Aplicaciones de las Derivadas

1,.Calcular las ecuaciones de la tangente y de la normal a la parábola $y = 3x^2 - 6x + 1$ en el punto en que la abscisa es $x = 2$

Solución: Punto de tangencia $\left(2, 3\cdot 2^2 - 6\cdot 2 + 1\right) = (2, 1)$

Tangente........ $y - 1 = y'_{x=2}(x-2) \Rightarrow y - 1 = 6(x-2) \Rightarrow 6x - y - 11 = 0$

Normal.......... $y - 1 = \dfrac{-1}{y'_{x=2}}(x-2) \Rightarrow y - 1 = \dfrac{-1}{6}(x-2) \Rightarrow x + 6y - 8 = 0$

2.- Calcular la ecuación de la tangente y de la normal a la curva $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, en el punto de abscisa $x = 0$

Solución:

El punto de tangencia es $[0, f(0)] = (0, 1)$ y la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto es $f'(0) = -2;$ luego las rectas buscadas son :

Tangente.......... $y - 1 = -2(x - 0) \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$

Normal........... $y - 1 = \dfrac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow x - 2y + 2 = 0$

3.- Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\cos x - senx}{x^3}$

Solución:

Se trata de una indeterminación $\dfrac{0}{0}$, por lo que aplicamos la regla de L´Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - senx}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{-xsenx}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-senx - x\cos x}{6x} \lim_{x \to 0} \frac{-2\cos x}{6} = \frac{1}{3}$$

4.- Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Ln(1+x) - senx}{x\cdot senx}$

Solución:

Al intentar resolverlo nos aparece la indeterminación $\dfrac{0}{0}$, luego:

$$\lim_{x \to 0} \frac{Ln(1+x) - senx}{x\cdot senx} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{senx + x\cos x}$$ que sigue dando una indeterminación $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{Ln(1+x) - senx}{x\cdot senx} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{senx + x\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + senx}{\cos x + \cos x - xsenx} = -\frac{1}{2}$$

5.- Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Lnx}{LnSenx}$

Solución:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Lnx}{LnSenx} = \dfrac{-\infty}{-\infty}$; así pues aplicamos la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{Lnx}{LnSenx} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{senx}} = \lim_{x \to 0} \frac{senx}{x\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{cpsx - xsenx} = 1$$

53809

6.- Calcular el siguiente límite $\underset{x\to 0}{Lim}\ \dfrac{arc\ senx}{tgx}$

Solución:

Se trata de una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, luego...

$$\underset{x\to 0}{Lim}\ \frac{arc\ senx}{tgx} = \underset{x\to 0}{Lim}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1} = 1$$

7.- Estudiar las zonas de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión de la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

Solución:

$y' = 3x^2 - 6x - 9$ se anula para $x_1 = -1$ y para $x = 3$;

En el intervalo $(-\infty,-1)$ la función es creciente ya que $y' > 0$

En el intervalo $(-1,3)$, la función es decreciente, pues $y' < 0$

En el intervalo $(3,\infty)$, la función vuelve a ser creciente

Por todo ello, el punto $\left(-1,(-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1)+1\right) = (-1,6)$ es un máximo, mientras que el punto de abscisa 3, $(3,-26)$ es un mínimo.

$y'' = 6x - 9$ se anula para $x = \dfrac{3}{2}$, luego

el intervalo $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$ es de concavidad negativa o convexa ,pues $y'' < 0$, mientras que el intervalo $\left(\dfrac{3}{2},\infty\right)$ es de concavidad positiva o cóncava.

Por todo ello el punto $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{127}{8}\right)$ es un punto de inflexión.

8.- Representar gráficamente la función $y = \dfrac{x^2-6}{x-2}$

Solución:

-<u>campo de existencia</u> : la función existe para $\forall x \mid x \in \Re - \{2\}$

-<u>simetrías</u> : $f(-x) \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases} \Rightarrow$ no hay simetrías

-<u>asíntotas:</u>

-<u>horizontales:</u> $\underset{x\to\infty}{Lim}\ f(x) = \infty \Rightarrow$ no hay asíntotas horizontales

<u>-verticales</u>: como $x = 2$ hace la función infinito, en ese punto hay asíntota vertical

- <u>posición de la curva respecto a esta asíntota:</u>

$f(2-\varepsilon) > 0$, la función está en la porte positiva del eje de ordenadas

$f(x+\varepsilon) < 0$, la función está en la parte negativa del eje de ordenadas

- <u>oblicuas:</u> $y = mx + n$

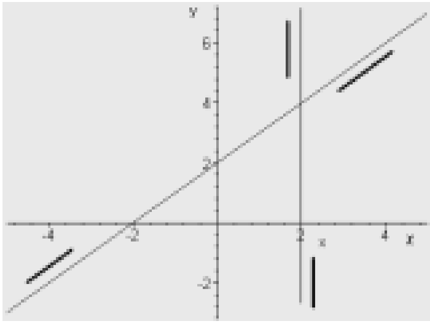
$m = \underset{x\to\infty}{Lím}\dfrac{f(x)}{x} = 1$

$n = \underset{x\to\infty}{Lím}\left(f(x) - 1\cdot x\right) = 2$

de donde $y = x + 2$ es una asíntota oblicua

- <u>posición de la curva respecto a la asíntota oblicua:</u>

$$\frac{x^2-6}{x-2}-(x+2)=\frac{-2}{x-2}\Rightarrow\begin{cases}>0 & \text{si } x<2\Rightarrow \text{la función sobre la asíntota}\\ <0 & \text{si } x>2\Rightarrow \text{la función está bajo la asintota}\end{cases}$$



-<u>corte con los ejes:</u>

$y=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{6}$, luego pasa por $\left(-\sqrt{6},0\right)$ y por $\left(\sqrt{6},0\right)$

$x=0\Rightarrow y=3$, psa también por $(0,3)$

-<u>crecimiento:</u>

como la derivada $y'=\dfrac{x^2-4x+6}{(x-2)^2}$ es positiva para cualquier valor de x , la función es siempre creciente

-<u>máximos y mínimos:</u> dado que y'=0 no tiene soluciones reales, no hay máximos ni mínimos

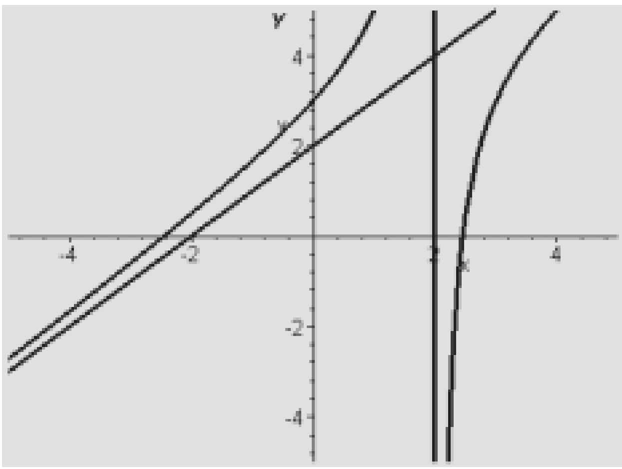
- <u>concavidad:</u>

$y''=\dfrac{-4}{(x-2)^3}$ que no se anula para ningún valor de x, por lo que estudiamos el signo cerca del punto en que no existe esta segunda derevada, $x=2$

$f''(2-\varepsilon)>0\Rightarrow$ concavidad positiva

$f''(2+\varepsilon)<0\Rightarrow$ concavidad negativa

-<u>rapresentación de la función:</u>



9.- Representar la función $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

Solución:

-<u>Dominio</u>: $\Re-\{-1,1\}$

-<u>Simetría</u> Es una función impar, luego es simétrica respecto al origen

-<u>Asíntotas:</u>

-<u>Verticales:</u> $x=-1$ y $x=1$

-<u>Horizontales:</u> no hay

-<u>Oblicuas</u> de la forma $y=mx+n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad n = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - 1\cdot x\right] = 0$$

asi $y = x$ es una sintota oblicua

-<u>Posición respecto de las asintotas:</u>

-<u>respecto a</u> $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

-<u>respecto a</u> $x = -1$

lo mismo que para $x = 1$

-<u>respecto a</u> $y = x$

$$s = \frac{x^3}{x^2-1} - x = \frac{x}{x^2-1} \qquad s > 0 \text{ si } \begin{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1 \\ \quad ó \\ \begin{cases} x > 0 \\ x+1 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1,0) \end{cases}$$

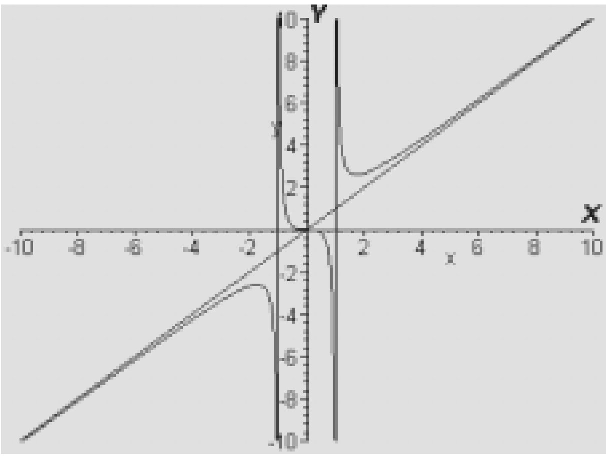
-<u>puntos de máximos y mínimos</u>:

-derivando e igualando a cero obtenemos $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$

-estudiando la variación de la función a ambos lados de esos puntos

$x = 0$ es un punto de inflexión, $x = -\sqrt{3}$ es un máximo relativo, $x = \sqrt{3}$ es un mínimo relativo

-<u>rapresentación de la función:</u>



10.-Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x+3}$

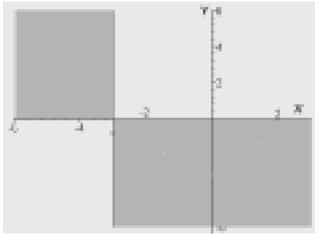
1º Delimitar en un sistema de ejes cartesianos, las regiones en que está definida la función(oscureciendo las que no esté definida)

Solución:

La función no está definida para $x = -3$: por otra parte:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+3} > 0 \Rightarrow x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+3} < 0 \Rightarrow x+3 < 0 \Rightarrow x < -3$$



2º.- ¿Es impar la función? ¿Por qué?

Solución

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{-x+3}=\frac{x^2}{-x+3}\neq\begin{cases}f(x)\\-f(x)\end{cases}$$, luego la función no es par ni impar

3º.-Encontrar las asíntotas

Solución:

-<u>Asíntotas verticales</u>

Si $x\to-3$ entonces $y\to\infty$, luego $x=-3$ es asíntota vertical

-<u>Asíntotas horizontales:</u>

No hay pues no existe el $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

-<u>Asíntotas oblicuas:</u>

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=-3$$

luego $y=x-3$ es una asíntota oblicua

4º.-Estudiar la posición de la gráfica respecto a las asíntotas.

Solución:

-Respecto a $x=-3$

$$\lim_{x\to-3^+} f(x)=-\infty$$

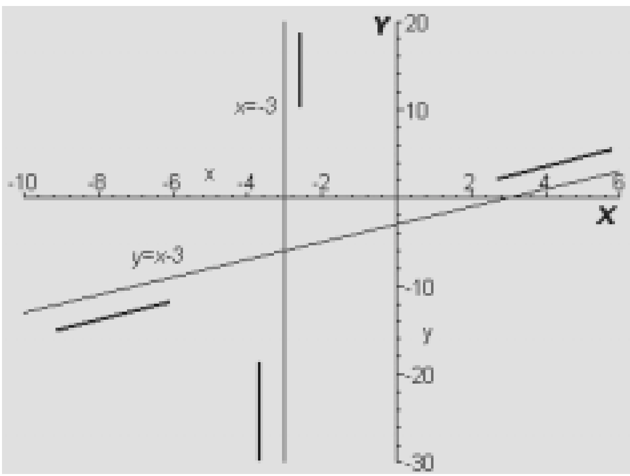
$$\lim_{x\to-3^-} f(x)=+\infty$$

-<u>respecto a</u> $y=x-3$

$$d= f(x)-(x-3)=\frac{9}{x+3}$$

Si $x>-3$ entonces $d>0$

Si $x<-3$ entonces $d<0$



5º.- Determinar los puntos de máximos y de mínimos
Solución:

$$f'(x)=\frac{2x(x+3)-x^2}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2+6x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-6 \end{cases}$$

En $x=0$

$x \to 0^- \quad \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente

$x \to 0^+ \quad \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente

En $x=-6$

$x \to -6^- \quad \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente

$x \to -6^+ \quad \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente

Por todo ellos podemos afirmar que

en $\left(0; \frac{0^2}{0+3}\right)=(0;0)$ hay un mínimo y

en $\left(-6; \frac{(-6)^2}{-6+3}\right)=(-6;-12)$ hay un máximo de la función.

6º.- Estudio de la curvatura
Solución:

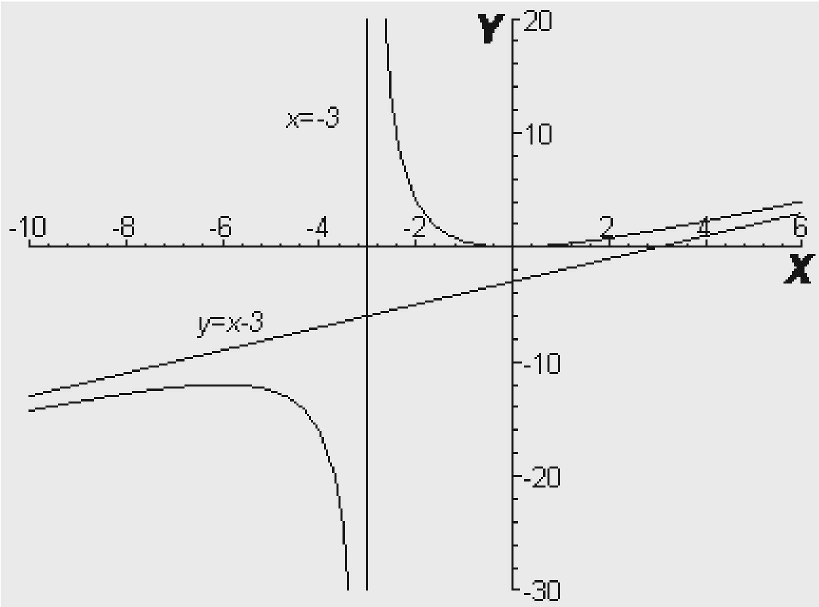
$$f''(x)=\frac{(2x+6)(x+3)^2-2(x+3)(x^2+6x)}{(x+3)^4}=\frac{18}{(x+3)^3}$$

que no se anula para ningún valor de x, luego:

Si $x<-3$ entonces $f''(x)<0$ por lo que tendrá curvatura hacia la parte negativa del las ordenadas

Si $x>-3$ entonces $f''(x)>0$ y su concavidad estará dirigida hacia la parte positiva del eje de ordenadas.

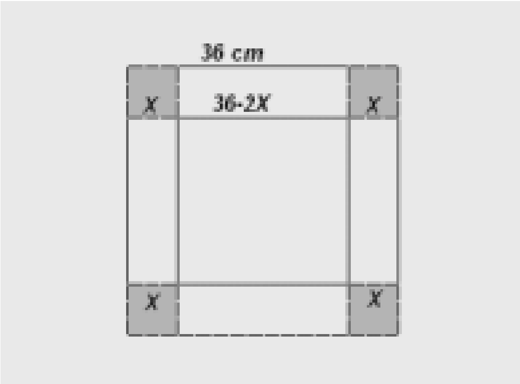
7º,.Representarla gráficamente:
Solución:



11.- Con una cartulina cuadrada de 36 cm de lado queremos construir una caja; para ello cortamos un cuadradillo en cada esquina para poder doblar las solapas,¿Cuánto debe medir el lado del cuadradillo a cortar para que el volumen de la caja sea máximo?

Solución:

Si llamamos x a la longitud del lado del cuadrado a cortar, como indica la figura:



La función a maximizar es

$$V = (36-2x)^2 x$$

de donde:

$V' = 12x^2 - 288x + 1296$ que se anula para $x = 6$ y $x = 18$

Analizando la segunda derivada, vemos que el valor $x = 6$ nos da la valor máximo.

Así pues, deberemos cortar un cuadradillo de 6 cm de lado para obtener una caja de volumen máximo

---

12.- Tenemos un segmento de 236 cm de longitud que dividimos en dos partes, con las que construimos dos rectángulos; el primero tiene una base doble que su altura y el segundo su base es la tercera parte de sus altura..Calcular la longitud de cada corte para que el área de los rectángulos sea mínima.

Solución:

Si llamamos x a la altura del primer rectángulo e y a la base del segundo rectángulo, sus perímetros serán:

primer rectángulo ...... $x + x + 2x + 2x = 6x$

y el segundo rectángulo ...... $y + y + 3y + 3y = 8y$

como dichos perímetros deben sumar la longitud del segmento:

$$6x + 8y = 236$$

De igual forma el área de cada rectángulo es:

primer rectángulo ..... $x \cdot 2x = 2x^2$

y el segundo rectángulo ..... $y \cdot 3y = 3y^2$

y la función a minimizar

$$S = 2x^2 + 3y^2 = 2x^2 + 3\left(\frac{236-6x}{8}\right)^2$$

derivando

$$S' = 4x + \frac{6}{64}(236 - 6x = (-6)$$

e igualando a cero nos da $x = 18$, que es un punto de mínimo ya que su segunda derivada es positiva.

De esta forma loa dos segmentos será, de 108 cm y de 128 cm.

13.-Descomponer un segmento, de 20 m de longitud, en cuatro partes para obtener el paralelogramo de mayor área posible.

Solución:

Si llamamos x e y a los lados del paralelogramo, el área buscada es $S = xy$ y su perímetro $2x + 2y = 20$; luego

$$S = x(10 - x)$$

que derivando e igualando a cero obtenemos $x = 5$. Se trata de un cuadrado de lado 5 m

14.- Una máquina que produce cierto tipo de piezas trabaja cada día 3,5 horas. Sabemos el que el número de piezas fabricadas en cada instante, y , es función del tiempo de funcionamiento t, y está dado por:

$$y = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad t \leq 1 \\ t^3 - 9t^2 + 24t - 15 \qquad \text{si} \quad 1 < t < 4{,}5 \\ 0 \quad \text{si} \quad t \geq 4{,}5 \end{cases}$$

Si el jueves pasado empezó a trabajar a las 10 de la mañana ¿a qué hora se obtuvo la máxima producción? ¿A qué hora la mínima producción?

$$y' = 3t^2 - 18t + 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$y'' = 16t - 18 \Rightarrow \begin{cases} \text{para } t = 2\text{t} \quad y'' < 0 \Rightarrow t = 2 \text{ es un máximo} \\ \text{para } t = 4 \quad y'' > 0 \Rightarrow t = 4 \text{ es un mínimo} \end{cases}$$

De donde deducimos que a las 2 horas de trabajo, es decir a las 12 horas, se obtuvo la máxima producción y a las 2 de la tarde la mínima producción.