(x)=\begin{cases} -x^2+5x-4 & \text{si } x\le 3 \\ x+k & \text{si } x>3 \end{cases}$.

a) Calcular el valor de k para que la función sea continua en x=3. (Solución k=-1).

b) Representa gráficamente f(x) para el valor de k hallado en el apartado anterior.

c) Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f(x) y las rectas x=1 y x=2. (Solución A=$\frac{7}{6}$ u^2)

33. Sea $f(x)=\begin{cases} -x^2+kx & \text{si } 0\le x\le 2 \\ x^2-6x+10 & \text{si } x>2 \end{cases}$.

a) Calcular el valor de k para que la función sea continua en x=2. (Solución k=3)

b) Representa gráficamente f(x) para el valor de k hallado en el apartado anterior.

c) Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f(x) y la recta x=4. (Solución A=6 u^2)

34. Sea $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x+7}{3} & \text{si } -5\le x\le -2 \\ -x^2+k & \text{si } -2\le x\le 2 \end{cases}$.

a) Calcular el valor de k para que la función sea continua en x=-2. (Solución k=7)

b) Representa gráficamente f(x) para el valor de k hallado en el apartado anterior.

c) Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, el eje OY, la gráfica de f(x) y la recta x=-5. (Solución A=$\frac{131}{6}$ u^2)

35. Sea $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & \text{si } x\le 0 \\ -1+2x & \text{si } 0\le x\le 1 \\ -x^2+2x & \text{si } x>1 \end{cases}$.

a) Representa gráficamente f(x) .

b) Estudiar la continuidad de f(x). (Solución $f(x)$ es continua $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$)

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f(x) y las rectas x=1/2 y x=3/2.

(Solución A=$\frac{17}{24}$ u^2)

36. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\le -1 \\ -x^2+2x+3 & \text{si } -1<x\le 3 \\ -1 & \text{si } x>3 \end{cases}$.

a) Representa gráficamente f(x) .

b) Estudiar la continuidad de f(x). (Solución $f(x)$ es continua $\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}$)

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f(x) ,el eje de ordenadas, la parte positiva del eje de abscisas y la recta x=2 (Solución A=$\frac{22}{3}$ u^2)

37. Sea $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x<-2 \\ x^2-x-2 & \text{si } -2\le x\le 2 \\ -x+2 & \text{si } x>2 \end{cases}$.

a) Representa gráficamente f(x) .

b) Estudiar la continuidad de f(x). (Solución $f(x)$ es continua $\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\}$)

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f(x) y el eje de las abscisas.

(Solución A=$\frac{9}{2}$ u^2).

38. Determina un polinomio p(x) de segundo grado sabiendo que

a) p(0)=1 b) p(2)=1 c) $\int_0^2 p(x)dx=\frac{1}{3}$

(Solución $p(x)=ax^2+bx+c=\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{2}x+1$)

39. (<u>PAU JUNIO 2005-06</u>)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=x^3-9x$. Se pide:

a) Calcula sus máximos y mínimos si existen. (Solución $\boxed{Mx(-\sqrt{3},6\sqrt{3})}$ $\boxed{\min(\sqrt{3},-6\sqrt{3})}$)

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función f(x) y el OX.

(Solución A=$\frac{81}{2}$ u^2).

40. (PAU JUNIO 2005-06)

Se considera la curva de ecuación cartesiana $y = x^2 + 8x$. Se pide:

a) Calcular las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta $y = 2x$. (Solución P(-3,-15)).

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva dada y de la recta de ecuación cartesiana $y = x + 8$. (Solución A=$\frac{243}{2}$ u^2).

41. (PAU JUNIO 2006-07)

Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones:

$f(x) = \frac{5}{4}x^2, \quad g(x) = \frac{1}{2}(5x + 20) \quad$ y $\quad \mathrm{h}(x) = \frac{1}{2}(-5x + 20)$ y obtener su área.

(Solución A=$\frac{70}{3}$ u^2).

42. (PAU SEPTIEMBRE 2006-07)

La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ satisface las siguientes propiedades:

- Pasa por el punto (0,0)
- Tiene un máximo local en el punto (1,2)

Se pide:

a) Obtener el valor de los coeficientes a, b y c. (Solución a=-4, b=6 y c=0).

b) Hallar el área de la región acotada del plano limitada por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 3x$, el eje OX .

43. (PAU JUNIO 2007-08)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x}$

a) Determínese las asíntotas de f(x). (Solución AV x=0 AO y=x+1).

b) Calcúlense los máximos y mínimos relativos y determínense sus intervalos de crecimiento.

Solución

$$Decreciente \Rightarrow x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}) \quad Creciente \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2},) \cup (\sqrt{2}, \infty)$$

$$\boxed{\min(\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})} \quad \boxed{Mx(-\sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2})}$$

c) Calcúlese la integral definida $\int_1^2 f(x)dx$ (Solución $\boxed{\frac{5}{2} + 2\ln 2}$).

44. (PAU SEPTIEMBRE 2007-08)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-4}$, $x\neq\pm 2$

a) Determínese las asíntotas de f(x). (Solución AV x=-2 x=2 AH y=1).

b) Calcúlense los máximos y mínimos relativos y determínense sus intervalos de crecimiento.

Solución

$$Decreciente \Rightarrow x\in(0,2)\cup(2,\infty) \quad Creciente \Rightarrow x\in(-\infty,-2,)\cup(-2,0) \quad \boxed{Mx(0,-\frac{1}{2})}$$

c) Calcúlese la integral definida $\int_3^5 (x^2-4)f(x)dx=$ (Solución $\boxed{\frac{110}{3}}$).

45. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<2 \\ x+a & \text{si } 2\leq x\leq 5 \\ -x^2+5x+b & \text{si } x>5 \end{cases} \quad a,b\in\mathbb{R}$$. Se pide:

a) Calcular los valores de a y b para que la función sea continua en x=2 y x=5. (Solución a=2 y b=7)

b) Para a=1, b=6, calcúlense las derivadas $f'(1)$ y $f'(7)$ (Solución $f'(1)=2$ y $f'(7)=-9$)

c) Para a=1, b=6, calcúlense la integral definida $\int_3^6 f(x)dx$ (Solución $\int_3^6 f(x)dx=\frac{79}{6}$)

46. La curva $y=a\cdot[1-(x-2)^2]$ con $a>0$, limita con el eje de abscisas un recinto de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de a. (Solución a=9)

47. Halla el área limitada por y = |2x – 4|, el eje X y las rectas x = 0 y x = 5. (Solución 13 u^2)

Integrales Indefinidas Inmediatas

$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$	$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$ con $k = \text{constante}$
$\int (f(x) \cdot g(x))dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$	$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \neq \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para $n \neq -1$	$\int f(x)^n f'(x)dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$ para $n \neq -1$
$\int \frac{1}{x}dx = \text{Ln}\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \text{Ln}\lvert f(x)\rvert + C$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\text{Ln}\,a} + C$ con $a > 0$	$\int a^{f(x)} f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\text{Ln}\,a} + C$ con $a > 0$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x} + C$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,dx = \sqrt{f(x)} + C$
$\int \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}dx = \sqrt[n]{x} + C$	$\int \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}dx = \sqrt[n]{f(x)} + C$
$\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + C$	$\int f'(x) \cdot \text{sen}\,f(x)dx = -\cos f(x) + C$
$\int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + C$	$\int f'(x) \cdot \cos f(x)dx = \text{sen}\,f(x) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \text{tg}\,x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \text{tg}\,f(x) + C$
$\int \frac{-1}{\text{sen}^2 x}dx = \text{cotg}\,x + C$	$\int \frac{-f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)}\,dx = \text{cotg}\,f(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{arc sen}\,x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}dx = \text{arc sen}\,f(x) + C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{arc cos}\,x + C$	$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = \text{arc cos}\,f(x) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \text{arc tg}\,x + C$	$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}dx = \text{arc tg}\,f(x) + C$
$\int \frac{-1}{1+x^2}dx = \text{arc cotg}\,x + C$	$\int \frac{-f'(x)}{1+f(x)^2}dx = \text{arccotg}\,f(x) + C$

Apuntes

MATEMÁTICAS

TEMA 10

Sucesos Aleatorios. Probabilidad.

TEMA 10: Sucesos Aleatorios. Probabilidad.

ÍNDICE

1. **Introducción.**
2. **Teoría**
3. **Ejercicios resueltos.**
4. **Ejercicios propuestos**

1. INTRODUCCIÓN

En la vida cotidiana aparecen muchas situaciones en las que los resultados observados son diferentes aunque las condiciones iníciales en las que se produce la experiencia sean las mismas. Por ejemplo, al lanzar una moneda unas veces resultará cara y otras cruz.. Estos fenómenos, denominados aleatorios, se ven afectados por la incertidumbre.

En el lenguaje habitual, frases como "probablemente...", "es poco probable que...", "hay muchas posibilidades de que..." hacen referencia a esta incertidumbre. La teoría de la probabilidad pretende ser una herramienta para modelizar y tratar con situaciones de este tipo; Por otra parte, cuando aplicamos las técnicas estadísticas a la recogida, análisis e interpretación de los datos, la teoría de la probabilidad proporciona una base para evaluar la fiabilidad de las conclusiones alcanzadas y las inferencias realizadas. Debido al importante papel desempeñado por la probabilidad dentro de la estadística, es necesario familiarizarse con sus elementos básicos, lo que constituye el objetivo del presente tema.

Se introduce el sentido de la probabilidad en términos de experimentos aleatorios, espacio muestral, sucesos, etc. , llegando a la formalización axiomática de la probabilidad y sus principales propiedades, junto con la expresión de la probabilidad condicionada , la independencia de sucesos, probabilidad total y Teorema de Bayes.

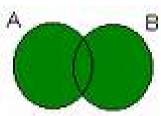
2. TEORÍA

$$\boxed{\text{Experimentos}}\begin{cases}\underline{\text{Determinista}}\text{: aquel del que se puede predecir el resultado} \\ \underline{\text{Aleatorio}}\text{: aquel del que no se puede predecir el resultado que se va a obtener.}\end{cases}$$

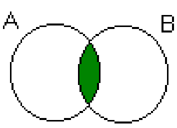
- El **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados que se pueden obtener al realizar un experimento aleatorio. Se representa con la letra E.
- Llamamos **Suceso** a cada uno de los subconjuntos del espacio muestral. Existen diferentes **tipos de Sucesos**:

  - Suceso elemental: es aquel que está formado por un único resultado del experimento.
  - Suceso compuesto: es aquel que está formado por más de un resultado del experimento aleatorio.
  - Suceso seguro: es aquel que se verifica siempre. Es justamente el espacio muestral
  - Suceso Imposible: es aquel que no se verifica nunca. Se representa con $\varnothing$
  - Suceso contrario o complementario: dos sucesos son contrarios o complementarios si la verificación de uno implica la no verificación del otro. El contrario de A se representa con $\overline{A}$.
  - Sucesos incompatibles: son aquellos que no se pueden verificar a la vez. $A \cap B = \varnothing$

- Luego se explican algunas de las **operaciones con sucesos**:
  - Unión de Sucesos: dados dos sucesos A y B, el suceso unión, $A \cup B$, es aquel que se verifica si lo hacen al menos uno de los dos sucesos A o B.



  - Intersección de sucesos: dados dos sucesos A y B, el suceso intersección, $A \cap B$, es aquel que se verifica si lo hacen A y B al mismo tiempo.



- <u>Propiedades de las operaciones con sucesos:</u>

Propiedades	Unión	Intersección
Asociativa	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
Conmutativa	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
Idempotente	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
Simplificativa	$A\cup(A\cap B)=A$	$A\cap(A\cup B)=A$
Absorción	$A\cup E=E$	$A\cap\varnothing=\varnothing$
Elemento Neutro	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
Complementación	$A\cup\overline{A}=E$	$A\cap\overline{A}=\varnothing$
Distributiva	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
LEYES DE MORGAN	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

- **<u>Definición de probabilidad:</u>** cuando repetimos un experimento aleatorio muchas veces, la frecuencia relativa = $\frac{n_A}{n}$ (donde $\begin{cases} n_A = \text{nº de veces que ocurre el suceso A} \\ n = \text{ nº de veces que se hace el experimento} \end{cases}$) de un suceso A tiende a aproximarse a un valor fijo, ese valor se define como probabilidad del suceso A (P(A))

- **<u>Definición axiomática de probabilidad</u>**: otra forma de definir la probabilidad está basada en unos principios tan claros y evidentes que son admitidos sin necesidad de demostración, son los axiomas de probabilidad.

$\boxed{Axioma\ 1}$ $0\le P(A)\le 1$ $\quad A$ es cualquier suceso.

$\boxed{Axioma\ 2}$ $P(\varnothing)=0$ y $P(E)=1$

$\boxed{Axioma\ 3}$ Si A y B son dos sucesos son incompatibles, es decir, $A\cap B=\varnothing$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

Consecuencias

$\boxed{1}$ $\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$

$\boxed{2}$ (2 sucesos) $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$

$\boxed{3}$ (3 sucesos) $\boxed{P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)}$

3 Regla de Laplace:

Para poder aplicar esta regla, los diferentes sucesos elementales del experimento aleatorio tienen que ser equiprobables, es decir, que todos tengan la misma probabilidad.

La probabilidad de un suceso A es igual al cociente entre el número de casos favorables al suceso A y el número de casos posibles.

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{Nº de casos favorables al suceso A}}{\text{Nº de casos posibles}}}$$

- Probabilidad condicionada

La probabilidad de que ocurra un suceso B una vez ha ocurrido el suceso A, se representa por P(B / A) y se calcula así:

$$\boxed{P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}} \quad \text{siendo} \quad P(A)>0$$

De la expresión anterior se deduce que: $\boxed{P(A\cap B)=P(B/A)\cdot P(A)}$

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD CONDICIONADA

1. $P(\varnothing/A)=0$
2. $P(A/A)=1$ $\qquad P(A)>0$
3. $P(\overline{B}/A)=1-P(B/A)$

Nota : *SUCESOS INDEPENDIENTES*: dos sucesos A y B son independientes cuando el resultado obtenido en el primer suceso A no influye en el resultado del segundo suceso B $\boxed{P(A/B)=P(A)}$ $\boxed{P(B/A)=P(B)}$

* Si A y B son independientes $\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$

- Pruebas compuestas

Hay experiencias en las que fácilmente podemos distinguir dos o más etapas. Se llaman pruebas compuestas. En ellas, el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos se simplifica mucho calculando las probabilidades de sus componentes-

Dos pruebas compuestas son independientes cuando el resultado de una no influye en la otra. Si no es así, se llaman dependientes.

Ejemplo:

Experiencias independientes: Tirar una moneda y un dado a la vez.

Experiencias dependientes: Sacar dos bolas de una urna sin reemplazamiento

- Probabildad total

Sean n sucesos A_1 , A_2 , ..., A_n incompatibles dos a dos con $A_1 \cup A_2 \cup ....\cup A_n=E$
y un suceso cualquiera B del espacio muestral, se denomina probabilidad total del suceso B:

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(B/A_1) + P(A_2)\cdot P(B/A_2) + ...P(A_n)\cdot P(B/A_n)$$

- Teorema de Bayes

Sean n sucesos A_1 , A_2 , ..., A_n incompatibles dos a dos con $A_1 \cup A_2 \cup ....\cup A_n=E$
y un suceso cualquiera B del espacio muestral. Las probabilidades a posteriori P(A_i / B) se determinan mediante la expresión:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(B)} \quad \text{siendo} \quad P(B) > 0$$

3. EJERCICIOS RESUELTOS

- ESPACIO MUESTRAL Y SUCESOS

1. Clasifica los siguientes experimentos como deterministas o aleatorios.

a) Lanzar una moneda al aire ALEATORIO

b) Pinchar un globo DETERMINISTA

c) Frenar un coche DETERMINISTA

d) Sacar una carta de una baraja ALEATORIO

2. Sean A, B y C, tres sucesos del espacio muestral E. Utilizando estos sucesos, expresa:

a) Los tres sucesos suceden simultáneamente. $A \cap B \cap C$

b) Ocurren A o B, pero no C. $(A \cup B) \cap \overline{C}$

c) Ocurre alguno de los tres sucesos. $A \cup B \cup C$

d) Ninguno de los tres sucesos sucede: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

3. En el experimento de lanzar un dado con forma de dodecaedro, cuyas caras están numeradas del 1 al 12, halla:

a) El espacio muestral E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 }

b) Los sucesos elementales C = { 1 }, D = { 2 }, ..., F = { 12 }

c) Suceso A = múltiplos de 3 A = { 3, 6, 9,12 }

d) Suceso B = números pares B = { 2, 4, 6, 8, 10, 12}

e) Suceso AUB AUB = { 2,3,4,6,8,9,10,12}

f) Suceso $A \cap B$ $A \cap B$ = { 6, 12 }

g) ¿Los sucesos A y B son compatibles o incompatibles?

SON COMPATIBLES YA QUE $A \cap B \neq \emptyset$

h) Halla $\overline{A}$ $\overline{A}$ = no ser múltiplo de 3 = { 1,2,4,5,7,8,10,11}

4. Describe el espacio muestral del lanzamiento de dos dados.

E = { (1,1) , (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1),.......,(5,6), (6,1) , (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }

5. Se consideran los sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio con P(A) = 0'7 , P(B) = 0'6 y $P(A \cap B)$ = 0'4. Calcular $P(A \cup B)$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'7 + 0'6 - 0'4 = 0'9$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) \underset{\text{LEYES DE MORGAN}}{=} P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0'4 = 0'6$$

6. Sean los sucesos A y B tales que $P(A)=\frac{3}{8}$, $P(B)=\frac{1}{2}$ y $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$. Calcula:

a) $P(A\cup B)$ $\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3+4-2}{8}=\frac{5}{8}$

b) $P(\overline{A})$ $\quad P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{3}{8}=\frac{8-3}{8}=\frac{5}{8}$

c) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ $\quad P(\overline{A}\cup\overline{B}) \underset{\text{LEYES DE MORGAN}}{=} P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}$

d) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ $\quad P(\overline{A}\cap\overline{B}) \underset{\text{LEYES DE MORGAN}}{=} P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

- LEY DE LAPLACE

1. De una baraja de 40 cartas española, se extrae una carta. Calcular las probabilidades siguientes: (R = " ser rey " C = " ser copa" F = " ser figura")

a) Que sea un rey $P(R)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$

b) Que sea de copas $P(C)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$

c) Que no sea figura $P(\overline{F})=\frac{28}{40}$ o $P(\overline{F})=1-P(F)=1-\frac{12}{40}=\frac{40-12}{40}=\frac{28}{40}$

d) Que sea el 7 de espadas $P(\text{" sea el 7 de espadas"})=\frac{1}{40}$

2. De una urna que contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10 se extrae una bola. Consideremos los sucesos: A = "obtener número par", B = "obtener un número mayor que siete" y C = "obtener un múltiplo de tres" Calcular la probabilidad de los sucesos: A, B, C, A∩B, AUB, A∩C, B∩C, A∩B∩C.

A = {"obtener número par"} = {2, 4, 6, 8,10} $\Rightarrow P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

B = { "obtener un número mayor que siete "} = { 8, 9, 10 }, $\Rightarrow P(B)=\frac{3}{10}$

C = { "obtener un múltiplo de tres "} = { 3 , 6, 9 } $\Rightarrow P(C)=\frac{3}{10}$

A∩B = { 8,10 } $\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ AUB = { 2,4,6,8,9,10} $\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

A∩C = { 6 } $\Rightarrow P(A\cap C)=\frac{1}{10}$ B∩C = { 9 } $\Rightarrow P(B\cap C)=\frac{1}{10}$

A∩B∩C = ∅ $\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=0$

3. María y Laura idean el siguiente juego: cada una lanza un dado, si en los dados sale el mismo número, gana Laura; si la suma de ambos es 7, gana María; y en cualquier otro caso hay empate.

a) Calcula la probabilidad de que gane Laura.

b) Calcula la probabilidad de que gane María.

Solución

Hemos visto en el ejercicio 4 que el espacio muestral del lanzamiento de dos dados es:

E = { (1,1) , (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),(2,1),......,(5,6), (6,1) , (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }

Sean los sucesos L = {“gana Laura”} , M= {“gana María”} Entonces:

- Gana Laura si sale el mismo número {(1,1), (2,2), (3,3) , (4,4) , (5,5) , (6,6) }
- Gana María si la suma es 7 {(1,6), (6,1), (2,5) , (5,2) , (3,4) , (4,3) }

a) P(“gana Laura”) = P(L) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) P(“gana María”) = P(M) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- INDEPENDENCIA DE SUCESOS

1. En el lanzamiento de un dado consideramos los sucesos:

A = { “ obtener un 5 “} = { 5 },

B = { “ obtener número impar “} = { 1, 3, 5 },

C = { “ obtener número mayor que 4 “}= { 5 , 6 }

a) ¿Los sucesos A y B son independientes?

b) ¿Los sucesos B y C son independientes?

$$P(A)=\frac{1}{6} \quad P(B)=\frac{3}{6} \quad P(C)=\frac{2}{6}$$

A∩B = { 5 } B∩C = { 5 } $\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6} \quad P(B\cap C)=\frac{1}{6}$

$$\left.\begin{array}{l} P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12} \\ P(A\cap B)=\frac{1}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{A y B NO SON INDEPENDIENTES}}{P(A)\cdot P(B)\neq P(A\cap B)}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(B)\cdot P(C)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6} \\ P(B\cap C)=\frac{1}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{B y C SON INDEPENDIENTES}}{P(B)\cdot P(C)=P(B\cap C)}$$

2. Un ordenador personal está contaminado por un virus y tiene cargados dos programas antivirus que actúan independientemente uno del otro. El programa A detecta la presencia del virus con una probabilidad de 0'9 y el programa B detecta el virus con una probabilidad de 0'8. ¿Cuál es la probabilidad de que el virus no sea detectado?

Solución

Sean los sucesos:

A = {"el programa A detecta la presencia de un virus"} $P(A) = 0'9 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0'1$

B = {"el programa B detecta la presencia de un virus"} $P(B) = 0'8 \Rightarrow P(\overline{B}) = 0'2$

P(" el virus no sea detectado") $= P(\overline{A} \cap \overline{B}) \underset{\text{SON INDEPENDIENTES}}{=} P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0'1 \cdot 0'2 = 0'02$

3. En un centro de secundaria, aprueban Biología 4 de 5 alumnos, las Matemáticas las aprueban 2 de cada 3 alumnos y 3 de cada 5 alumnos aprueban la Lengua. Elegido al azar un alumno matriculado de esas asignaturas en ese centro. Calcula la probabilidad de que:

a) Suspenda esas tres asignaturas
b) Suspenda sólo una de ellas.

Solución

Sean los sucesos:

B = {"aprobar Biología"} $P(B) = \frac{4}{5} \Rightarrow P(\overline{B}) = \frac{1}{5}$

M = {"aprobar Matemáticas"} $P(M) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(\overline{M}) = \frac{1}{3}$

L = {"aprobar Lengua "} $P(L) = \frac{3}{5} \Rightarrow P(\overline{L}) = \frac{2}{5}$

a) P(" suspender las 3 asignaturas") $= P(\overline{B} \cap \overline{M} \cap \overline{L}) \underset{\text{Son Independientes}}{=} P(\overline{B}) \cdot P(\overline{M}) \cdot P(\overline{L}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{75}$

b) P(" suspender sólo una") $= P(\overline{B} \cap M \cap L) + P(B \cap \overline{M} \cap L) + P(B \cap M \cap \overline{L}) =$

$$\underset{\text{Son Independientes}}{=} P(\overline{B}) \cdot P(M) \cdot P(L) + P(B) \cdot P(\overline{M}) \cdot P(L) + P(B) \cdot P(M) \cdot P(\overline{L}) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{75} + \frac{12}{75} + \frac{16}{75} = \boxed{\frac{34}{75}}$$

4. La probabilidad de que un estudiante universitario termine la carrera en los años establecidos por el plan de estudios es de $\frac{3}{5}$ y la de que su hermana finalice la suya sin perder ningún año es de $\frac{2}{3}$. Halla la probabilidad de que:

a) Ambos terminen sus estudios en los años establecidos.

b) Solo el varón los termine en plazo fijado.

c) Al menos uno de los dos los termine en el tiempo establecido

Solución

Sean los sucesos:

A = {"el estudiante termine en los años establecidos"} $P(A)=\frac{3}{5}\Rightarrow P(\overline{A})=\frac{2}{5}$

B = {"la hermana acabe la carrera sin perder ningún año"} $P(B)=\frac{2}{3}\Rightarrow P(\overline{B})=\frac{1}{3}$

a) P(" ambos terminen en los años establecidos") $=P(A\cap B)\underset{\text{Son Independientes}}{=}P(A)\cdot P(B)=\frac{\cancel{3}}{5}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}=\frac{2}{5}$

b) P(" solo el varón acabe en los años establecidos") $=P(A\cap \overline{B})\underset{\text{Son Independientes}}{=}P(A)\cdot P(\overline{B})=\frac{\cancel{3}}{5}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}=\frac{1}{5}$

c) P(" al menos uno termine en los años establecidos") $=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{3}{5}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{9+10-6}{15}=\frac{13}{15}$$

- PROBABILIDAD CONDICIONADA

1. En un club deportivo, el 70% de los socios practica la natación, el 25% juega al tenis y el 20% practica los dos deportes. Si escogemos al azar a uno de los socios, indica cuál es la probabilidad de que:

a) Si juega al tenis, practique la natación.

b) Si practica la natación, juegue al tenis.

c) Practique algún deporte.

Solución

N =" Practicar natación" , T =" Practicar tenis" $P(N)=0'7$ $P(T)=0'25$ $P(N\cap T)=0'2$

a) $P(N/T)=\frac{P(N\cap T)}{P(T)}=\frac{0'2}{0'25}=0'8$

b) $P(T/N)=\frac{P(T\cap N)}{P(N)}=\frac{0'2}{0'7}\approx 0'285$

c) $P(N\cup T)=P(N)+P(T)-P(N\cap T)=0'7+0'25-0'2=0'75$

2. En una clase de 38 alumnos hay 18 chicas y 20 chicos. La mitad de las chicas y el 80% de los chicos son aficionados al fútbol. Elegimos un estudiante al azar y consideramos los sucesos: O =" es un chico" , A = " es una chica", F = " es aficionado al fútbol" . Hallar :

a) P(O) y P(A) $P(O)=\frac{20}{38}$ $P(A)=\frac{18}{38}$

b) P(F/O) y P(F/A)

$P(F/O)=\frac{16}{20}$ (Chicos que les gusta el fútbol 80%·20 = 0'8·20 = 16)

$P(F/A)=\frac{9}{18}$

c) P(O∩F) y P(A∩F) *Utilizamos la formula de la probabilidad condicionada*

$$* \; P(F/O)=\frac{P(O\cap F)}{P(O)} \Rightarrow P(O\cap F)=P(F/O)\cdot P(O)$$

$$P(O\cap F)=\frac{16}{20}\cdot\frac{20}{38}=\frac{16}{38}$$

$$* \; P(F/A)=\frac{P(A\cap F)}{P(A)} \Rightarrow P(A\cap F)=P(F/A)\cdot P(A)$$

$$P(A\cap F)=\frac{9}{18}\cdot\frac{18}{38}=\frac{9}{38}$$

3. Dados los sucesos aleatorios A y B, se sabe que : $P(\overline{B})=\frac{3}{4}$ y $P(A)=P(A/B)=\frac{1}{3}$.

a) Razonar si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcular $P(A\cup B)$

<u>Solución</u> $P(A)=\frac{1}{3}$ $P(\overline{B})=\frac{3}{4}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{4}$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A/B)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

a) $$\left.\begin{array}{l} P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12} \\ P(A\cap B)=\frac{1}{12} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{A y B SON INDEPENDIENTES}}{P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)}$$

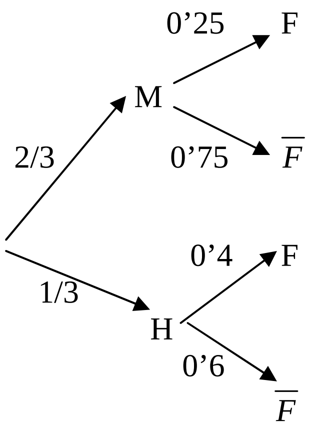
b) $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{4+3-1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

NOTA: Para hacer los ejercicios de probabilidad total y del Teorema de Bayes se recomienda hacer un árbol de decisión o diagrama de árbol.

- PROBABILIDAD TOTAL

1. En el segundo curso de bachillerato de cierto instituto se han matriculado el doble de mujeres que de varones. Sabiendo que un 25% de las mujeres fuman y que no lo hacen un 60% de los varones, determinar la probabilidad de que seleccionada al azar una persona en el segundo curso de bachillerato de ese instituto resulte ser una persona fumadora.

Solución M = {"Mujeres matriculadas"} F= {"Fumar"}
H = {"Hombres matriculados"}

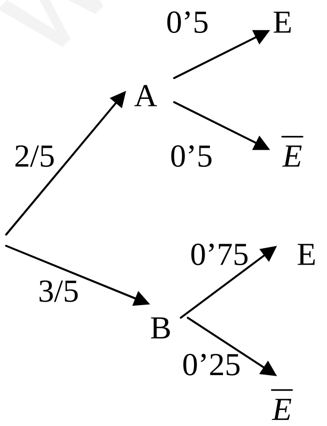


$$\boxed{P(F) = P(M)\cdot P(F/M) + P(H)\cdot P(F/H) = \frac{2}{3}\cdot 0'25 + \frac{1}{3}\cdot 0'4 = 0'3}$$

2. Dos profesores A y B comparten un número de teléfono. De las llamadas que llegan, 2/5 son para A y 3/5 para B. Sus ocupaciones docentes les alejan de este teléfono, de modo que A está fuera el 50% del tiempo y B el 25%. Calcula la probabilidad de estar presente el profesor cuando le llaman.

Solución

A = {"Llamadas que llegan al profesor A"} E= {"Estar presente cuando llaman por teléfono"}
B = {"Llamadas que llegan al profesor B"}



$$\boxed{P(E) = P(A)\cdot P(E/A) + P(B)\cdot P(E/B) = \frac{2}{5}\cdot 0'5 + \frac{3}{5}\cdot 0'75 = 0'65}$$

◆ PROBABILIDAD TOTAL Y TEOREMA DE BAYES

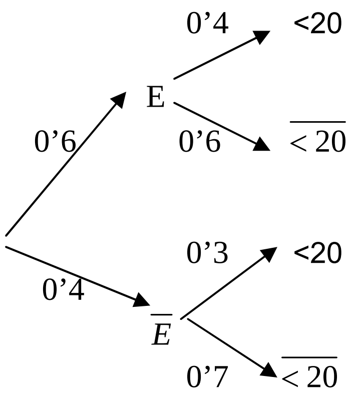
1. El 60% de las personas que visitaron un museo durante el mes de mayo eran españolas. De éstos el 40% eran menores de 20 años. En cambio, de los que no eran españoles, tenían menos de 20 años el 30%. Calcular:

a) La probabilidad de que un visitante elegido al azar tenga menos de 20 años.

b) La probabilidad de que sea español sabiendo que tiene menos de 20 años.

Solución

E = {"Ser visitante español en el museo el mes de mayo"} <20 = {"Tener menos de 20 años"}



a) $\boxed{P(<20)=P(E)\cdot P(<20/E)+P(\overline{E})\cdot P(<20/\overline{E})=0'6\cdot 0'4+0'4\cdot 0'3=0'36}$

b) $\boxed{P(E/<20)\underset{\substack{Teorema\\Bayes}}{=}\dfrac{P(E\cap<20)}{P(<20)}=\dfrac{0'6\cdot 0'4}{0'36}=\dfrac{0'24}{0'36}=0'666...=0'\widehat{6}}$

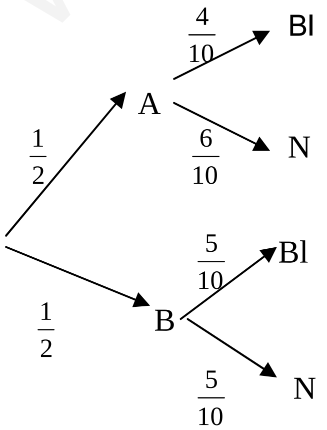
2. Una urna A contiene 4 bolas blancas y 6 negras y otra urna B contiene 5 bolas blancas y 5 negras. Se elige una urna al azar y se extrae una bola.

a) Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea negra.

b) Suponiendo que la bola extraída sea blanca calcula la probabilidad de que la urna elegida haya sido la B.

Solución A = {"Elegir la urna A"} B = {"Elegir la urna B"}

Bl = {"Sacar bola blanca"} N= {"Sacar bola negra"}



a) $P(N)=P(A)\cdot P(N/A)+P(B)\cdot P(N/B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{10}=\frac{6}{20}+\frac{5}{20}=\frac{11}{20}=0'55$

b) $*P(Bl)=1-P(N)=1-0'55=0'45$

$$P(B/Bl)\underset{\substack{Teorema\\Bayes}}{=}\frac{P(B\cap Bl)}{P(Bl)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{10}}{0'45}=\frac{0'25}{0'45}=0'5555...=0'\widehat{5}$$

4. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. De los sucesos A y B se sabe que: P(A) = 0'4 , P(B) =0'3 y P($A\cap B$) = 0'3.
Hallar las siguientes probabilidades: P($A\cup B$) , P(A /B) , P($\overline{A}\cap\overline{B}$) y P($\overline{A}\cup\overline{B}$),

2. De los sucesos A y B se sabe que: P(A) = 0'4 , P(B) =0'5 y P($\overline{A}\cap\overline{B}$) = 0'3.
Hallar las siguientes probabilidades: P($A\cup B$) y P($A\cap B$)

3. Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que
P(A) = $\frac{1}{3}$, P(B) = $\frac{1}{5}$ y P($A\cup B$) = $\frac{7}{15}$, halla:

a) La probabilidad de que se verifiquen A y B (Solución = 1/15)

b) La probabilidad de que no se verifiquen A ni B (Solución= 8/15)

4. Según un estudio, el 40% de los hogares europeos tienen contratado el acceso a Internet, el 33% tiene contratada la televisión por cable, y el 20% disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?
(Solución = 0'13)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?
(Solución = 0'47)

Espacio muestral y ley de Laplace

5. En un sorteo de lotería nos fijamos en la cifra en que termina el "gordo"

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos: A = " menor que 4" B= " Par" C= "Mayor que 5"

c) Halla los sucesos $A\cup B$, $B\cap C$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ y $A\cap C$

6. Blanca y Alfredo escriben, al azar, una vocal cada uno en papeles distintos.

a) Determinar el espacio muestral asociado al experimento

b) Calcular la probabilidad de que no escriban la misma vocal. (Solución= 4/5)

Independencia de sucesos

7. Dos sucesos A y B son independientes con P(A) = 0'4 , P(B) = 0'5. Calcular la probabilidad de que no suceda ninguno de los dos. (Solución = 0'3)

8. Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, tales que:

P(A) = $\frac{1}{4}$, P(B) = $\frac{1}{3}$ y P($A \cup B$) = $\frac{1}{2}$

a) ¿ Son A y B sucesos independientes?. Razónese

b) Calcúlese P($\overline{A}/\overline{B}$)(Solución= 3/4)

9. Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera es 0'6, la segunda 0'8 y la probabilidad de que pase ambas es 0'5. Se pide:

a) Probabilidad de que pase al menos una prueba. (Solución = 0'9)

b) Probabilidad de que no pase ninguna prueba(Solución = 0'1)

c) ¿Son ambas pruebas sucesos independientes? NO

10. Un ajedrecista gana una partida con probabilidad 0'6, la empata con probabilidad 0'3, y la pierde con probabilidad 0'1. El jugador juega dos partidas.

a) Describir el espacio muestral y la probabilidad de cada uno de los resultados de este experimento aleatorio (Hacer un Árbol de decisión)

b) Calcular la probabilidad de que gane al menos una partida (Solución = 0''84)

11. Una cierta señalización de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es 0'95 y de que se active el segundo es 0'90.

a) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active sólo uno de los indicadores. (Solución = 0'14)

b) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active al menos uno de los indicadores (Solución = 0'995)

12. Juan, María y Carlos quedan para ir al cine. Las probabilidades de llegar con retraso son 0'3, 0'2 y 0'1, respectivamente. El retraso o no de uno de ellos no depende de los otros dos. Calcula las probabilidades siguientes:

a) Ninguno se retrasa (Solución = 0'504)

b) Solo uno se retrasa (Solución = 0'398)

c) Al menos uno se retrasa (Solución = 0'496)

13. En una Urna A, hay 4 bolas blancas, numeradas del 1 al 4, y 2 bolas azules, numeradas del 1 al 2, mientras que en la urna B hay 2 bolas blancas, numeradas del 1 al 2, y 4 bolas azules, numeradas del 1 al 4. Si se extraen al azar dos bolas, una de cada urna, hallar:

a) La probabilidad de que tengan el mismo número. (Solución = 10/36)

b) La probabilidad de que sean del mismo color (Solución = 16/36)

Probabilidad condicionada

14. Una caja contiene 10 tornillos, de los cuales tres son defectuosos. Se extraen de una forma sucesiva y sin devolverlos a la caja 4 tornillos. Calcula la probabilidad de que:

a) Los cuatro tornillos extraídos sean buenos (Solución = 0'1666…)

b) Al menos un tornillo, de los cuatro extraídos, sea defectuoso. (Solución = 0'8333…)

15. Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 negras y 4 rojas. Si se extraen tres bolas con reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 blancas y una roja? (Solución = 3/20)

16. De una baraja española de cuarenta cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar. Determinar la probabilidad de obtener:

a) Tres reyes. (Solución = 0'000405)

b) Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera (Solución = 0'00324)

17. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

a) Obtener dos caras y una cruz en el lanzamiento de tres monedas equilibradas e indistinguibles.

b) Obtener una suma de puntos igual a seis o siete en el lanzamiento de dos dados de seis caras equilibrados e indistinguibles.

18. Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno de ellos.

a) Un alumno sabe 6 temas. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar el examen? (Solución = **13/15**)

b) ¿Qué probabilidad tiene el mismo alumno de saberse uno de los temas elegidos y el otro no? (Solución = **8/15**)

19. En una baraja de 40 cartas, se toman tres cartas distintas. Calcula la probabilidad de que las tres sean números distintos? (Solución = 192 / 247)

20. En una ciudad el 55% de los habitantes consume pan integral, el 30% consume pan de multicereales y el 20% consume ambos

a) Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que coma pan multicereales? (Solución = 0'3636….)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa ciudad no consuma ninguno de los dos tipos de pan? (Solución = 0'35)

Árbol de decisión o Diagrama de árbol

21. a) Realizar un árbol de decisión del experimento aleatorio de lanzar tres monedas (llamamos cara y cruz a cada cara de la moneda)

b) Calcular la probabilidad de que salgan todo cara (Solución = 1/8)

22. En una urna hay dos bolas blancas y 3 negras. Dos personas sacan, alternativamente, una bola cada una, sin reemplazamiento. Gana la primera que saque una bola blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que gane la persona que empieza el juego? (Solución = 3/5)

Probabilidad total

23. Un estudiante se presenta a un examen tipo test compuesto por 100 preguntas, cada una de las cuales va acompañada de cuatro respuestas y solo una es correcta. Setenta de las preguntas corresponden a la parte del programa que el alumno ha preparado en las que tiene una probabilidad del 80% de contestar acertadamente. En las restantes señalará al azar una de las cuatro respuestas. Si se elige al azar una de las respuestas, ¿cual es la probabilidad de que sea correcta? (Solución = 0'635)

24. Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas. Si la carta extraída es un rey, nos dirigimos a la urna 1, y en caso contrario nos dirigimos a la urna 2. A continuación extraemos una bola. El contenido de la urna 1 es de 7 bolas blancas y 5 negras y el de la urna 2 es de 6 bolas blancas y 4 negras. Halla:

a) La probabilidad de que la bola extraída sea blanca y de la urna 2. (Solución = 0'54)

b) La probabilidad de que la bola extraída de la urna sea negra.(Solución = 0'40166…)

Probabilidad total y Teorema de Bayes

25. El 70% de los alumnos de un instituto son de bachillerato y el resto de la ESO. De los alumnos de bachillerato, el 60% estudia más de tres horas al día y sólo el 30% de los alumnos de ESO estudia más de tres horas al día.

a) Calcula la probabilidad de que un alumno de dicho instituto, elegido al azar, estudie más de tres horas al día. (Solución = 0'51)

b) Sabiendo que un alumno de este instituto, elegido al azar, estudia más de tres horas al día, ¿cuál es la probabilidad de que sea de bachillerato? (Solución = 0'82352..)

26. En un IES hay 3 profesores de física. Cuando un alumno se matricula en el centro tiene igual probabilidad de que le asignen uno u otro. La probabilidad de obtener como nota final un sobresaliente con el profesor A es 0'3; la de obtenerlo con el profesor B es de 0'28; y la de obtenerlo con el profesor C es 0'35.

a) Calcula la probabilidad de que un alumno matriculado en física obtenga como nota final un sobresaliente. (Solución = 0'31)

b) Sabiendo que un alumno ha tenido un sobresaliente como nota final en física, ¿cuál es la probabilidad de que le hubieran asignado el profesor C? (Solución = 0'376)

27. En una población el 40% son hombres y el 60% mujeres. En esa población el 80% de los hombres y el 20% de las mujeres son aficionados al fútbol.

a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al fútbol.
(Solución = 0'44)

b) Elegida al azar una persona resulta ser aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (Solución = 0'27777…)

28. El 75% de los alumnos acude a clase en algún tipo de transporte y el resto andando. Llega puntual a clase el 60% de los que utilizan transporte y el 90% de los que acuden andando. Calcular:

a) Si se elige al azar uno de los alumnos que ha llegado puntual a clase, la probabilidad de que haya acudido andando. (Solución = 0'333…)

b) Si se elige un alumno al azar, la probabilidad de que no haya llegado puntual. (Solución = 0'325)

29. De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar sucesivamente y sin reemplazamiento dos bolas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las bolas extraídas sean blancas? (Solución = 0'4)

b) Si la segunda bola ha resultado negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo haya sido? (Solución = 0'2)

30. Una imprenta tiene en almacén 1000 libros de una edición A, 1200 de la edición B y 800 de la edición C. Se sabe que el 3% de los libros A, el 1'5% de B y el 2% de C tienen defectos. Se elige un libro al azar.

a) Halla la probabilidad de que tenga defectos. (Solución = 0'02133…)

b) Sabiendo que el libro presenta defectos, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la edición B? (Solución = 0'281…)

31. El 20% de los habitantes de una determinada población son jubilados y otro 20% son estudiantes. La música clásica les gusta al 75% de los jubilados, al 50% de los estudiantes y al 20% del resto de la población. Calcula la probabilidad de que elegido al azar una persona a la que le gusta la música clásica sea jubilada. (Solución = 0'405)

32. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A fabrica 600 tornillos, la B 300 y la C 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de 0'01 para A, de 0'02 para B y de 0'03 para C. Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar.

a) ¿Cual es la probabilidad de que no sea defectuoso? (Solución = 0'985)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina A, sabiendo que no es defectuoso? (Solución = 0'603)

33. En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0'02 y de que una de bajo consumo sea defectuosa es 0'09. Se escoge al azar una bombilla y resulta ser defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que sea halógena?
(Solución = 0'1428571)

34. Una urna A contiene 5 bolas blancas y 4 negras y otra B contiene 1 blanca y dos negras. Se extrae una bola al azar de la urna A y se introduce en B. Después se extrae de la urna B una bola al azar.

a) Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea blanca.
(Solución = 7/18= 0'38…)

b) Supongamos que la bola extraída de la urna B sea blanca, calcula la probabilidad de que la extraída de la urna A también sea blanca. (Solución = 5/7=0'714285714…)

35. La probabilidad de que un vehículo de una cierta compañía de coches tenga un accidente es igual a 0'2. Si uno de los vehículos sufre un accidente, la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa es igual a 0'85. Por otra parte, la probabilidad de que uno de los vehículos necesite la asistencia de la grúa sin haber tenido un accidente es igual a 0'1.

a) Si se elige al azar un vehículo de dicha compañía de coches, ¿cuál es la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa?

b) Si el vehículo elegido ha necesitado la asistencia de una grúa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido por causa de un accidente?

36.

En cierto país donde la enfermedad X es endémica, se sabe que un 12% de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totalmente fiable, ya que da positiva en el 90% de los casos de personas realmente enfermas y también da positiva en el 5% de personas sanas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positiva? (Solución = 0'289)

37. Tenemos dos dados, uno normal y otro trucado. En el trucado hay 4 unos y dos doses. Se elige un dado al azar y se tira dos veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 en la primera tirada y un 2 en la segunda?
(Solución = 1/8).

b) Si el resultado de la primera tirada ha sido 1 y el de la segunda 2, calcula la probabilidad de que se haya escogido el dado trucado. (Solución = 8/9)

Apuntes

MATEMÁTICAS

TEMA 11-12

Inferencia Estadística.

TEMA 11-12: Inferencia Estadística.

ÍNDICE

1. **Introducción.**
2. **Tabla Normal (0,1).**
3. **Intervalos de confianza.**
   3.1. Intervalo de confianza para la media

   3.2. Intervalo de confianza para la proporción

4. **Error y tamaño de la muestra.**
5. **Tipificar.**
6. **Ejercicios resueltos.**
7. **Ejercicios propuestos**

ANEXO (CONTRASTE DE HIPÓTESIS)

1. INTRODUCCIÓN

La Estadística es, en la actualidad, la disciplina científica más utilizada y estudiada en diversos campos del conocimiento como ingeniería, medicina, economía, sociología, biología….

Además de unos mínimos conocimientos estadísticos, es necesario conocer herramientas imprescindibles en la toma de decisiones relativas a determinadas poblaciones basándose en la información obtenida por una muestra. Es precisamente a esta cuestión a lo que se dedica esta unidad y que se basa en una rama de la Estadística llamada Estadística Inferencial, a establecer conclusiones sobre determinados parámetros poblacionales utilizando la información obtenida por una muestra representativa.

Cuando una investigación estadística va referida a un conjunto, colección o colectivo de elementos, este colectivo se llama **población**.

Cuando una población es muy grande, no suele hacerse una observación exhaustiva, sino que se estudia una parte de la misma llamada **muestra**, para obtener conclusiones acerca de la población. Esta muestra debe ser elegida debidamente para obtener resultados válidos para toda la población.

2. Tabla Normal (0,1)   N(0,1)

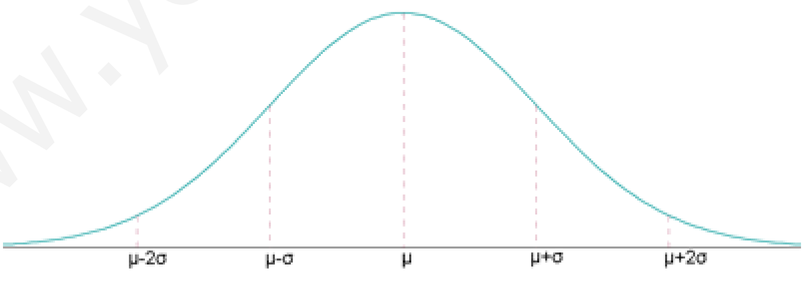
Antes de explicar las tablas de la distribución N(0,1) vamos a ver algunas definiciones previas.

- Se llama variable aleatoria a toda función que asocia a cada elemento del espacio muestral E un número real.
- Una variable aleatoria discreta es aquella que sólo puede tomar valores enteros. Ejemplo: el número de hijos de una familia, la puntuación obtenida en un dado,…,etc.
- Una variable aleatoria continua es aquella que puede tomar todos los valores posibles dentro de un cierto intervalo de la recta real. Ejemplo: la altura de los alumnos de clase, las horas de duración de una pila, etc.

Vamos a ver ahora un modelo de distribución de probabilidad para variables continua, la distribución normal.

- Una variable aleatoria continua sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ, y se designa por $\boxed{N(\mu,\sigma)}$, si cumple las siguientes condiciones:
  a) La variable puede tomar cualquier valor : $(-\infty,\infty)$
  b) La función de densidad, es la expresión en términos de ecuación matemática de la curva de Gauss: $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Curva de la distribución $N(\mu,\sigma)$



- El área del recinto determinado por la función y el eje de las abscisas es igual a **1.**
- La curva normal es simétrica respecto al eje que pasa por $x=\mu$, por tanto deja un área igual a 0'5 a la izquierda de μ y otra igual a 0'5 a la derecha de μ.
- El área bajo la curva entre dos abscisas cualesquiera a y b representa la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre esas dos abscisas ($P(a<X<b)$)
- Para poder calcular probabilidades en una distribución Normal es necesario saber calcular el área bajo la curva de su función densidad entre dos valores cualesquiera.

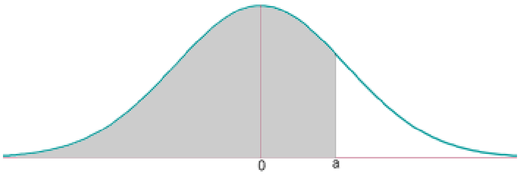
Como todas las distribuciones normales tienen propiedades comunes respecto de sus parámetros, se puede reducir una de ellas a cualquier otra mediante un cambio de variable que ajuste los parámetros de ambas. Por tanto basta tener las tablas de una única distribución normal para poder calcular probabilidades de otra. Se han elaborado las tablas de la función de distribución de la más sencilla que es la distribución N(0,1), es decir, la que tiene media 0 y desviación típica 1.

LA TABLA DE LA N(0,1) (ESTA EN LA HOJA FINAL)

Para buscar en la tabla miramos las unidades y décimas en la columna de la izquierda y las centenas en la fila de arriba.

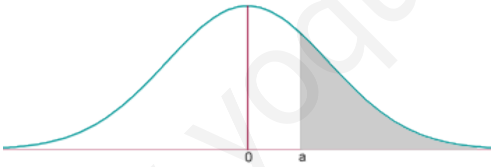
Veamos los siguientes ejemplos (mirar la tabla N(0,1)):

$P(Z \leq a)$



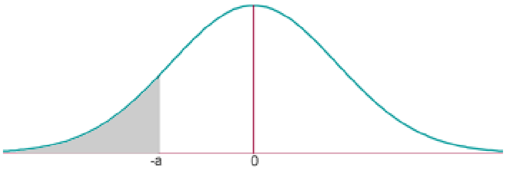
$P(Z \leq 1.47) = 0.9292$

$P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a)$



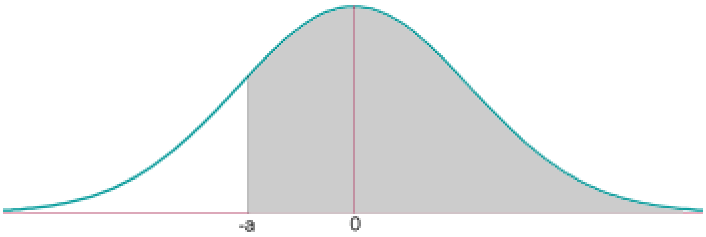
$P(Z > 1.47) = 1 - P(Z \leq 1.47) = 1 - 0.9292 = 0.0708$

$P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \leq a)$



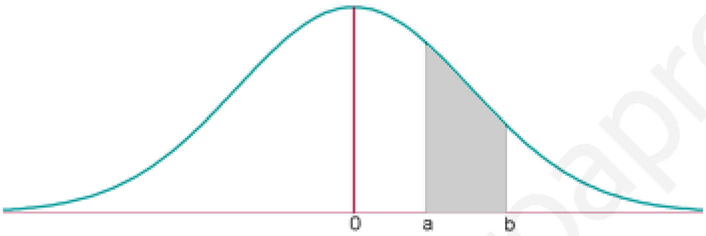
$P(Z \leq -1.47) = 1 - P(Z \leq 1.47) = 1 - 0.9292 = 0.0708$

$P(Z > -a) = P(Z \leq a)$



$p(Z > 1.47) = p(Z \leq 1.47) = 0.9292$

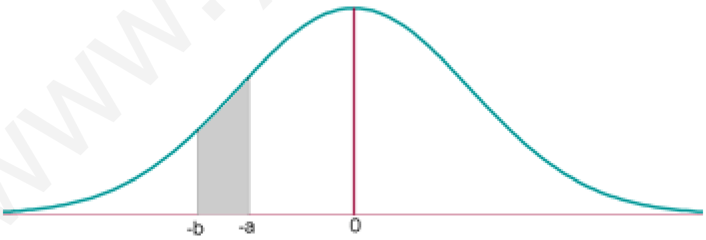
$P(a < Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$



$P(0.45 < Z \leq 1.47) = P(Z \leq 1.47) - P(Z \leq 0.45) =$

$= 0.9292 - 0.6736 = 0.2556$

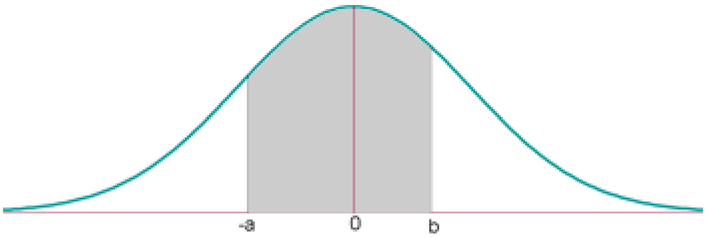
$P(-b < Z \leq -a) = P(a < Z \leq b)$



$P(-1.47 < Z \leq -0.45) = P(0.45 < Z \leq 1.47) =$

$= P(Z \leq 1.47) - P(Z \leq 0.45) = 0.9292 - 0.6736 = 0.2556$

P(−a < Z ≤ b) = P(Z ≤ b) − [1 − P(Z ≤ a)]



P(-1.47 < Z ≤ 0.45) = P(Z ≤ 0.45) − [1 − P(Z ≤ 1.47)]=

= 0.6736 − (1 − 0.9292) = 0.6028

- A veces tendremos que determinar en una distribución N(0,1) el valor de $z_{\alpha/2}$ conocida la probabilidad. En este caso basta con buscar en la tabla N(0,1) el valor de la probabilidad, localizando su fila y su columna correspondientes. Pero sucede que la probabilidad no siempre está en la tabla; cuando esto ocurre hacemos una interpolación.

$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,7324 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 0,62$

Mirar en TABLA N(0,1) En las cuadriculas de color blanco y ver a que valor corresponden

$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,9131 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'36$

$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,995 \Rightarrow \begin{cases} 0'9949 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'57 \\ 0'9951 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'58 \end{cases} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2'57+2'58}{2} = 2'575$

0'995 esta en la tabla entre 0'9949 y 09951. Hacemos la media arítmetica de los valores que salen.

3. Intervalos de confianza.

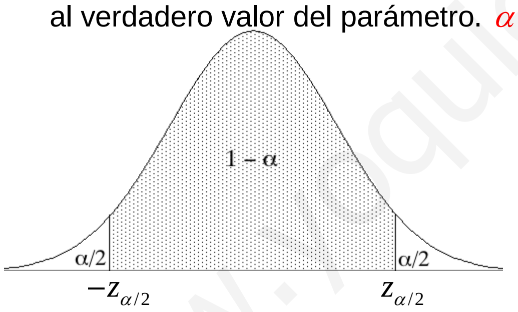
En una población cuya distribución es conocida pero desconocemos algún parámetro, podemos estimar dicho parámetro a partir de una muestra representativa.

Un estimador es un valor que puede calcularse a partir de los datos muéstrales y que proporciona información sobre el valor del parámetro. Por ejemplo la media muestral es un estimador de la media poblacional, la proporción observada en la muestra es un estimador de la proporción en la población.

Una **estimación** es **puntual** cuando se obtiene un sólo valor para el parámetro. Los estimadores más probables en este caso son los estadísticos obtenidos en la muestra, aunque es necesario cuantificar el riesgo que se asume al considerarlos. Recordemos que la distribución muestral indica la distribución de los valores que tomará el estimador al seleccionar distintas muestras de la población. Las dos medidas fundamentales de esta distribución son la media que indica el valor promedio del estimador y la desviación típica, también denominada error típico de estimación, que indica la desviación promedio que podemos esperar entre el estimador y el valor del parámetro.

Más útil es la **estimación por intervalos** en la que calculamos dos valores entre los que se encontrará el parámetro, con un nivel de confianza fijado de antemano.

- Llamamos **Intervalo de confianza** al intervalo que con un cierto nivel de confianza, contiene al parámetro que se está estimando.
- **Nivel de confianza** es la "probabilidad" de que el intervalo calculado contenga al verdadero valor del parámetro. Se indica por $\boxed{1-\alpha}$ y habitualmente se da en porcentaje (1-α)100%. Hablamos de nivel de confianza y no de probabilidad ya que una vez extraída la muestra, el intervalo de confianza contendrá al verdadero valor del parámetro o no, lo que sabemos es que si repitiésemos el proceso con muchas muestras podríamos afirmar que el (1-α)% de los intervalos así construidos contendría al verdadero valor del parámetro. α recibe el nombre de nivel de significación.



3.1 Intervalo de confianza para la media

- Vamos a ver a continuación el intervalo de confianza para la media si la población sigue una distribución $N(\mu,\sigma)$, conocida la desviación típica σ.

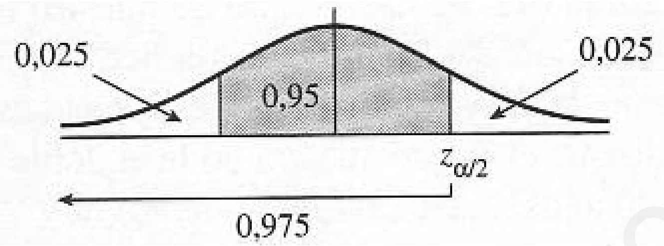
$$\boxed{\left(\overline{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \quad \textbf{donde} \quad \begin{cases} \overline{x} = \text{media muestral} \\ \sigma = \text{desviación típica} \\ n = \text{tamaño de la muestra} \\ z_{\alpha/2} = \text{valor crítico (se calcula mirando la tabla N(0,1)} \end{cases}$$

Ejemplo: Las estaturas de una muestra aleatoria de 50 estudiantes tienen una media de 174'5 cm, y se conoce que la desviación típica de la variable estatura es de 6'9 cm. Calcula un intervalo de confianza del 95% para la estatura media de todos los estudiantes.

Solución

El intervalo de confianza de la media poblacional μ es $\boxed{\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$

$$\begin{cases} \overline{x} = 174'5\ cm \\ \sigma = 6'9\ cm \\ n = 50 \text{ estudiantes} \\ z_{\alpha/2} = 1'96 \text{ (mirar abajo)} \end{cases} \qquad (174'5 - 1'96\cdot\frac{6'9}{\sqrt{50}}, 174'5 + 1'96\cdot\frac{6'9}{\sqrt{50}}) \Rightarrow \boxed{I.C\ (172'59\ ,\ 176'41)}$$



A un nivel de confianza del 95% le corresponde un $\boxed{z_{\alpha/2} = 1'96}$

$$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,975 \underset{\text{Mirar en TABLA N(0,1)}}{\Rightarrow} z_{\alpha/2} = 1'96$$

- Teorema central del límite: si una muestra aleatoria de tamaño n procede de una población con media μ y desviación típica σ, entonces en el caso de que el tamaño de la muestra sea lo suficientemente grande (n>30), la media muestral $\overline{x}$ tiene una distribución normal de media μ y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,esto es:

$$\boxed{\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}$$

3.2 Intervalo de confianza para la proporción

Se quiere estudiar la proporción **p** de una población que tiene una cierta característica; por ejemplo, tener o no tener carnet de conducir, ser rubio o no, etc. Para estudiar la proporción de la población se eligen **k** muestras distintas de tamaño **n** y se obtienen valores para las proporciones muestrales.

✓ *Distribución de las proporciones muestrales*

La distribución de las proporciones muestrales de tamaño **n**, que se representa por $\hat{p}$, tiene las siguientes características:

a) La media p.

b) La desviación típica es $\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$ donde $\boxed{q = 1 - p}$

c) Si el tamaño de la muestra n es grande ($n \geq 30$), la distribución de $\hat{p}$ se aproxima a una distribución normal, $N(p, \sqrt{\dfrac{pq}{n}})$

✓ *Intervalo de confianza para la proporción*

El intervalo de confianza para la proporción **p**, con un nivel de confianza 1-α , es

$$\boxed{\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)} \quad \textbf{donde} \begin{cases} \hat{q} = 1 - \hat{p} \\ n = \text{tamaño de la muestra} \\ z_{\alpha/2} = \text{valor que en una N(0,1)} \\ \qquad \text{cumple que } P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \end{cases}$$

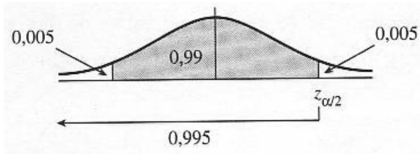
Ejemplo: Se ha tomado la muestra de 40 encinas, y se han contabilizado 18 de ellas con una enfermedad de un hongo. Halla el intervalo de confianza para la proporción de encinas infectadas con el hongo, con un nivel de confianza del 99%.

Solución

El intervalo de confianza para la proporción **p** $\boxed{\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)}$

$$\begin{cases} \hat{p} = \dfrac{18}{40} = 0'45 \\ \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0'45 = 0'55 \\ n = 40 \\ z_{\alpha/2} = 2'575 \text{ (mirar abajo)} \end{cases} \qquad (0'45 - 2'575 \cdot \sqrt{\frac{0'45 \cdot 0'55}{40}}, 0'45 + 2'575 \cdot \sqrt{\frac{0'45 \cdot 0'55}{40}}) \Rightarrow \boxed{I.C\ (0'25\ ,\ 0'65)}$$

La proporción estará entre el 25% y el 65 %, con una probabilidad del 99%



A un nivel de confianza del 99% le corresponde un $\boxed{z_{\alpha/2} = 2'575}$

$$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,995 \Rightarrow \begin{cases} 0'9949 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'57 \\ 0'9951 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'58 \end{cases} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2'57 + 2'58}{2} = 2'575$$

0'995 esta en la tabla entre 0'9949 y 09951. Hacemos la media arítmetica de los valores que salen.

4. Error y tamaño de la muestra.

4.1 Error del Intervalo de confianza para la media

La precisión del intervalo de confianza anterior $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ es $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Esto significa que al utilizar $\bar{x}$ para estimar μ cometemos un error E que es menor o igual $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ con una confianza del $100 \cdot (1-\alpha)$ por ciento: $\boxed{E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

El valor de $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, depende de α y de n del siguiente modo:

- Cuanto mayor sea el tamaño de la muestra n, menor es E.
- Cuanto mayor sea $(1-\alpha)$ (es decir, cuanto más seguros queramos estar de nuestra estimación), mayor es E

En situaciones donde se puede controlar el tamaño de la muestra, es posible elegir n de forma que se tenga una confianza del $100 \cdot (1-\alpha)$ por ciento de que el error al estimar μ sea menor que el error especificado E. Despejando en la fórmula del error tenemos la fórmula para n: $\boxed{n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2}$

Si n no sale un número entero lo redondeamos al entero de sumar uno a su parte entera.

4.2 Error del Intervalo de confianza para la proporción

- ✓ Error máximo para la proporción $\boxed{E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$
- ✓Tamaño de la muestra $\boxed{n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}$

CUADRO RESUMEN

Intervalo de confianza para la media	**Error máximo para la media**	**Tamaño de la muestra**
$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$
Intervalo de confianza para la proporción	**Error máximo para la proporción**	**Tamaño de la muestra**
$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$	$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$	$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}$

5. Tipificar.

Si una variable aleatoria, X, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ, para calcular probabilidades que se refieran a ella, es preciso hacer un cambio de variable, y así poder usar las tablas de la distribución N(0,1). A esto se le llama tipificar o estandarizar la variable.

En general, si X sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, la variable $\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$ sigue una distribución normal N(0,1)

Ejemplo : Dada la distribución N(5,3), determinar $P(X \le 8)$

$$\boxed{P(X \le 8) = P\left(\frac{X-5}{3} \le \frac{8-5}{3}\right) = P(Z \le 1) \underset{\boxed{\substack{Miramos \\ la\ tabla \\ N(0,1)}}}{=} 0'8413}$$

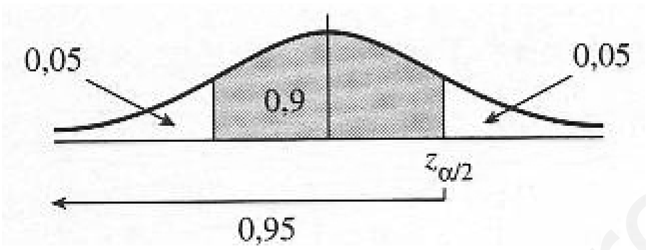
6. Ejercicios resueltos.

1. Se tiene una población $N(\mu, 2)$ y una muestra formada por 16 datos de media 2'5. Obtener el intervalo de confianza del 90% para la media μ de la población.

Solución

El intervalo de confianza de la media poblacional μ es $\boxed{\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$

$$\begin{cases} \overline{x} = 2'5 \\ \sigma = 2 \\ n = 16 \\ z_{\alpha/2} = 1'645 \text{ (mirar abajo)} \end{cases} \quad (2'5 - 1'645 \cdot \frac{2}{\sqrt{16}}, 2'5 + 1'645 \cdot \frac{2}{\sqrt{16}}) \Rightarrow \boxed{I.C\ (1'6775\ ,\ 3'3225)}$$



Intervalo de confianza del 90%

$$P(z \leq z_{\alpha/2}) = 0{,}95 \underset{\boxed{\text{0'95 esta en la tabla entre 0'9495 y 09505. Hacemos la media arítmetica de los valores que salen.}}}{\Longrightarrow} \begin{cases} 0'9495 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'64 \\ 0'9505 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'65 \end{cases} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1'64 + 1'65}{2} = 1'645$$

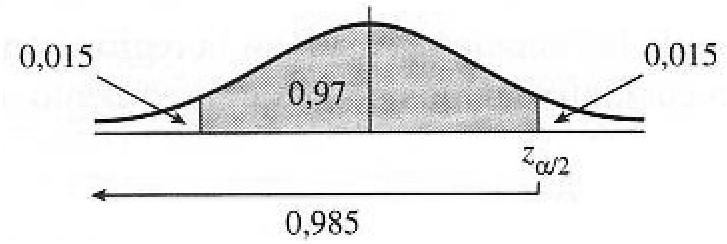
A un nivel de confianza del 90% le corresponde un $\boxed{z_{\alpha/2} = 1'645}$

2. En una población, una variable aleatoria sigue una ley normal de media desconocida y desviación típica 9. ¿De qué tamaño, debe ser la muestra con la cual se estime la media poblacional con un nivel de confianza del 97% y un error máximo admisible igual a 3?

Solución

El tamaño de la muestra: $\boxed{n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2}$

$$\begin{cases} E = 3 \\ \sigma = 9 \\ n = ? \\ z_{\alpha/2} = 2'17_{\Downarrow} \end{cases} \quad n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'17 \cdot 9}{3}\right)^2 = 42'3801 \Rightarrow \boxed{\text{El tamaño de la muestra ha de ser, como mínimo, 43.}}$$



$$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0{,}985 \underset{\text{Mirar en TABLA N(0,1)}}{\Rightarrow} z_{\alpha/2} = 2'17$$

A un nivel de confianza del 97% le corresponde un $\boxed{z_{\alpha/2} = 2'17}$

3. En una determinada comunidad autónoma, se sabe que la desviación típica del número de días que dura un contrato temporal es igual a 57 días. Diga el número mínimo de contratos en los que se ha de mirar su duración para que el intervalo, con un nivel de confianza del 95%, que da la duración media de un contrato de ese tipo, tenga una amplitud que no sea mayor que 10 días.

Solución

Si la amplitud del intervalo de confianza para la media tiene una amplitud menor o igual a 10, su error debe ser justamente menor igual a la mitad de la amplitud, es decir, menor o igual que 5.

El tamaño de la muestra: $\boxed{n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2}$

$$\begin{cases} E = 5 \\ \sigma = 57 \\ n = ? \\ z_{\alpha/2} = 1'96 \end{cases} \quad n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 57}{5}\right)^2 = 499'25\ldots \Rightarrow \boxed{\text{Se ha de mirar por lo menos 500 contratos}}$$

A un nivel de confianza del 99% le corresponde un $\boxed{z_{\alpha/2} = 2'575}$

4. La distribución de las puntuaciones de un tipo de examen de matemáticas se considera Normal. Aplicando este tipo de examen a una muestra de 81 personas adultas se obtiene una media de 6'4 y una desviación típica de 3. Encuentra el intervalo de confianza al 98'4% para la media de las puntuaciones en la población adulta. Interpreta el significado del intervalo obtenido.

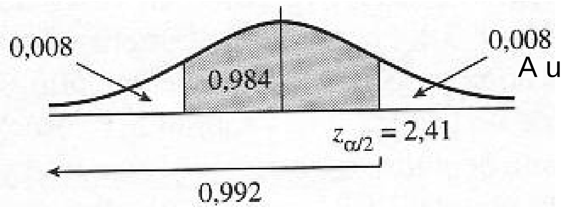
Pablo Gª-Pulgar Perezagua
Departamento Matemáticas
I.E.S. GABRIEL CISNEROS

Solución

El intervalo de confianza de la media poblacional μ es $\boxed{\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$

$$\begin{cases}\bar{x}=6'4\ puntos\\ \sigma=3\\ n=81\text{ personas}\\ z_{\alpha/2}=2'41(\text{ mirar abajo})\end{cases}\qquad (6'4-2'41\cdot\frac{3}{\sqrt{81}},6'4+2'41\cdot\frac{3}{\sqrt{81}})\Rightarrow\boxed{I.C\ (5'6\ ,\ 7'2)}$$

Tenemos una confianza del 98'4% de que la media de la población total esté comprendida entre 5'6 y 7'2 .



A un nivel de confianza del 98'4% le corresponde un $\boxed{z_{\alpha/2}=2'41}$

$$P(z\le z_{\alpha/2})=0,992\underset{\boxed{\text{Mirar en TABLA N(0,1)}}}{\Rightarrow}z_{\alpha/2}=2'41$$

5. El número de horas semanales que los jóvenes, con edades entre 14 y 18 años, dedican semanalmente a ver la televisión, es una variable normal de media desconocida y desviación típica 2. Encuestados 256 de estos jóvenes, la media de horas semanales dedicada a ver la televisión resulto igual a 6.

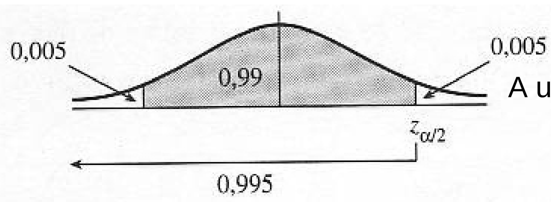
a) Construir un intervalo de confianza, al 99%, para la media.

b) Con un nivel de confianza del 95 %, ¿Cuál es el tamaño de la muestra que se necesita encuestar para que el error máximo de la estimación de la media sea de 0'5 horas?

Solución

a) El intervalo de confianza de la media poblacional μ es $\boxed{\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$

$$\begin{cases}\bar{x}=6\text{ horas}\\ \sigma=2\\ n=256\text{ jóvenes}\\ z_{\alpha/2}=2'575(\text{ mirar abajo})\end{cases}\qquad (6-2'575\cdot\frac{2}{\sqrt{256}},6+2'575\cdot\frac{2}{\sqrt{256}})\Rightarrow\boxed{I.C\ (5'68\ ,\ 6'32)}$$

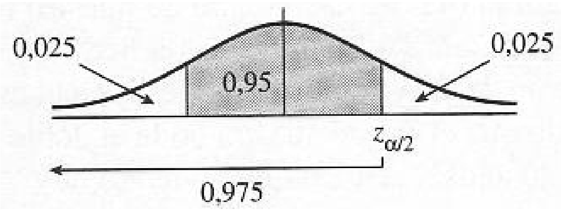


A un nivel de confianza del 99% le corresponde un $\boxed{z_{\alpha/2}=2'575}$

$$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0{,}995 \underset{\substack{\text{0'995 esta en la tabla} \\ \text{entre 0'9949 y 09951.} \\ \text{Hacemos la media} \\ \text{arítmetica de los valores} \\ \text{que salen.}}}{\Rightarrow} \begin{cases} 0'9949 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'57 \\ 0'9951 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'58 \end{cases} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2'57 + 2'58}{2} = 2'575$$

b) El tamaño de la muestra: $\boxed{n = \left(\dfrac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2}$

$$\begin{cases} E = 0'5 \\ \sigma = 2 \\ n = ? \\ z_{\alpha/2} = 1'96 \end{cases} \quad n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 2}{0'5}\right)^2 = 61'4656... \Rightarrow \boxed{\text{El tamaño de la muestra ha de ser, como mínimo, 62.}}$$



$$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0{,}975 \underset{\substack{\text{Mirar en} \\ \text{TABLA N(0,1)}}}{\Rightarrow} z_{\alpha/2} = 1'96$$

A un nivel de confianza del 95% le corresponde un $\boxed{z_{\alpha/2} = 1'96}$

6. ¿De qué tamaño conviene tomar la muestra de una línea de producción para tener una confianza del 95% de que la proporción estimada no difiera de la verdadera en más de un 4%? Se sabe, por estudios previos, que la proporción de objetos defectuosos es del orden del 0'05.

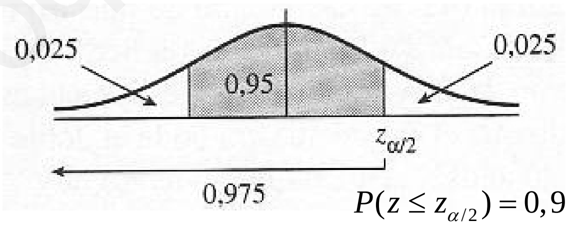
Solución:

$\hat{p} = 0'05$

$\hat{q} = 1 - 0'05 = 0'95$

$E = 0'04$

$z_{\alpha/2} = 1'96$



$$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0{,}975 \underset{\substack{\text{Mirar en} \\ \text{TABLA N(0,1)}}}{\Rightarrow} z_{\alpha/2} = 1'96$$

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q} = n = \left(\frac{1'96}{0'04}\right)^2 \cdot 0'05 \cdot 0'95 = 114'0475 \approx 115$$

Por tanto deberíamos tomar una muestra de 115.

7. La media de ventas diarias de un vendedor de unos grandes almacenes es de 950€ y la desviación típica es de 200€. Suponiendo que la distribución de ventas es normal. ¿cuál es la probabilidad de vender más de 1250€ en un día?

Solución: X= ventas diarias de un vendedor ~ N(950,200)

Se trata de una distribución normal N(950,200). Por tanto:

$$\boxed{P(X>1250)=P\left(\frac{X-950}{200}>\frac{1250-950}{200}\right)=P(Z>1'5)=1-P(Z\leq 1'5)\underset{\boxed{\substack{Miramos\\ la\ tabla\\ N(0,1)}}}{=}1-0'9332=0'0668}$$

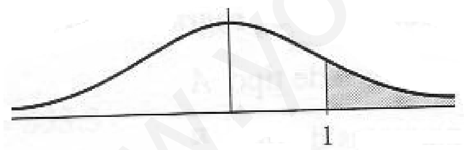
8. Se supone que la altura de las alumnas universitarias de una determinada ciudad sigue una distribución normal de media 1’65 m y una desviación típica 10 cm. Se toma una muestra al azar de 100 de estas alumnas y se calcula su media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media sea mayor que 1’66 m?

Solución:

- X= altura de las alumnas universitarias; X ~ N(1’65,0’1)
- $\overline{X}=$ altura media de 100 alumnas universitarias;

$$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\Rightarrow\overline{X}\sim N\left(1'65,\frac{0'1}{\sqrt{100}}\right)\Rightarrow\boxed{\overline{X}\sim N(1'65,0'01)}$$

$$P(\overline{X}>1'66)=P\left(\frac{\overline{X}-1'65}{0'01}>\frac{1'66-1'65}{0'01}\right)=P(Z>1)=1-P(Z\leq 1)\underset{\boxed{\substack{Miramos\\ la\ tabla\\ N(0,1)}}}{=}1-0'8413=0'1587$$



7. Ejercicios propuestos

Intervalo de confianza para la media , conocida la desviación típica σ

$$\boxed{\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \quad \begin{cases} \bar{x} = \text{media muestral} \\ \sigma = \text{desviación típica} \\ n = \text{tamaño de la muestra} \\ z_{\alpha/2} = \text{valor crítico (se calcula mirando la tabla N(0,1)} \end{cases}$$

1. Se supone que el peso de las sandías de cierta variedad sigue una distribución normal con desviación típica de 1 kilo. Se toma una muestra aleatoria de 100 sandías y se observa que el peso medio es de 6 kilos. Calcúlese un intervalo de confianza al 95% para el peso medio de esa variedad de sandía.

Solución: $\boxed{I.C\ (5'804\ ,\ 6'196)}$

2. La duración de las llamadas de teléfono en una oficina comercial sigue una distribución normal con desviación típica 10 segundos. Se hace una encuesta entre 50 llamadas y la media de duración obtenida en esa muestra es 35 segundos. Calcular un intervalo de confianza al 99% para la duración media de las llamadas.

Solución: $\boxed{I.C\ (31'36\ ,\ 38'64)}$

3. Se probaron 10 automóviles escogidos aleatoriamente de una mima marca y modelo por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares. Se obtuvo que el consumo medio de gasolina, en litros por cada 100 km, fue de 6’5. Estudios previos indican que el consumo de gasolina tiene una distribución normal de desviación típica 2 litros. Determinar un intervalo de confianza al 95% para la media del consumo de gasolina de estos automóviles.

Solución: $\boxed{I.C\ (5'26\ ,\ 7'74)}$

4. Se desea estudiar el gasto semanal de fotocopias, en pesetas, de los estudiantes de bachillerato de Madrid. Para ello, se ha elegido una muestra aleatoria de 9 de estos estudiantes, resultando lo valores siguientes para estos gastos:

100 150 90 70 75 105 200 120 80

Se supone que la variable aleatoria objeto de estudio sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 12. Determina un intervalo de confianza del 95% para la media del gasto semanal de fotocopias por estudiante.

Solución: $\bar{x} = 110$ $\boxed{I.C\ (102'16\ ,\ 117'84)}$

5. Un grupo de 144 alumnos de secundaria seleccionados al azar en una determinada comunidad realizan una prueba de conocimientos sobre la geografía de su Autonomía, sacando una nota media de 6'3 puntos. Las puntuaciones obtenidas se distribuyen normalmente con una desviación típica de 6.

a. Calcula, con una probabilidad del 98% entre qué valores se encontrará la media de la población de los alumnos de secundaria de dicha Comunidad.

b. Interpreta el significado del intervalo obtenido.

Solución: a) $\boxed{I.C\ (5'135\ ,\ 7'465)}$ b) Hay una probabilidad del 98% de que la media de la población se encuentre en ese intervalo de confianza

Intervalo de confianza para la proporción

1. En una muestra aleatoria de 400 personas que han visto un programa de televisión, 100 personas reconocieron que éste les había gustado. Determina el intervalo de confianza, al 95%, para la proporción de personas en las población a las que les gusta el programa.

Solución $\boxed{I.C\ (0'21\ ,\ 0'29)}$ La proporción estará entre el 21% y el 29%

2. En una muestra aleatoria de 400 personas de una población, hay 80 que tienen teléfono móvil. Calcula el intervalo de confianza aproximado para la proporción poblacional, con un nivel de confianza del 95%

Solución $\boxed{I.C\ (0'16\ ,\ 0'24)}$ La proporción estará entre el 16% y el 24%

3. Cuando se ha preguntado a 100 personas de cierta ciudad, elegidas al azar, si leen el periódico al menos una vez a la semana, solo 40 han contestado que sí. Encuentra el intervalo de confianza, con nivel de confianza del 99%, para la proporción de personas de esa ciudad que leen el periódico al menos una vez a la semana.

Solución $\boxed{I.C\ (0'27\ ,\ 0'53)}$ La proporción estará entre el 27% y el 53%

4. De una muestra de 60 clientes de supermercados, 24 fueron capaces de decir el precio del producto que habían comprado. Determina el intervalo de confianza, al 95% para la proporción de clientes de la población.

Solución $\boxed{I.C\ (0'28\ ,\ 0'52)}$ La proporción estará entre el 28% y el 52%

5. En una cierta población cercana a una estación de esquí se quiere estimar con un nivel de confianza del 95% la población de habitantes que practican esquí. Se toma una muestra de 400 habitantes de la población, de los que 240 afirman que practican ese deporte. Determina el correspondiente intervalo de confianza.

Solución $\boxed{I.C\ (0'55\ ,\ 0'64)}$ La proporción estará entre el 55% y el 64%

Tamaño de la muestra n

$$\boxed{E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad \boxed{n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2} \qquad \begin{cases} E = \text{Error} \\ \sigma = \text{desviación típica} \\ n = \text{tamaño de la muestra} \\ z_{\alpha/2} = \text{valor crítico (se calcula mirando la tabla N(0,1)} \end{cases}$$

1. Se estima que el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal con desviación típica 0'05 segundos. Si se quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere los 0'01 segundos con un nivel de confianza del 99%, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempos de reacción?

   Solución : El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 166 conductores

2. Se supone que la altura de los bebés en una determinada población sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 6 cm. Para estimar la altura media se quiere utilizar una muestra de medida n. Calcular el valor mínimo de n de modo que con un nivel de confianza del 99%, el error de la estimación sea menor que 1cm.

   Solución : El valor de n debe ser, al menos, 239 bebes.

3. Una variable aleatoria X tiene una distribución normal, siendo su desviación típica igual a 3. Se consideran muestras de tamaño 16. Si se desea que la media de la muestra no se diferencie en más de 1 unidad de la media de la población, con probabilidad de 0'99, ¿cuántos elementos como mínimo se deberían tomar en la muestra?

   Solución : El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 60

4. Un fabricante de pilas alcalinas sabe que la desviación típica de la duración de las pilas que fabrica es de 80 horas. Calcula el tamaño de la muestra que debe someterse a prueba para tener una confianza del 95% de que, al tomar la duración media de la muestra como valor de la duración media de la población total de pilas, el error que se comete sea menor de 16 horas.

   Solución : El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 6294078 pilas

5. Al medir el tiempo de reacción, un psicólogo estima que la desviación típica del mismo es de 0,5 segundos. ¿Cuál será el número de medidas que deberá hacer para que sea del 95% la confianza de que el error de su estimación no excederá de 0,05 segundos?
Solución : Deberá hacer, al menos, 385 medidas.

6. En una muestra de 100 pacientes sometidos a un cierto tratamiento, se obtiene mejoría en 80 pacientes. Si se trabaja con un nivel de confianza del 95%:

a) ¿Cuál es el error máximo admisible?

b) ¿Cuál es el mínimo número de pacientes que se debe tomar si con el nivel de confianza dado se desea que el error sea menor de 0'05?

a) Solución : Error =0'08.

b) Solución: Se debe tomar una muestra de 246 pacientes

Intervalos de confianza y tamaño de la muestra para la media.

1. Para hacer un estudio sobre el precio/día de una habitación doble en hoteles de cuatro estrellas se elige una muestra de 64 de estos hoteles y se obtiene un precio/día medio de 56 euros con una desviación típica de 6 euros. Se pide:

a. Determinar el intervalo de confianza para el precio/día medio de una habitación doble en un hotel de cuatro estrellas con un nivel de confianza del 97%.

b. Hallar el tamaño de la muestra que debe tomar para que el error máximo sea de 2 euros con un nivel de significación del 1%.

Solución: a) $\boxed{I.C\ (54'37\ ,\ 57'63)}$

b) El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 60 hoteles

2. Al medir el tiempo de reacción, un psicólogo ha obtenido con una muestra de tamaño 50 un tiempo medio de 0'85 segundos. Si la variable tiempo de reacción sigue una distribución normal con una desviación típica de 0'05 segundos, hallar el intervalo de confianza al 99%.

¿De qué tamaño ha de tomarse la muestra para tener una confianza al 95% de que el error de la estimación no supera 0'01 segundos?

Solución: $\boxed{I.C\ (0'83\ ,\ 0'87)}$

El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 97 individuos.

3. El precio de ciertos electrodomésticos puede considerarse una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 100 euros. Los precios en euros correspondientes a una muestra de 9 de estos electrodomésticos son:

255 85 120 290 80 80 275 290 135

a. Construir un intervalo de confianza al 98% para la media poblacional.
b. Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra, para que con un nivel de confianza del 99% el error de estimación del precio medio no supere los 50 euros.

Solución: a) $\bar{x} = 178'88$ $\boxed{I.C\ (101'38\ ,\ 256'38)}$

b) El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 27 electrodomésticos.

4. Los gastos mensuales en actividades de ocio de las personas que viven en una determinada ciudad siguen una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 25 euros.

a. En una muestra de 225 personas se obtiene que el gasto medio en dichas actividades es de 95 euros. Hallar un intervalo de confianza del 95% para el gasto medio mensual en actividades de ocio de la población de esa ciudad.
b. Si se elige un nivel de confianza del 99%, ¿qué tamaño muestral será necesario para estimar el gasto medio mensual en actividades de ocio de la población de esa ciudad con un error máximo de 1 euro?

Solución: a) $\boxed{I.C\ (91'75\ ,\ 98'27)}$

b) El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 4125 personas.

5. El número de días de ausencia en el trabajo de los empleados de cierta empresa para un período de 6 meses, se puede aproximar mediante una distribución normal de desviación típica 1'5 días. Una muestra aleatoria de 10 empleados ha proporcionado los siguientes datos:

5 4 6 8 7 4 2 7 6 1

a. Determinar un intervalo de confianza del 90% para el número medio de días que los empleados de esa empresa han faltado durante los últimos 6 meses.
b. ¿Qué tamaño debe tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea de 0'5 días con el mismo nivel de confianza?

Solución: a) $\overline{x} = 5$ $\boxed{I.C\ (4'21\ ,\ 5'78)}$

b) El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 25 empleados.

6. La estatura de los miembros de una población se distribuye según la ley normal de media desconocida y desviación típica 9 cm. Con el fin de estimar la media se toma una muestra de 9 individuos de la población, obteniéndose para ellos una media aritmética igual a 170 cm.

a) Calcula el intervalo de confianza al nivel 95% para la estatura media de la población.
b) Calcula el tamaño muestral necesario para estimar la media de la población con un error máximo de 5cm y un nivel de confianza del 99%.

Solución: a) $\boxed{I.C\ (164'12\ ,\ 175'88)}$

b) El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 22 personas.

7. El peso de los paquetes enviados por una determinada empresa de transportes se distribuye según una ley Normal, con desviación típica de 0'9 kg. En un estudio realizado con una muestra aleatoria de 9 paquetes se obtuvieron los siguientes pesos en kg

9'5 10 8'5 10'5 12'5 10'5 12'5 13 12

a) Halla un intervalo de confianza, al 99%, para que el peso medio de los paquetes enviados por esa empresa.

b) Calcular el tamaño mínimo que debería tener una muestra, en el caso de admitir un error máximo de 0'3 kg, con un nivel de confianza del 90%

Solución: a) $\overline{x}=11$ $\boxed{I.C\ (10'2275\ ,\ 11'7725)}$

b) El tamaño de la muestra ha de ser mayor o igual que 25 paquetes.

8. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en sangre, obteniéndose una media muestral de 110 mg/cm3. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 mg/cm3.

a) Obtén un intervalo de confianza, al 90%, para el nivel de glucosa en sangre en la población. Solución (106,71; 113,29)

b) ¿Qué error máximo se comete con la estimación anterior? Solución E=3,29

9. Las ventas mensuales de una tienda de electrodomésticos se distribuyen según una ley normal, con desviación típica 900 €. En un estudio estadístico de las ventas realizadas en los últimos nueve meses, se ha encontrado un intervalo de confianza para la media mensual de las ventas, cuyos extremos son 4 663 € y 5 839 €.

a) ¿Cuál ha sido la media de las ventas en estos nueve meses? Solución: $\overline{x}=5251$

b) ¿Cuál es el nivel de confianza para este intervalo? Solución: 95 %

10. La estatura de los jóvenes de una ciudad sigue una distribución $N(\mu,\sigma)$. Si el 90% de las medias de las muestras de 81 jóvenes están en (173'4; 175'8), halla μ y σ.

Solución: $\mu=174'6$ $\sigma=6'57$

11. Se sabe que los estudiantes de una provincia duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley normal de media μ horas y desviación típica 2 horas.

a) A partir de una muestra de 64 alumnos se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (7'26 , 8'14) para la media de la población. Determina el nivel de confianza con que se ha construido dicho intervalo.

Solución: 92'16 %

b) Determina el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo, de 0'75 horas, con un nivel de confianza del 98%.

Solución : El tamaño muestral mínimo es de 39 estudiantes.

Intervalos de confianza y tamaño de la muestra para la proporción.

1. En una universidad se toma una muestra de 100 alumnos al azar, y se encuentra que 62 han aprobado todas las asignaturas.

a) Con un nivel de confianza del 95%, halla un intervalo para estimar el porcentaje de alumnos que aprueban todas las asignaturas

Solución: $\boxed{I.C\ (0'5249\ ,\ 0'7151)}$

b) A la vista del resultado anterior, se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de error de 0'03, con el mismo nivel de confianza del 95%. ¿Cuántos individuos ha de tener la muestra)

Solución : El tamaño muestral mínimo es de 1006 alumnos.

2. En una muestra de 600 personas de una ciudad, se observa que 30 son inmigrantes.

a) Determina un intervalo de confianza de nivel 0'95 para el porcentaje de inmigrantes de esta ciudad.

Solución: $\boxed{I.C\ (0'03\ ,\ 0'07)}$

b) Si se quiere estimar el porcentaje de inmigrantes con un error máximo de 0'02, ¿cuál es el tamaño de la muestra que habría que considerar si se usa un nivel de significación del 1%?

Solución : El tamaño muestral mínimo es de 791 personas.

3. Tomada al azar una muestra de 60 alumnos de una universidad, se encontró que un tercio hablaba inglés.

a) Halla, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de alumnos que hablan inglés entre los alumnos de esa universidad.

Solución: $\boxed{I.C\ (0'23\ ,\ 0'43)}$

b) A la vista del resultado anterior, se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de error del 0'01, con el mismo nivel de confianza del 90%. ¿Cuántos individuos ha de tener la muestra?

Solución : El tamaño muestral mínimo es de 6020 personas.

Tipificar

1. En un servicio de atención al cliente, el tiempo de espera hasta recibir atención es una variable aleatoria de media 10 minutos y desviación típica 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes que llegan en un día concreto. Se pide:

    a. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera de una muestra de 25 clientes no supere los 9 minutos?
    b. ¿Cuál es la distribución de la media muestral, si se toman aleatorias de 64 clientes?

Solución:

a) $\overline{X}_{25} \sim N(10, \frac{2}{\sqrt{25}})$

$$P(\overline{X} < 9) = P\left(\frac{\overline{X}-10}{\frac{2}{\sqrt{25}}} < \frac{9-10}{\frac{2}{\sqrt{25}}}\right) = P(Z < -2'5) = 1 - P(Z \le 2'5) \underset{\substack{\text{Miramos} \\ \text{la tabla} \\ N(0,1)}}{=} 1 - 0'9938 = 0'0062$$

b) $$\boxed{\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(10, \frac{2}{\sqrt{64}}) = N(10, 0'25)}$$

2. Considérese una población en la que se estudia una característica X que sigue una distribución normal de media 12 y desviación típica 4. Se pide:

    a. Probabilidad de que un elemento de la población elegido al azar tenga la característica superior a 14.
    b. Se considera una muestra aleatoria de tamaño n=9, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral tenga un valor superior a 14?

Solución:

a) $X \sim N(12, 4)$

$$P(X > 14) = P\left(\frac{X-12}{4} > \frac{14-12}{4}\right) = P(Z > 0'5) = 1 - P(Z \le 0'5) \underset{\substack{\text{Miramos} \\ \text{la tabla} \\ N(0,1)}}{=} 1 - 0'6915 = 0'3085$$

b) $\overline{X}_9 \sim N(12, \frac{2}{\sqrt{9}}) = N(12, \frac{4}{3})$

$$P(\overline{X} > 14) = P\left(\frac{\overline{X}-12}{\frac{4}{3}} > \frac{14-12}{\frac{4}{3}}\right) = P(Z > 1'5) = 1 - P(Z \le 1'5) \underset{\substack{\text{Miramos} \\ \text{la tabla} \\ N(0,1)}}{=} 1 - 0'9332 = 0'0668$$

3. La temperatura corporal en una cierta especie animal es una variable aleatoria que tiene una distribución normal de media 36'7ºC y desviación típica 3'8ºC. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 ejemplares de esa especie. Hallar la probabilidad de que la temperatura corporal media de la muestra:

a. Sea menor ó igual a 36'9ºC.
b. Esté comprendida entre 36'5ºC y 37'3ºC.

Solución:

a) $X \sim N(36'7, 3'8) \underset{\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}{\Rightarrow} \overline{X}_{100} \sim N(36'7, \frac{3'8}{\sqrt{100}}) = N(36'7, 0'38)$

$$\boxed{P(\overline{X} \leq 36'9) = P(\frac{\overline{X} - 36'7}{0'38} \leq \frac{36'9 - 36'7}{0'38}) = P(Z \leq 0'52) \underset{\boxed{\substack{Miramos \\ la\ tabla \\ N(0,1)}}}{=} 0,6985}$$

b)

$$\boxed{\begin{aligned} &P(36'5 \leq \overline{X} \leq 37'3) = P(\frac{36'5 - 36'7}{0'38} \leq \frac{\overline{X} - 36'7}{0'38} \leq \frac{37'5 - 36'7}{0'38}) = P(-0'52 \leq Z \leq 2'10) = \\ &= P(Z \leq 2'10) - P(Z \leq -0'52) = P(Z \leq 2'10) - [1 - P(Z \leq 0'52)] \underset{\boxed{\substack{Miramos \\ la\ tabla \\ N(0,1)}}}{=} 0'9821 - [1 - 0'6985] = 0'6806 \end{aligned}}$$

4. Se tienen muchos datos que siguen una distribución normal de media 20 y desviación típica 2. :

a) Calcula la probabilidad de que los datos superen el valor de 23. Solución: 0'0668

b) Calcula la probabilidad de que los datos sean inferiores a 15. Solución: 0'0062

5. Se supone que el peso de las mujeres de una determinada región sigue una distribución normal de media 64 kg y desviación típica 6 kg. Se toma una muestra al azar de 144 de estas mujeres y se calcula su media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media sea al menos de 63 kg?

Solución: 0'9772

6. La edad a la que contraen matrimonio los hombres de Toledo es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación típica de 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha ciudad.

a) ¿Cuál es la media y la desviación típica de la media?

Solución: Media= 35 años   Desviación típica = 0’5 años

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra este comprendida entre 36 y 37 años?

Solución: 0’0228

7. Se conoce que el número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una distribución normal de media 8’1 días y desviación típica 3 días. Se elige al azar una muestra de 100 enfermos. ¿Cuál es la distribución de la media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de permanencia de los enfermos de ese hospital esté comprendida entre 8 y 10 días?

Solución: $\overline{X} \sim N(8'1, 0'3)$; 0’6293

8. Se supone que la altura de las alumnas de segundo de Bachillerato de una determinada ciudad sigue una ley Normal de 165 cm de media y 11 cm de desviación típica. Se toma una muestra al azar de 121 de estas alumnas y se calcula su media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media sea menor que 164 cm? Solución: 0’1587

9. Se sabe que en el último año el gasto mensual en transporte de los estudiantes de un IES sigue una distribución normal de media 42 euros y desviación típica 3’20 euros.

a) ¿Qué distribución seguirán las medias de las muestras de tamaño 64 alumnos, obtenidas por muestreo aleatorio simple? Solución: $\overline{X} \sim N(42, 0'4)$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de una de esas muestras de 64 alumnos sea inferior o igual a 43’50 euros? Solución: 0.9999

10. La media de edad de los alumnos que se presentan a las pruebas de acceso a la universidad en una determinada población es de 18’1 años y la desviación típica de 0’6 años.

a) De los alumnos anteriores se elige al azar una muestra de 100. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la edad de la muestra esté comprendida entre 17’9 y 18’3 años, con una confianza de 99’5%? Solución: 0’9992

b) ¿Qué tamaño debe tener una muestra de dicha población para que su media esté comprendida entre 17'9 y 18'3 con una confianza de 99'5%? Solución: n= 71

11. La puntuación que obtienen los niños en cierto test psicológico sigue una distribución N (85 , 15).

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño elegido al azar obtenga más de 100 puntos? Solución: 0'1587

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación media en una muestra de 10 niños sea de más de 100 puntos? Solución: 0'0008

12. El gasto anual, en publicidad de las empresas ubicadas en el polígono industrial oeste, se distribuye según una normal de desviación típica 1000 euros. Se selecciona una muestra aleatoria de 36 empresas. Calcule la probabilidad de que la diferencia, en valor absoluto, entre la media muestral sea inferior a 5000 euros.

SOLUCIÓN

$$P(|\bar{X}-\mu|<500) = P(-500<\bar{X}-\mu<500) =$$

$$= \text{(tipificando)} =$$

$$= P\left(\frac{-500}{1000/\sqrt{36}} < \frac{\bar{X}-\mu}{1000/\sqrt{36}} < \frac{500}{1000/\sqrt{36}}\right) = P(-3<Z<3) =$$

$$= \text{(a partir de la tabla de la distribución } N(0,1)) =$$

$$= \Phi(3)-\Phi(-3) = 0{,}9987 - 0{,}0013 = 0{,}9974.$$

13. El peso en gramos del contenido de las cajas de cereales de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 5 gramos. Se toma una muestra de tamaño 144:

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y sea menor de 1 gramo.

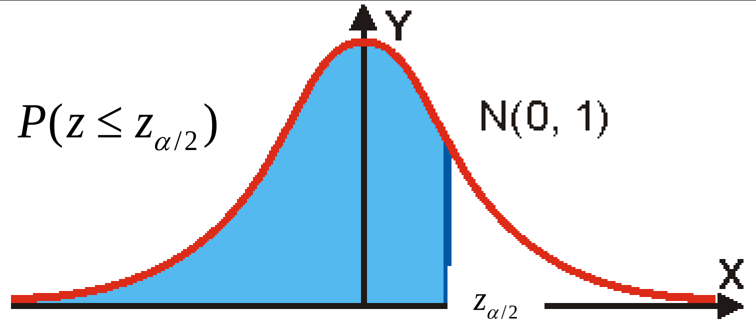
b) Si la media muestral obtenida es igual a 499,5 gramos, determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90% para el peso medio de ese tipo de cajas de cereales.

14. Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 320. Se toma una muestra aleatoria simple de 36 elementos.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media de la distribución normal sea mayor o igual que 50.

b) Determínese un intervalo de confianza del 95% para la media de la distribución normal, si la media muestral es igual a 4820.

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR, N(0, 1)



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000