GEOMETRÍA
Tema 3º

Medidas en el espacio

Introducción:

- En el tema anterior vimos:
  - Las ecuaciones de la recta y el plano
  - Las propiedades afines de la recta y el plano
    - Paralelísmo
    - Incidendia
    - Intersección
- En el presenta tema veremos:
  - Las propiedades métricas de los elementos geométricos:
    - Ángulos
    - Distancias
    - Áreas
    - Volúmenes

Problemas métricos

Hacen referencia a la medida de:

- Distancias, ángulos, áreas y volúmenes

Para resolver los problemas métricos:

- Nos apoyamos en la representación gráfica

- Nos apoyamos en el razonamiento geométrico

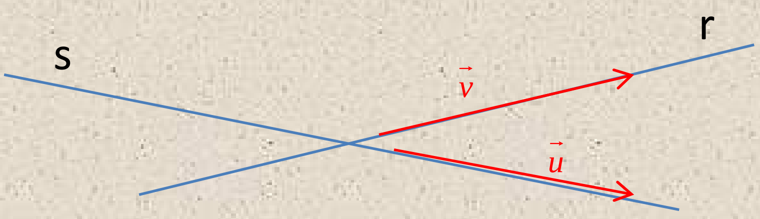
- Nos servimos de las operaciones vectoriales

Medida de ángulos

- 1.-Ángulo entre dos rectas:

Dos rectas forman el mismo ángulo que el que forman sus vectores directores:

$$\left[\text{Recuerda que el ángulo } \alpha \text{ que forman dos vectores } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ es: } \cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \right]$$



Ángulo que forman las rectas "r" y "s" =

$$=\text{arcos}(r,s)=\text{arcos}(\vec{u},\vec{v}) = ar\cos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$$

Ejemplo

Qué ángulo forman las rectas $r:\begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x = 3-\mu \\ y = 1+\mu \\ z = -1-\mu \end{cases}$

Comprobamos primero que se cortan: $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

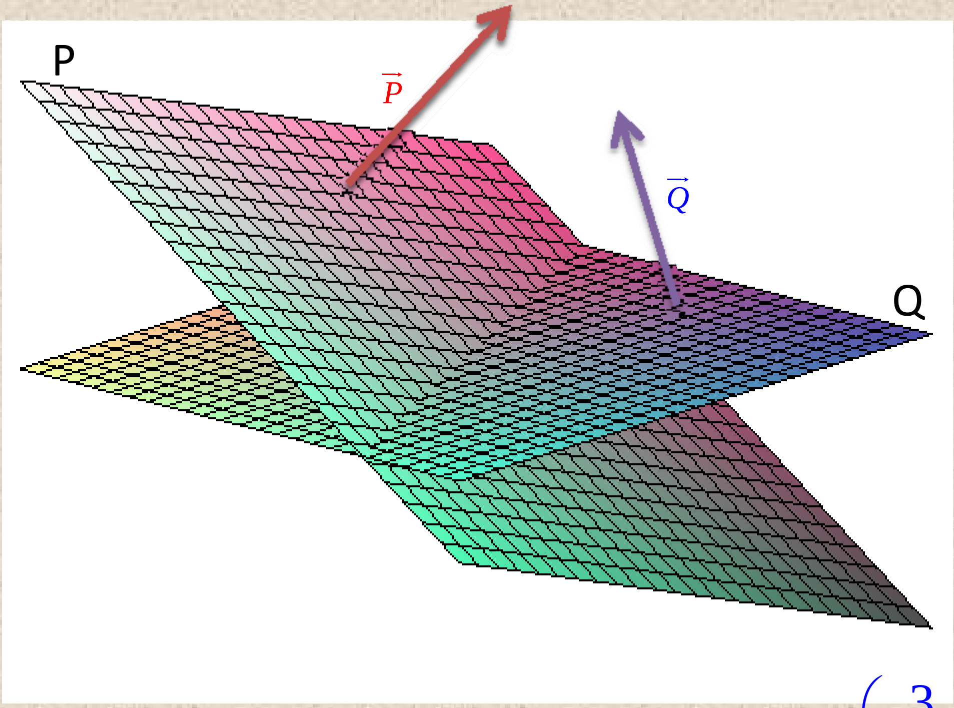
Si llamamos α al ángulo que forman las rectas:

$$\cos\ \alpha = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{|[-2,1,1]|\cdot|[-1,1,-1]|} = \frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \text{arcos}\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 1{,}079 \text{ radianes}$$

Ángulo de dos planos

Los planos forman el mismo ángulo que el que forman sus vectores normales



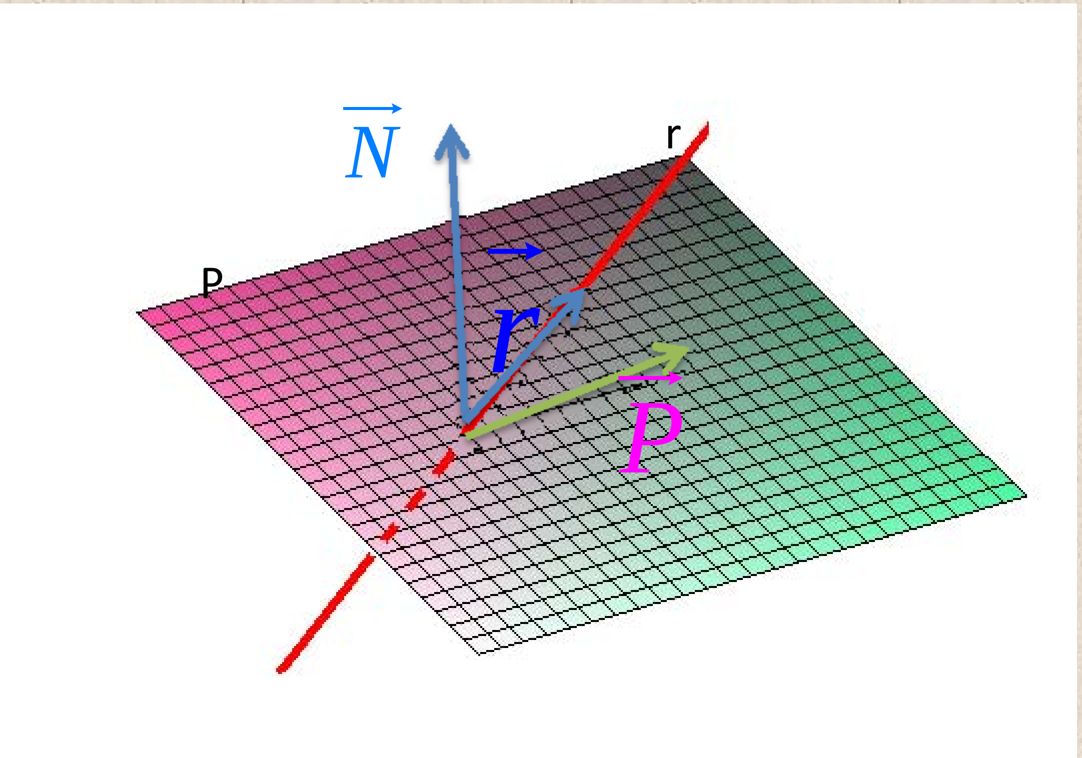
¿Qué ángulo forma el plano P:2x+3y-z=3 con el plano Q:3x-2y+2z=5 ?

Se llamamos α al ángulo que Forman los planos:

$$\cos\ \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}{|\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}|\cdot|\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}|} = \frac{-2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{17}} \approx -0.13$$

Ángulo entre plano y recta

- El ángulo que forma la recta y el plano es complementario del ángulo que forma la recta y la normal de plano:



$$\text{Ángulo}(\overrightarrow{\mathrm{N}}, \vec{\mathrm{r}}) + \text{Ángulo}(\vec{\mathrm{r}}, \overrightarrow{\mathrm{P}}) = \frac{\pi}{2} rad$$

¿Qué ángulo forma la recta $r:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$ **con el plano** $\text{p}: x+y+z-3=0$

Si llamamos α **al ángulo que forma la recta con el plano:**

$$\alpha+\text{ángulo}\left(\left[\overrightarrow{1,1,1,}\right],\left[\overrightarrow{1,-2,-1}\right]\right)=\frac{\pi}{2}$$

luego $Sen(\alpha)=Cos\left(\left[\overrightarrow{1,1,1,}\right],\left[\overrightarrow{1,-2,-1}\right]\right)$ **, de donde:**

$$sen(\alpha)=\frac{\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{|\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\end{pmatrix}|\cdot|\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}}=\frac{-2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{2}}{3}\approx-0.47$$

$$\alpha=arsen(-0,47)=5,79\ \text{rad.}$$

Distancia entre dos puntos

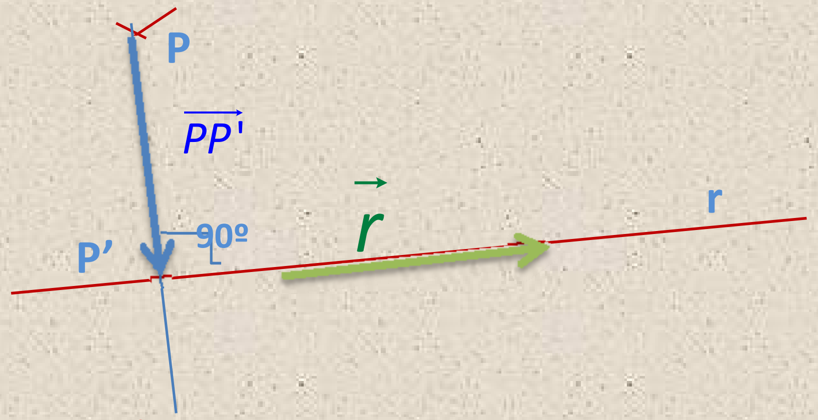
- La distancia entre dos puntos A y B es igual al módulo del vector $\overrightarrow{AB}$

Calcula la distancia del punto A(1,2,-3) al punto B(-1,3,4)

El vector $\overrightarrow{AB} = (-1,3,4) - (1,2,-3) = (-2,1,7)$,

luego la distancia de A a B es $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 7^2} = 3\sqrt{6}$ unidades de longitud

Distancia de un punto a una recta



a) Método geométrico:

- Se traza una perpendicular a la recta desde el punto P para encontrar el punto P'
- Se calcula la distancia entre los puntos **P** y **P'**

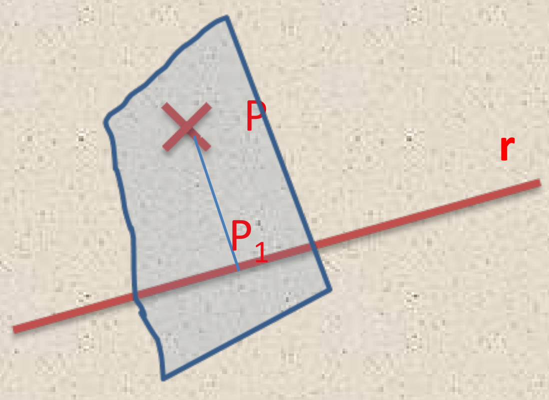
Calcular la distancia del punto (2,1,3) a la recta $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Cualquier punto de recta tiene la forma $(2+\lambda, 1-\lambda, \lambda)$; cualquier vector con origen en **P** y final en la recta tiene la forma $\left[\overrightarrow{2+\lambda-2, 1-\lambda-1, \lambda-3}\right] = [\lambda, -\lambda, \lambda-3]$

El vector $\overrightarrow{PP'}$ y el vector $\vec{r}$ son perpendiculares : $(\lambda \quad -\lambda \quad \lambda-3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

$d_{P,r} = d_{P,P'} = d_{(2,1,3),(3,0,1)} = \sqrt{(3-2)^2 + (0-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{6}$ uni. de long.

O bien: Calcular la distancia del punto (2,1,3) a la recta $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$



- por el punto "P" trazamos un plano perpendicular a "r"

$$x - y + z - 4 = 0$$

- Dicho plano corta a la recta en el punto "P_1"

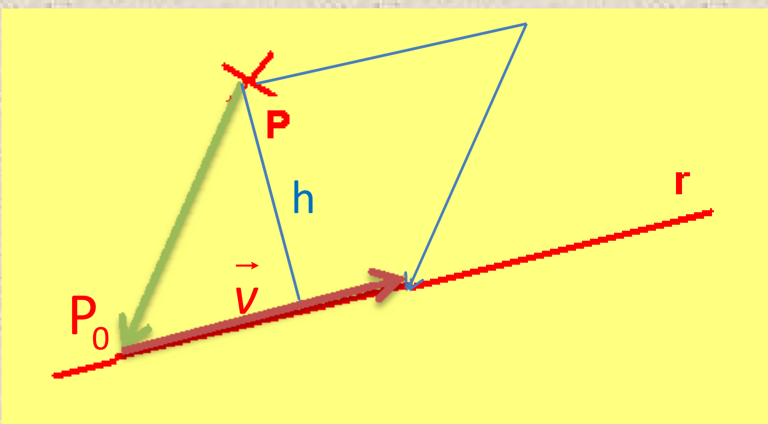
$$\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ x = 2+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow 2+\lambda-1+\lambda+\lambda-4=0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P_1 = (3,0,1)$$

- Calculamos la distancia de P a P_1

$$d_{P,P_1} = \sqrt{6} \text{ unidades de longitud}$$

b) Método vectorial

La distancia de un punto a una recta es la altura de paralelogramo limitado por el vector de la recta y por el vector que une el punto con cualquier punto de la recta



$$\acute{A}rea = base \cdot altura \Rightarrow altura = \frac{\acute{A}rea}{base}$$

Luego:

$$d_{p,r} = \frac{|\overrightarrow{PP_0} \times \vec{v}\,|}{|\vec{v}\,|}$$

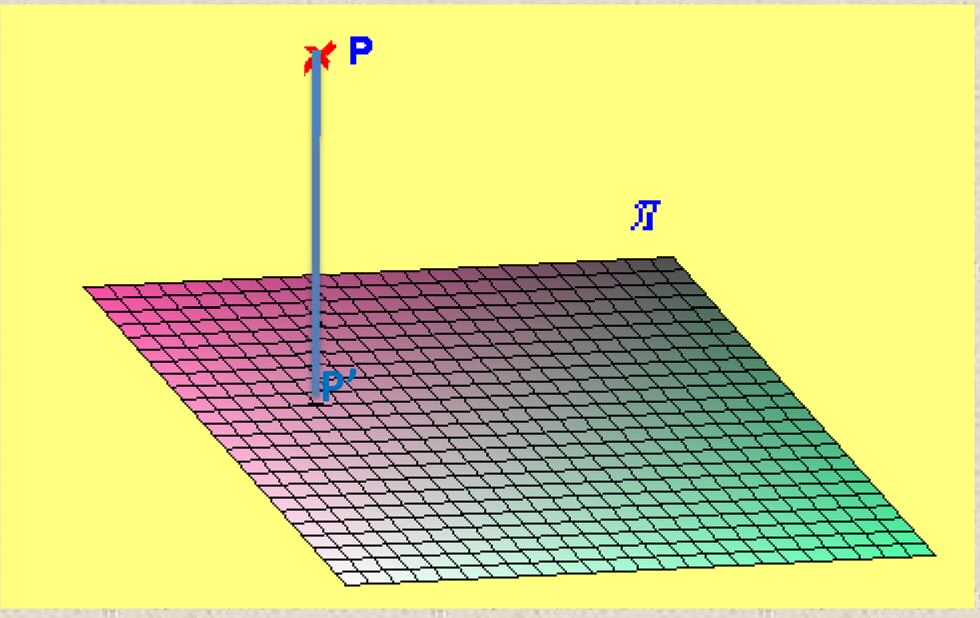
Calcular la distancia del punto (2,1,3) a la recta $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

$$\overrightarrow{PP_0} = [2-2, 1-1, 0-3] = [0,0,-3]$$

$$\vec{v} = [1,-1,1]$$

$$d_{p,r} = \frac{\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right|}{|[1 \quad -1 \quad 1]|} = \frac{|[-3 \quad -3 \quad 0]|}{\sqrt{3}} = \sqrt{6} \text{ uni. de long.}$$

Distancia de un punto a un plano



a) Método geométrico:

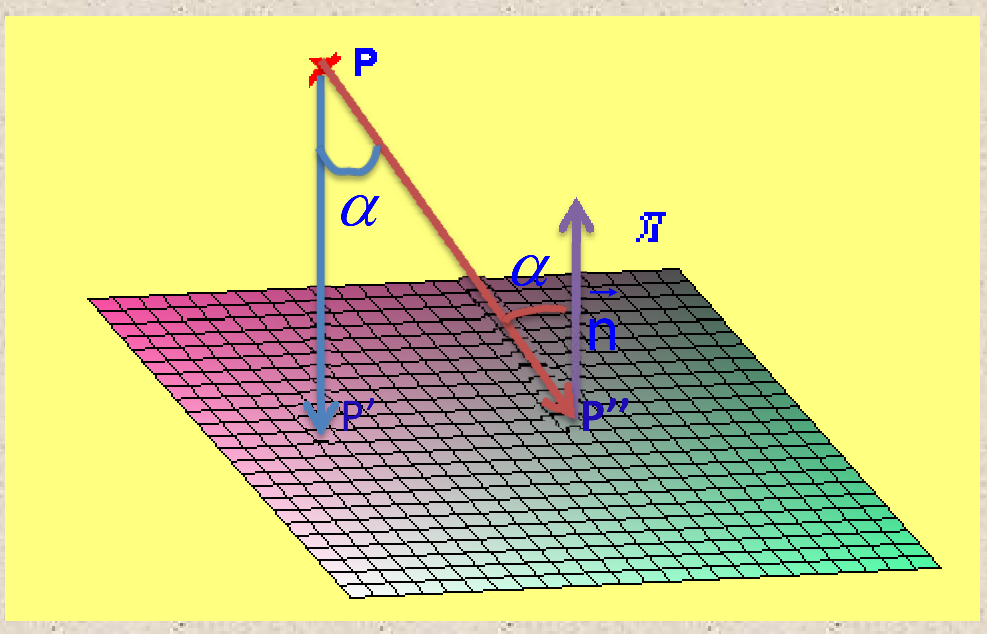
- Se traza una perpendicular al plano desde el punto **P** para encontrar el punto **P'**
- Se mide la distancia de **P a P'**

Calcular la distancia de punto (1,2,-1) al plano x+y+z-5=0

La recta $x-1=y-2=z+1$ **, perpendicular al plano , pasa por el punto dado y corta al plano en el punto (2,3,0)**

$d_{P,P'}$ **=|[1,1,1]|=** $\sqrt{3}$ **unidades de longitud**

b) Método vectorial:



- En cualquier punto **P''** trazamos el vector normal $\vec{n}$ del plano y el vector $\overrightarrow{PP''}$
- Se cumple:

$$|\overrightarrow{PP'}| = |\overrightarrow{PP''}|\cos\ \alpha \quad \text{pero} \quad |\overrightarrow{PP''}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\ \alpha = \overrightarrow{PP''}\cdot\vec{n} \quad \text{luego:}$$

$$d_{P,\pi} = |PP'| = \left|\frac{\overrightarrow{PP''}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$$

Calcular la distancia del punto (1,2,-1) al plano x+y+z-5=0

Buscamos un punto cualquiera del plano, por ejemplo:

X=1 → Y=1 → Z=5-1-1=3

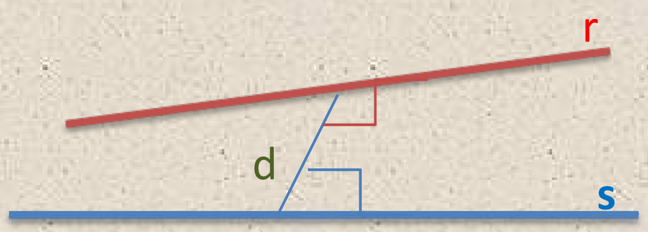
Y aplicamos la fórmula anterior:

$$d_{p,\pi} = \left| \frac{([1 \quad 1 \quad 3] - [1 \quad 2 \quad -1]) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{|[1,1,1]|} \right| = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ unid. de long.}$$

Dado que el punto P'' está en el plano, la fórmula anterior se puede escribir en la forma:

$$d = \frac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia entre dos rectas



Sean “r” y “s” dos rectas que se cruzan en el espacio

La distancia entre ambas rectas será la medida del segmento perpendicular a ambas

Calcular la distancia entre las rectas $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = z$ y $s: x-1 = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$

El segmento que une un punto $(1+2\lambda, -1+3\lambda, \lambda)$ de “r”, con un punto $(1+\mu, 1+2\mu, 2+3\mu)$ de “s” , es el módulo del vector:

$$\left[(1+2\lambda, -1+3\lambda, \lambda) - (1+\mu, 1+2\mu, 2+3\mu)\right] = \left[2\lambda-\mu, 3\lambda-2\mu-2, \lambda-3\mu-2\right]$$

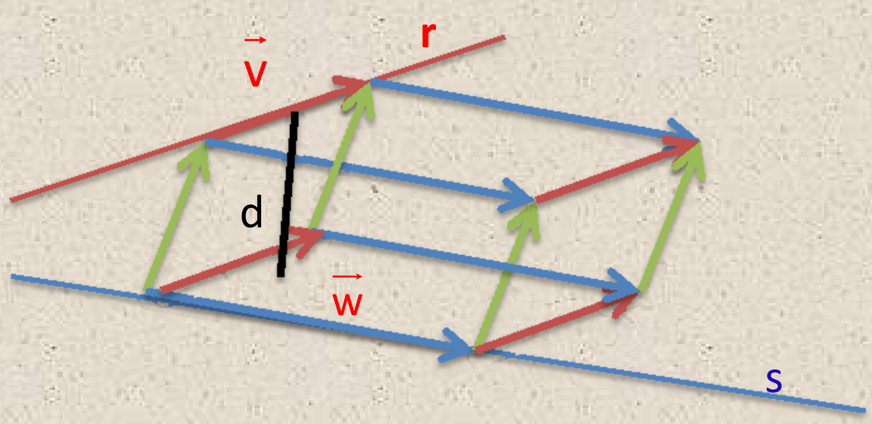
Como “d” debe ser perpendicular a “r” y a ”s”, debe cumplirse:

$$\begin{cases}\left[2\lambda-\mu, 3\lambda-2\mu-2, \lambda-3\mu-2\right]\cdot[2,3,1]=0 \\ \left[2\lambda-\mu, 3\lambda-2\mu-2, \lambda-3\mu-2\right]\cdot[1,2,3]=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}14\lambda-11\mu-8=0 \\ 11\lambda-14\eta-10=0\end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{75}\ ,\ \mu = -\frac{52}{75}$$

Luego el módulo de “d” es

$$\left|\left[2\lambda-\mu, 3\lambda-2\mu-2, \lambda-3\mu-2\right]\right|_{\lambda=\frac{2}{75}\ ,\ \mu=-\frac{52}{75}} = \left|\left[\frac{56}{75}, -\frac{40}{75}, \frac{8}{75}\right]\right| = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$ unid. de long.

Método vectorial:



La distancia ,d ,entre las rectas “r” y “s” es igual a la altura del prisma limitado por los vectores de ambas rectas y por un vector que une ambas rectas

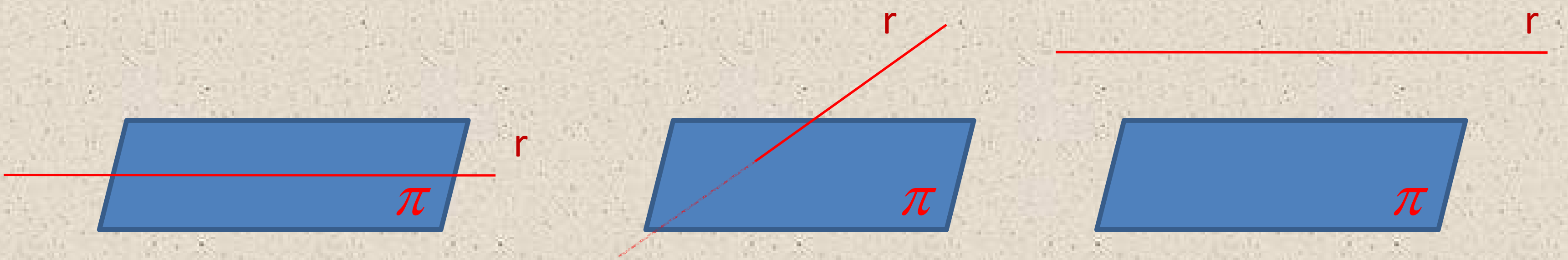
$$\text{altura}=\frac{\text{Volumen}}{\text{Área de la base}}\cdots>\text{d}=\frac{|\left[\overrightarrow{PP_o},\vec{v},\vec{w}\right]|}{|\left[\vec{v}\times\vec{w}\right]|}$$

Calcular la distancia entre las rectas $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=z$ y $s:x-1=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$

$$d_{r.s}=\frac{\left|\begin{vmatrix}0&2&2\\2&3&1\\1&2&3\end{vmatrix}\right|}{|\left[[2,3,1]\times[1,2,3]\right]|}=\frac{8}{|[7,-5,1]|}=\frac{8}{5\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{15}\text{ unid. de long.}$$

Distancia de una recta a un plano

Un plano y una recta pueden ser a) coincidentes, b) secantes o c) paralelos



En los casos a) y b) la distancia es cero y en el caso c) la distancia de la recta al plano es la misma que la distancia de cualquier punto de la recta al plano

Calcular la distancia del la recta de l recta $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{2-z}{4}$ **al plano 2x-y+z-5=0**

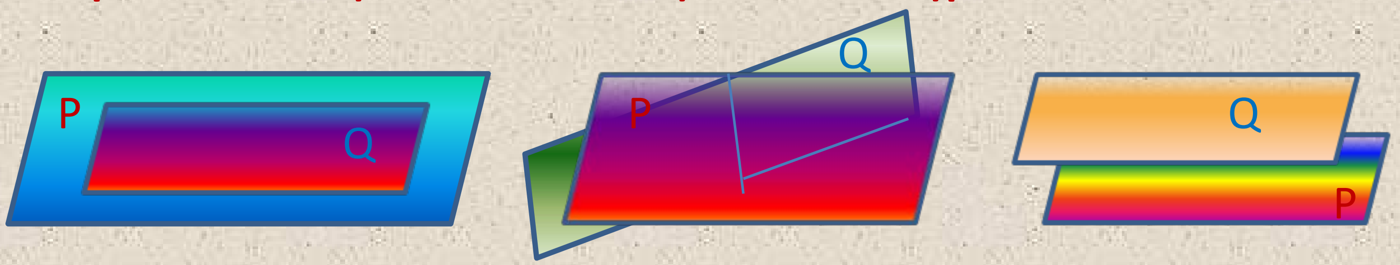
Los vectores $[3,2,-4]$ y $[2,-1,1]$ son perpendiculares,

luego la recta y el plano son paralelos o coincidentes

$$d_{r,\pi}=\frac{2(1)-1(-2)+1(1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^1}}=\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{6}\text{ unid. de long.}$$

Distancia entre dos planos

Dos planos pueden sea a) coincidentes, b)secantes o c)paralelos



En los casos a) y b) la distancia entre los planos es cero , y en el caso c) la distancia la podemos obtener trazando una perpendicular a ambos planos y midiendo la distancia de los puntos de corte de esa perpendicular con los planos

Calcular la distancia entre lo planos P:2x+y-z+2=0 y Q:2x+y-z-6=0

Por el punto (0,0,2) del plano P trazamos una perpendicular $\frac{x}{2} = y = \frac{z-2}{-1}$, que corta al plano Q en el punto $\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$; de donde la distancia entre los planos es:

$$d_{P,Q} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \text{ unid. de long.}$$

También podemos calcular la distancia entre dos planos paralelos normalizando las ecuaciones de los planos y restando los términos normalizados D_N

Calcular la distancia entre lo planos P:2x+y-z+2=0 y Q:2x+y-z-6=0

La ecuación normalizada del plano P es $P_N : \frac{2}{\sqrt{6}x} + \frac{1}{\sqrt{6}} y - \frac{1}{\sqrt{6}} z + \frac{2}{\sqrt{6}} = 0$

La ecuación normalizada del plano Q es $Q_N : \frac{2}{\sqrt{6}x} + \frac{1}{\sqrt{6}} y - \frac{1}{\sqrt{6}} z - \frac{6}{\sqrt{6}} = 0$

Y la distancia entre ambos planos es:

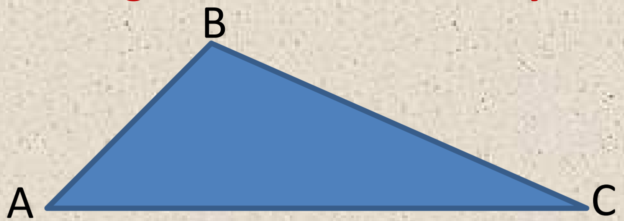
$$d_{P,Q} = \frac{2}{\sqrt{6}} - \left(-\frac{6}{\sqrt{6}} \right) = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \text{ unid. de long.}$$

Áreas

-**Área del rectángulo de vértices A,B,C y D**

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$$

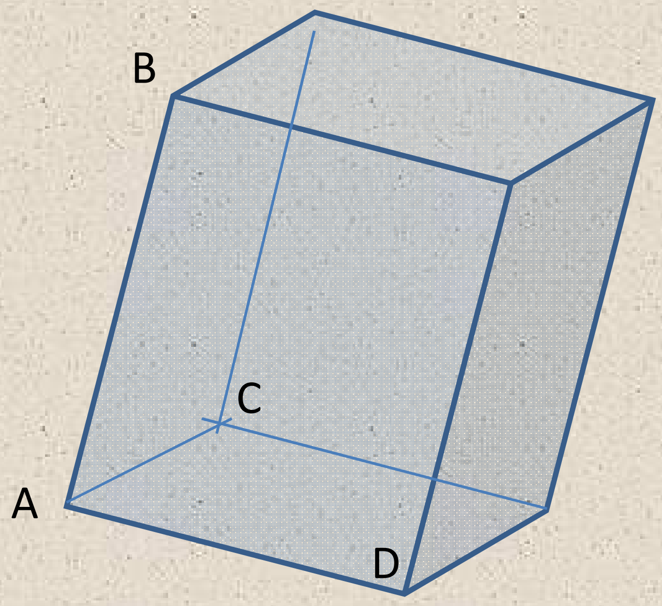
- **Área del triángulo de vértices A,B y C**



$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$$

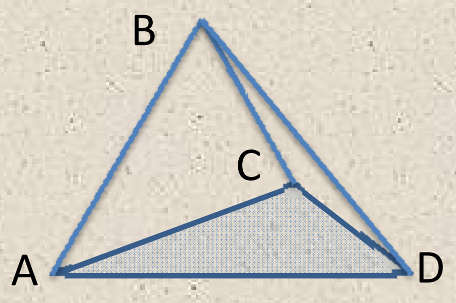
Volúmenes

-Volumen del paralelepípedo:



$$V = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right] \right|$$

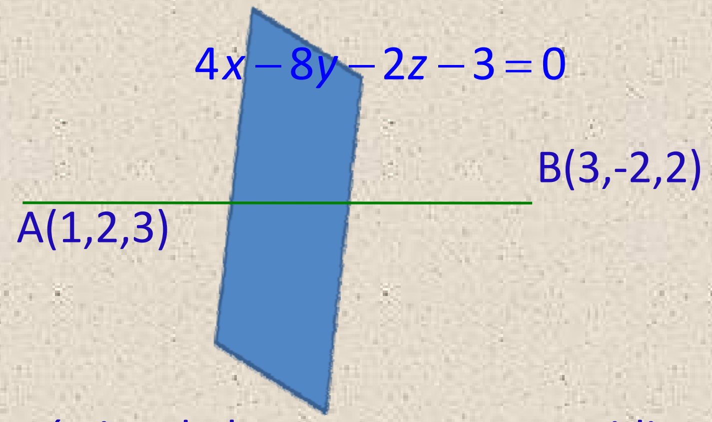
-Volumen del tetraedro:



$$V = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right] \right|$$

Lugares geométricos en el espacio(1)

<u>Plano mediador</u> de un segmento es el plano que es perpendicular a él en su punto medio



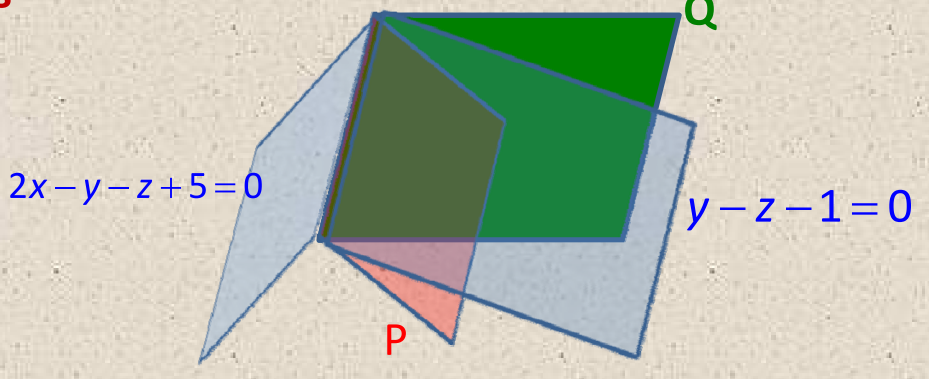
Encontrar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos A(1,2,3) y B(3,-2,2)

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2+(z-2)^2}$$

$$4x-8y-2z-3=0$$

Lugares geométricos en el espacio(2)

<u>Plano bisector</u> de un ángulo diedro es aquel que divide el ángulo en dos ángulos iguales



Encontrar los puntos del espacio que equidistan de los planos P:x-z+2=0 y Q=x-y+3=0

$$\frac{x-z+2}{\pm\sqrt{2}}=\frac{x-y+3}{\mp\sqrt{2}}$$

de donde obtenemos los planos

$$y-z-1=0$$

y

$$2x-y-z+5=0$$

FIN DE TEMA