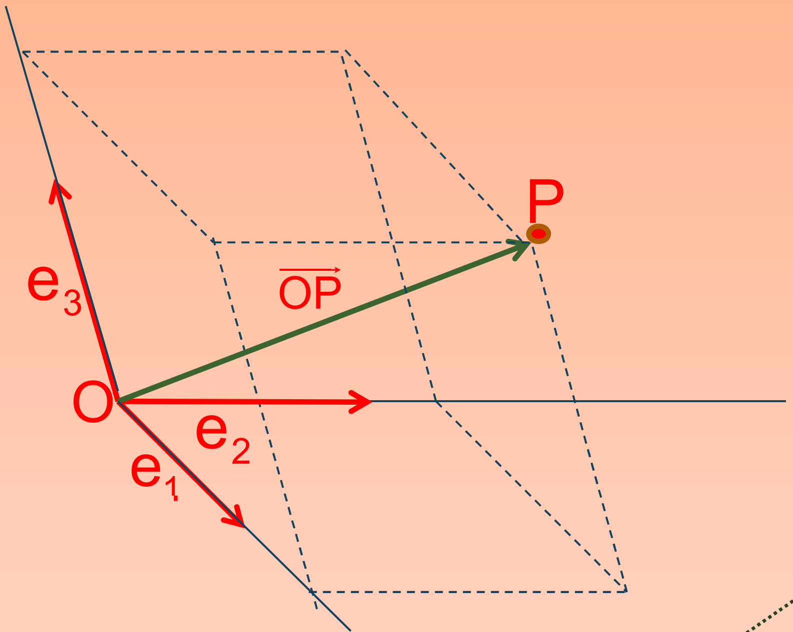
GEOMETRÍA

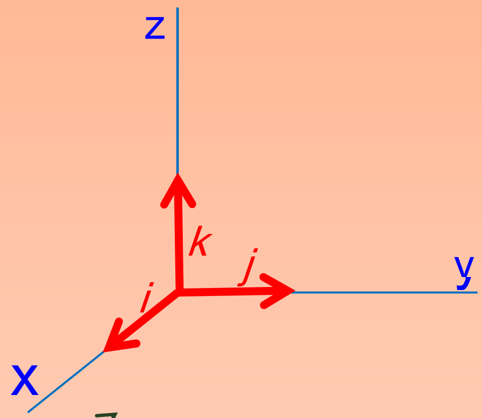
LA RECTA Y EL PLANO EN EL ESPACIO

Puntos en el espacio

Para determinar un punto en el espacio debemos tomar un sistema de referencia y las coordenadas del punto respecto al sistema de referencia elegido

Sabemos que tres vectores e_1, e_2 y e_3, linealmente independiente pueden ser una base de referencia





de forma que cualquier punto P ,al unirlo con el origen O, determina el vector $\overrightarrow{OP}$, que pede escribirse como combinación lineal de los vectores de la base.

$$\overrightarrow{OP} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

Luego , elegida una base de referencia, a cada punto del espacio , E_3 , le corresponde un vector de V_3 , y a cada vector le corresponden unas coordenadas de R^3 ,de donde a cada punto le corresponden unas coordenadas de R^3

$$\overrightarrow{OP} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = [x_1, x_2, x_3]$$

$$\Downarrow$$

$$P = (x_1, x_2, x_3)$$

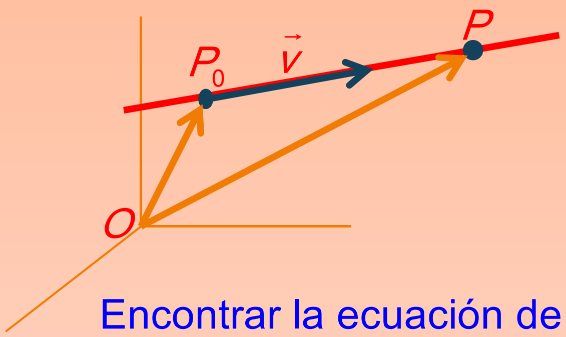
En la práctica emplearemos una base <u>ortonormal</u> como base de referencia

ECUACIONES DE LA RECTA

Dado que una recta es un conjunto de puntos que mantienen la misma dirección , y un punto queda determinado por por las tres coordenadas del vector que lo une con el origen, una recta queda determinada por la ecuación cuyas soluciones son los puntos de la recta

a) Ecuación vectorial de la recta:

Una recta queda determinada si conocemos un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de la misma, y un vector $\vec{v} = ai + bj + ck$, que marca la dirección de los puntos de la recta



Si $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera de la recta, se cumple:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{v}$$ o lo que es lo mismo

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)}$$

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,-1,3)$ y tiene la dirección del vector director $\vec{w} = 2i + 2j - k$

$$(x, y, z) = (2,-1,3) + \lambda(2,2,-1)$$

¿Cómo podemos encontrar puntos de la recta anterior? Dando valores al parámetro λ

Encontrar el punto de la recta anterior en que se anula la coordenada "x"

$$(0, y, z) = (2,-1,3) + \lambda(2,2,-1) \Rightarrow 0 = 2 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 + 2(-1) = -3 \\ z = 3 - 1(-1) = 4 \end{cases} \Rightarrow (0,-3,4)$$

¿Pertenece el punto $(1,-3,2)$ a la recta anterior?

No $\Leftrightarrow (1,-3,2) \neq (2,-1,3) + \lambda(2,2,-1)$ pues el sistema $\begin{cases} 1 = 2 + 2\lambda \\ -3 = -1 + 2\lambda \\ 2 = 3 - \lambda \end{cases}$ es incompatible

b) Ecuación paramétrica de la recta

La forma paramétrica de la ecuación de la recta la obtenemos separando las tres coordenadas en la ecuación vectorial

$$(x,y,z)=(x_o,y_0,z_0)+\lambda(a,b,c)\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=x_0+a\lambda \\ y=y_0+b\lambda \\ z=z_0+c\lambda \end{cases}}$$

La ecuación paramétrica de la recta cuyo vector director es $\vec{w}=[2,2,-1]$ y pasa por $(2,-1,3)$, es

$$r:\begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}$$

c) Ecuación continua de la recta

La forma continua de la ecuación de la recta la obtenemos eliminando el parámetro en la ecuación paramétrica

$$\begin{cases} x=x_0+a\lambda \\ y=y_0+b\lambda \\ z=z_0+c\lambda \end{cases}\Rightarrow \boxed{\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}}$$

Escribir la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos A$(2,-1,1)$ y B$(0,-2\ ,5)$

Vector director $\overrightarrow{AB}=\left[(0,-2,5)-(2,-1,1)\right]=[-2,-1,4]$

ecuación continua: $r:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-5}{4}$ ó $r:\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$

d) Ecuación implícita de la recta

La forma implícita de la ecuación de la recta la podemos obtener a partir de la ecuación continua

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}\\[2mm]\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z=D_1\\A_2x+B_2y+C_2z=D_2\end{cases}}\quad \text{donde } A_1,B_1,C_1,D_1\in\Re$$

Escontrar la ecuación implícita de la recta: $r:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{3-y}{3}=z+2$

$$\begin{cases}\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{3-y}{3}\Rightarrow 3x-9=6-2y\Rightarrow 3x+2y=15\\[2mm]\dfrac{x-3}{2}=z+2\Rightarrow x-3=2z+4\Rightarrow x-2z=7\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}3x+2y=15\\x-2z=7\end{cases}$$

Escribir en forma paramétrica y en forma continua la recta $s:\begin{cases}2x-y+z=1\\x-y-2z=2\end{cases}$ e indicar cuál es su vector director

$$\begin{cases}2x-y+z=1\\x-y-2z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=1-z\\x-y=2+2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1-3z\\y=-3-5z\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}x=-1-3\lambda\\y=-3-5\lambda\\z=\lambda\end{cases}$$

Despejando el parámetro en la ecuación paramétrica:

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{x+1}{-3}\\[2mm]\lambda=\dfrac{y+3}{-5}\\[2mm]\lambda=z\end{cases}\Leftrightarrow s:\frac{x+1}{-3}=\frac{y+3}{-5}=z$$

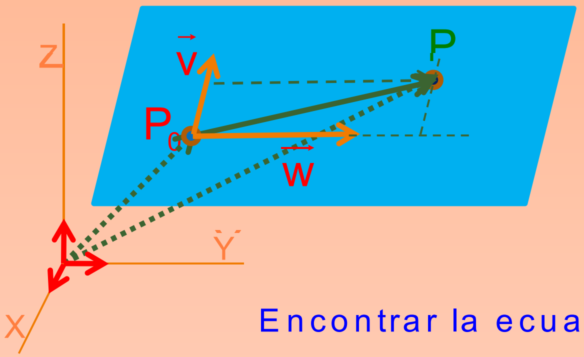
y el vector director es $(-3i-5j+k)$

ó $(3i+5j-k)$

ECUACIONES DEL PLANO **Para desplazar un punto por un plano necesitamos dos direcciones:**

a) Ecuación vectorial del plano

Un plano queda determinado si conocemos un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y dos direcciones indicadas por dos vectores $\vec{v} = a_1 i + b_1 j + c_1 k$ y $\vec{w} = a_2 i + b_2 j + c_2 k$



Sea $P(x,y,z)$ un punto genérico del plano, se cumple:

$$\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$$ o lo que es lo mismo:

$$\boxed{(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a_1, b_1, c_1) + \mu(a_2, b_2, c_2)}$$

Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto $(2,0,5)$ y contiene los vectores $2i - j + 3k$ y $2j - k$

$$(x,y,z) = (2,0,5) + (2,-1,3)\lambda + (0,2,-1)\mu$$

Determinar si los puntos A $(-7,5,1)$ y B $(-3,0,2)$ están en el plano

$$(x,y,z) = (1,1,-1) + \lambda(1,-2,1) + \mu(-3,0,2)$$

El punto A está en el plano porque

$$(-7,5,1) = (1,1,-1) + \lambda(1,-2,1) + \mu(-3,0,2) \Leftrightarrow \begin{cases} -7 = 1 + \lambda - 3\mu \\ 5 = 1 - 2\lambda \\ 1 = -1 + \lambda + 2\mu \end{cases}$$ es compatible determinado

El punto no B está en el plano porque

$$(3,-3,2) = (1,1,-1) + \lambda(1,-2,1) + \mu(-3,0,2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 1 + \lambda - 3\mu \\ -3 = 1 - 2\lambda \\ 2 = -1 + \lambda + 2\mu \end{cases}$$ es incompatible

b) Ecuación paramétrica del plano

La ecuación paramétrica del plano la obtenemos separando las tres coordenadas de la ecuación vectorial

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(a_1,b_1,c_1)+\mu(a_2,b_2,c_2)\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=x_0+a_1\lambda+a_2\mu \\ y=y_0+b_1\lambda+b_2\mu \\ z=z_0+c_1\lambda+c_2\mu \end{cases}}$$

La ecuación paramética del plano π que contiene los puntos $A(1,1,3)$, $B(0,-2,1)$ y el vector $\vec{a}=i-j+2k$ es:

El vector $\overrightarrow{AB}=(-1,-3,-2)$ está en el plano, luego : $\pi:\begin{cases} x=1+\alpha-\beta \\ y=1-\alpha-3\beta \\ z=3+2\alpha-2\beta \end{cases}$ ó $\pi:\begin{cases} x=\alpha-\beta \\ y=-2-\alpha-3\beta \\ z=1+2\alpha-2\beta \end{cases}$

c) Ecuación general o implícita del plano

La ecuación general del plano la obtenemos eliminando los parámetros en la ecuación paramétrica

Ecuación general del plano

$$Rango\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}=2\Rightarrow \boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 & a_2 \\ y-y_0 & b_1 & b_2 \\ z-z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}=0} \xrightarrow{\text{DESARROLLANDO EL DETERMINAnTE}} \boxed{Ax+By+Cz+D=0}$$

Encontrar la ecuación general del plano que pasa el punto (1,2,-1) y contiene a los vectores $2i-j-k$ y $3i+2j-2k$

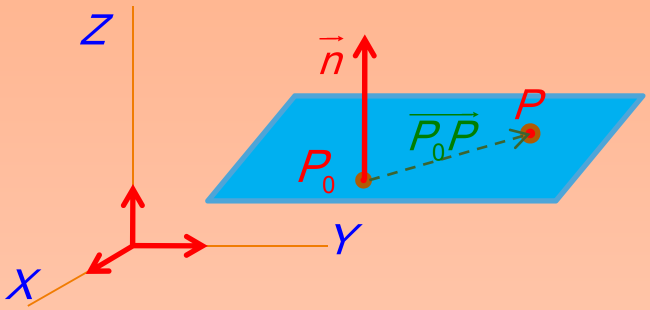
Ecuación general

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ y-2 & -1 & 2 \\ z+1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 4x+y+7z+1=0$$

Ecuación implícita

d) Ecuación normal del plano

Mientras que para las formas anteriores de la ecuación del plano hemos empleado puntos y vectores del plano, para encontrar la ecuación normal necesitamos un vector normal al plano y un punto de este



Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto conocido del plano

y tomamos el vector $\vec{n} = Ai + Bj + Ck$ perpendicular al plano

Para cualquier punto $P(x, y, z)$ del plano se cumple

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P} = 0 \Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

que al desarrolar nos queda en la forma $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$

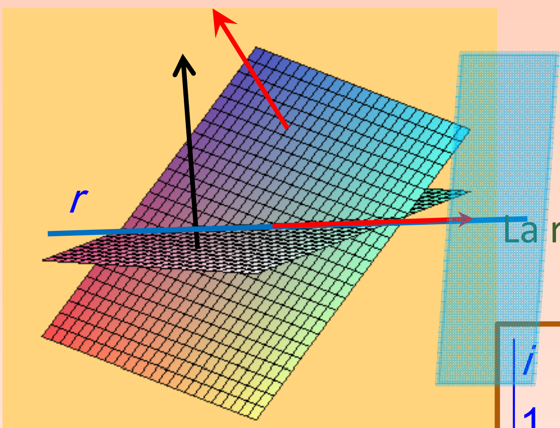
Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1,1,-3)$ y es perpendicular a la recta $r: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{2-z}{5}$

$$3(x-1)+2(y-1)-5(z+3)=0 \Rightarrow 3x+2y-5z-20=0$$

RECTA DELIMITADA POR DOS PLANOS:

Dos planos no paralelos delimitan una recta

$$\boxed{r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}}$$



Encontrar la ecuación del plano que es perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x+2y-z+3=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases}$ y pasa por el punto $(1,1,-2)$

La recta *r* es perpendicular a los vectores normales de los planos que la definen

Vector de la recta *r*

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i - 3j - 5k \left\{ \begin{array}{l} \text{vector} \\ \text{normal} \\ \text{al plano} \end{array} \right\}$$

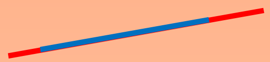
Ecuación del plano

$$x - 3y - 5z + D = 0 \xrightarrow[\text{por }(1,1,-2)]{\text{Debe pasar}} D = -8$$

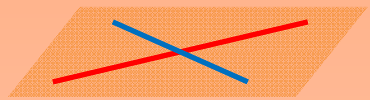
$$\Downarrow$$

$$\boxed{x - 3y + 5z - 8 = 0}$$

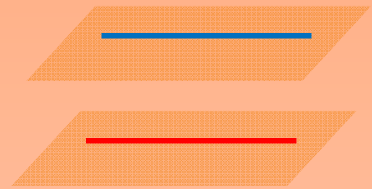
POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS En el espacio, dos rectas pueden situarse como:



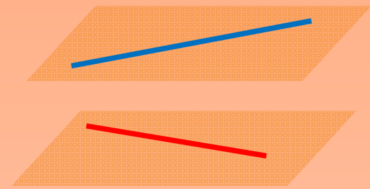
coincidentes



secantes

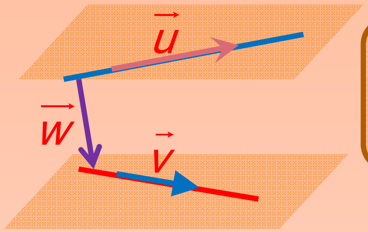


paralelas



cruzarse

Para estudiar la posición relativa de dos rectas manejamos tres vectores: uno de una recta, $\vec{u}$, otro de la otra, $\vec{v}$ y un tercer vector, $\vec{w}$,uniendo puntos de cada recta.



coincidentes	**paralelas**	**secantes**	**se cruzan**
$Rango(\vec{u},\vec{v}) = 1$	$Rango(\vec{u},\vec{v}) = 1$	$Rango(\vec{u},\vec{v}) = 2$	$Rango(\vec{u},\vec{v}) = 2$
$Rango(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 1$	$Rango(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 2$	$Rango(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 2$	$Rango(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 3$

Estudiar la posición relativa de las rectas $r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 3 - \mu \\ y = \mu \\ z = 2 + \mu \end{cases}$

Tomamos los vectores $\vec{r} = [3, -1.1]$, $\vec{s} = [-1,1,1]$ y $\vec{w} = [(3,0,2) - (2,1,1)] = [1,-1,1]$

$$Rango(\vec{r},\vec{s}) = Rango\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \ , \ Rango(\vec{r},\vec{s},\vec{w}) = Rango\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Las dos rectas se cruzan en el espacio

POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS (ejemplo)

Estudiar la posición relativa de las rctas $r:\begin{cases}3x+2y-z=5\\ x-y+z=3\end{cases}$ y $s:\begin{cases}3x+7y-5z=1\\ 2x-y+z=2\end{cases}$

(en muchos problemas de geometría se pueden emplear varias formas para encontrar la solución)

a) Buscamos el vector director de cada recta y otro vector que una dos puntos de la recta

$$r:\begin{cases}\vec{r}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=[1,-4-,5]\\ P_r=\left\{\begin{matrix} y=0\\ \begin{cases}3x-z=5\\ x+z=3\end{cases}\end{matrix}\right\}=(2,0,1)\end{cases}$$

$$s:\begin{cases}\vec{s}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & 7 & -5\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=[2,-13,-17]\\ P_s=\left\{\begin{matrix} z=-1\\ \begin{cases}3x+7y=-4\\ 2x-y=3\end{cases}\end{matrix}\right\}=(1,-1,-1)\end{cases}$$

$$Rang\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -4 & -13 & 1\\ -5 & -17 & 2\end{pmatrix}=2=Rang\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & -13\\ -5 & -17\end{pmatrix}=2$$

los tres vectores están en el mismo plano

y

las dos rectas se cortan en un punto

b) Otra forma de plantear el problema podría ser el estudiar la compatibilidad del sistema:

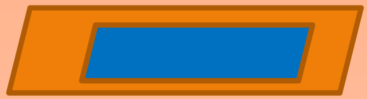
$$\begin{cases}3x+2y-z=5\\ x-y+z=3\\ 3x+7y-5z=1\\ 2x-y+z=2\end{cases}$$

$$Rang\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & 5\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 3 & 7 & -5 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}=3\Rightarrow \text{compatible y determinado}$$

luego las dos rectas se cortan en un punto

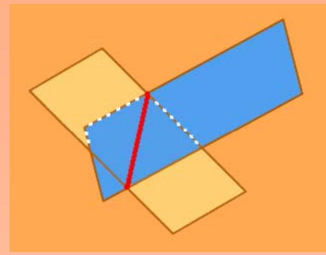
POSICIÓN RELATIVA DE DOS PLANOS

En el espacio, dos planos pueden ser:



coincidentes

paralelos



secantes

Sean los planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_{12} = 0$

Si $Rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$ Planos coincidentes

Si $Rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$ y $Rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ Planos paralelos

Si $Rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$ y $Rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ Planos secantes

Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de planos

$p: \; -6x + 9y + 18z = -15$

$q: \; 2x - 3y - 6z = 5$

$$Rang\begin{pmatrix} -6 & 9 & 18 & -15 \\ 2 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix} = 1$$

$\Downarrow$

planos coincidentes

$m: \; 2x - 3y + 2z = 8$

$n: \; 4x - 6y + 4z = 10$

Sistema incompatible

$\Downarrow$

planos paralelos

$h: \; 3x - 2y + z = 5$

$k: \; 5x - y - z = 1$

$$Rang\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$\Downarrow$

Planos secantes que se cortan en una recta

Posición relativa de dos planos (ejemplos)

Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta \\ y = 1 - \alpha \\ z = 1 - \alpha - \beta \end{cases}$ y $\pi_2: \begin{cases} x = -1 - \lambda + 2\mu \\ y = 3 + \lambda - \mu \\ z = 1 - \mu \end{cases}$

Buscamos los vectores normales a ambos planos:

$$\vec{\pi_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = [1, 1, 1] \qquad \vec{\pi_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = [-1, -1, -1]$$

ambos planos tienen el mismo vector normal luego serán paralelos o coincidentes

como el punto $(-1,3,1)$ de π_2, está en π_1 pues $\begin{cases} -1 = 1 + 2\alpha + \beta \\ 3 = 1 - \alpha \\ 1 = 1 - \alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$

ambos planos son coincidentes

Estudiar la posición relativa de los planos $p: 2x + 3y - z + 1 = 0$ y $q: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda - 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$

Los dos planos se cortan en la recta : $\begin{cases} 2x + 3y - z + 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$

$$q: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda - 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 2 & 3 & -2 \\ y - 1 & -1 & -1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y + z - 1 = 0$$

Estudiar la posición relativa del plano P, que contiene los puntos $(1,1,1)$, $(-2,1,4)$ y $(-1,-1,5)$, y el plano Q, que contiene los puntos $(0,2,-1)$, $(3,1,-3)$ y $(1,1,-1)$

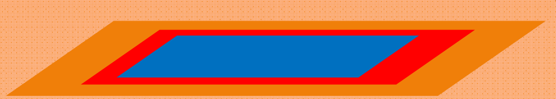
$$P: \begin{vmatrix} x - 1 & -3 & -2 \\ y - 1 & 0 & -2 \\ z - 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + + y + z - 3 = 0 \qquad Q: \begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ y - 2 & -1 & 1 \\ z + 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0$$

se trata de dos planos paralelos

POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANOS

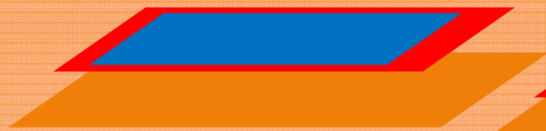
Para analizar la situación relativa de tres planos resulta conveniente escribir sus ecuaciones generales

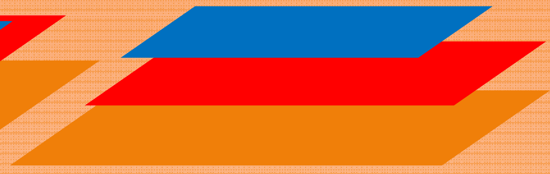
$$\begin{aligned}\pi_1&: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2&: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\\ \pi_3&: A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0\end{aligned} \xrightarrow{\text{CONSIDERAMOS LAS MATRICES}} A=\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{pmatrix} \text{ Y } AD=\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\end{pmatrix}$$



$Rang(A)=1 \quad Rang(AD)=1$

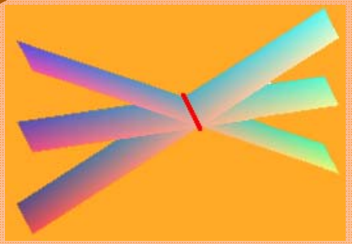
coincidentes

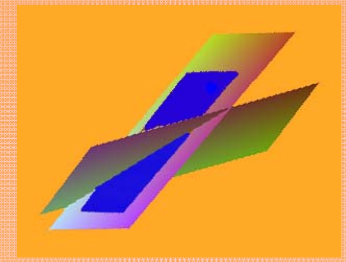




$Rang(A)=1$ y $Rang(AD)=2$

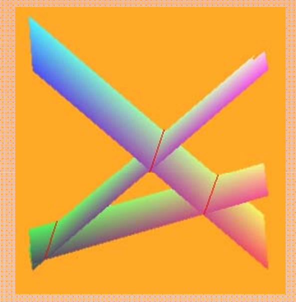
Dos coinciden y otro paralelo; o tres paralelos

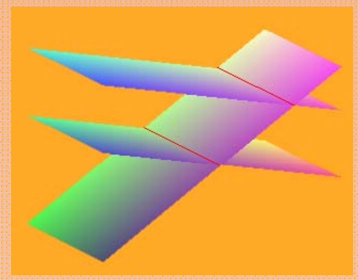




$Rang(A)=2$ y $Rang(AD)=2$

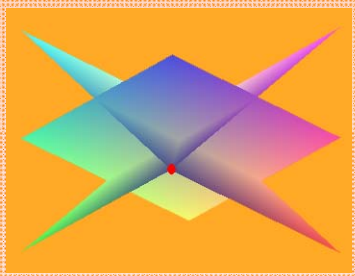
Definen una recta como intersección de los tres planos; o dos coinciden y el otro corta





$Rang(A)=2$ y $Rang(AD)=3$

Los planos se cortan dos a dos; o dos son paralelos y el otro corta



$Rang(A)=3$ y $Rang(AD)=3$

Los planos se cortan en un punto

POSICIÓN RELATIVA DE UNA RECTA Y UN PLANO

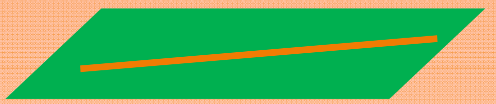
Una recta y una plano pueden coincidir, ser paralelos o bien cortarse

Si escribimos la ecuación de la recta en forma paramétrica y el plano en forma general obtenemos una ecuación cuya incógnita es el parámetro; del análisis de la posible solución deducimos la situación de la recta y el plano

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(x_0 + \lambda a) + B(y_0 + \lambda b) + C(z_0 + \lambda c) + D = 0$$

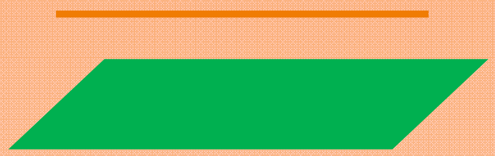
$$\Downarrow$$

$$m\,\lambda = n$$



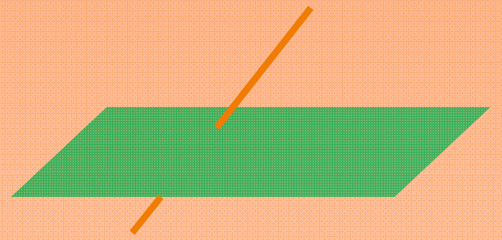
Si $m = 0$ y $n = 0$

coincidentes



Si $m = 0$ y $n \neq 0$

la recta es paralela al plano



Si $m \neq 0$ y $n =$ cualquier número

la recta corta al plano

Estudiar la posición relativa de la recta $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{2-y}{2} = z$ y el plano $p: x + 2y - 3z + 2 = 0$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2} = z = \lambda \xrightarrow{\text{Sustituyendo en } p} (1 + 3\lambda) + 2(2 - 2\lambda) - 3(\lambda) + 2 = 0 \Rightarrow 4\lambda = 7$$

La recta y el plano son secantes

Estudiar la psoición relativa de la recta $s: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -\mu \\ z = 4 \end{cases}$ y el plano $x + y + z - 5 = 0$

$$(1 + \mu) + (-\mu) + (4) - 5 = 0 \Rightarrow 0\,\mu = 0$$

La recta está en el plano

FIN

DEL

TEMA