9. *DERIVADAS*

9.1. VARIACIÓN DE UNA VARIABLE

Las propiedades estudiadas en los temas anteriores, límites, continuidad, etc., nos aportan información puntual sobre las funciones; pero no nos dicen nada sobre los cambios que experimenta la función al variar la variable independiente.
En este tema abordamos el estudio de la velocidad de cambio de una función, como relación entre el cambio de la función y el cambio de la variable.
Para determinar una medida de la velocidad de cambio de la función en un punto, debemos definir previamente algunos conceptos:
Se llama ***variación o incremento de una variable*** *x, cuando pasa de* $x=x_o$ *a* $x=x_1$*, al valor h dado por*
$h = x_1 - x_1$

En incremento también se puede expresar por Δx

Ejemplo 1.- Determina el incremento de la variable x , cuando pasa de x = -2 a x = -5
$h = -5 - (-2) = -3$

9.2 VARIACIÓN DE UNA FUNCIÓN

De forma similar definimos la variación, o incremento, de una función como la diferencia entre los valores de la función en los puntos dados; es decir:

Se llama variación de la función f(x), cuando x pasa de $x = x_0$ *a* $x = x_1$ *, al valor* Δf *dado por*
$\Delta f = f(x_1) - f(x_o)$
o bien si conocemos el incremento de la variable independiente *h*
$\Delta f = f(x_o + h) - f(x_o)$

Ejemplo 2.- Determina la variación de la función $f(x) = \frac{2x-2}{x}$, cuando x pasa de x = 1 a x = 3

$$\Delta f = f(3) - f(1) = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}$$

O también, dado que *h* = 3 – 1 = 2

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{2(x+h)-2}{x+h} - \frac{2x-2}{x} = \frac{2(1+2)}{1+2} - \frac{2\cdot 1-2}{1} = \frac{4}{3}$$

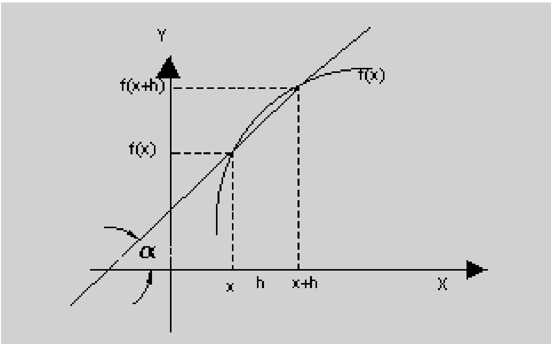
9.3 TASA DE VARIACIÓN MEDIA

En los dos puntos anteriores hemos estudiado como varían las variables dependiente e independiente; pero en muchas situaciones interesa estudiar cómo varia un variable con respecto de la variación de la otra. Podríamos considerar esta relación como una medida de la velocidad de variación.

El valor que nos mide esta relación entre el incremento de la función y el incremento de la variable le llamamos tasa de variación media de la función , es decir:

$$T.V.M. = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Geométricamente, la T.V.M. nos da la pendiente de la recta que une los dos puntos extremos entre los que estudiamos el incremento de la función



ya que $tan\, \alpha = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

La tasa de variación media nos da información aproximada sobre el incremento de la función en el intervalo (x, x+h)

9.4 TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

Observamos que si el incremento de la variable independiente h es muy pequeño, la TVM no da una información más precisa sobre la variación de la función; de ahí que definamos la TVI como el límite de la TVM cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero; es decir:

$$TVI \text{ de } f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

9.5 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Se llama derivada de la función f(x) en el punto x_o al valor de la tasa de variación instantánea en dicho punto, es decir:

$$Derivada \text{ de } f(x) \text{ en } x_0 = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Para designar la derivada en x_0 de *f(x)* se emplean diversas anotaciones:

$y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $D\, f(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$

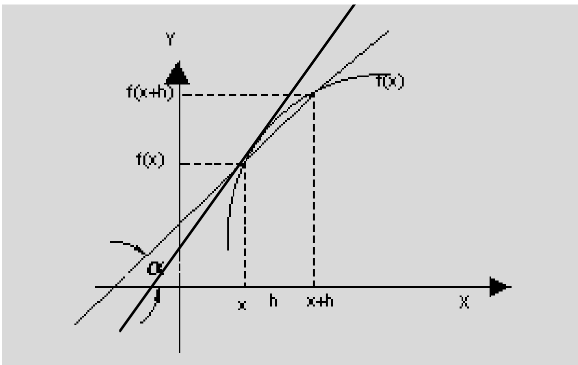
Ejemplo 3.- Encuentra la derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}-1$, en el punto de abscisa x=3

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{3+h}-1\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{3+h}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

9.6 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

En el apartado 3.3 hemos visto que la Tasa de Variación Media la podemos interpretar geométricamente como la tangente trigonométrica del ángulo que forma la cuerda que une los extremos de variación con el eje de abscisas.
Si el incremento de la variable independiente "h" va disminuyendo vemos que la cuerda se va acercando a la tangente, con la que coincidirá en el límite si "h→0", como vemos en la figura



de aquí que la derivada sea la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente geométrica a la curva en el punto x_o

Ejemplo 14. Encuentra la ecuación de la tangente a la curva $y=x^2-3x+1$ en el punto de abscisa x = 2
En el punto de abscisa *x* = 2 la ordenada es *y* = -1, luego la tangente debe tener la forma:

$$y+1=m(x-2)$$

siendo *m* la pendiente de la tangente, que sabemos que es la derivada de la función anterior en el punto en que x=2, luego:

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(2+h)^2-3(2+h)+1\right]-\left[2^2-3\cdot 2+1\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}1+h=1$$

De donde la ecuación de la tangente buscada es: $y+1=1(x-2)\Rightarrow y=x-3$

9.7 DERIVADAS LATERALES

Dado que la derivada de una función en el punto x_0 viene dada por el límite de la tasa de variación cuando $h \to 0$, podemos acercarnos a "0" por la izquierda o por la derecha; de aquí surge de forma natural el concepto de derivada lateral:

La derivada lateral por la izquierda de una función f en el punto x_o, es:

$$f_-{}'(x_o) = \underset{h\to 0^-}{Lím} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

y de la misma forma

La derivada lateral por la derecha de una función f en el punto x_o, es:

$$f_+{}'(x_o) = \underset{h\to 0^+}{Lím} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

Ejemplo 5. Encuentra, en el punto $x = 0$, las derivadas laterales de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x<0 \\ 1-2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

La derivada lateral por la izquierda en $x = 0$ será:

$$f_-{}'(0) = \underset{h\to 0^-}{Lím} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \underset{h\to 0^-}{Lím} \frac{(h^2+1)-1}{h} \underset{h\to 0^-}{Lím}\, h = 0$$

Y la derivada lateral por la derecha en $x = 0$ será

$$f_+{}'(0) = \underset{h\to 0^+}{Lím} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \underset{h\to 0^+}{Lím} \frac{(1-2h)-1}{h} \underset{h\to 0^+}{Lím} -2 = -2$$

Vemos que ambas derivadas no coinciden, por lo tanto no podemos trazar un tangente a la gráfica en el punto $x = 0$

9.8. CONDICIÓN DE DERIVABILIDAD

Por todo lo visto anteriormente, para que una función sea derivable en un punto deben existir la derivadas laterales y éstas ser iguales.

Así en el ejemplo 16 , la función no es derivable en el punto *x = 0,* ya que las derivadas laterales en dicho punto son distintas.

9.9 DERIVACIÓN Y CONTINUIDAD

Si f(x) tiene derivada en x_o, entonces f(x) es continua en dicho punto

En efecto: Si existe $f'(x_0)$

$$f(x_0+h)-f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h$$, y tomando límites cuando $h \to 0$

$$\underset{h\to 0}{Lím}\, f(x_0+h)-f(x_0) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h = f'(x_0) \underset{h\to 0}{Lím}\, h = 0$$

luego $\underset{h\to 0}{Lím}\ f(x_0+h) = \underset{h\to 0}{Lím}\ f(x_0) = f(x_0)$; de donde la función es continua en x_0

Por lo tanto para que una función sea derivable en un punto tiene que ser continua en dicho punto. Ahora bien, una función puede ser continua y no ser derivable
De esta forma, y la vista de los puntos 3.8 y 3.9 , para que una función sea derivable en un punto deben cumplirse las dos condiciones siguientes:

1º.-La función debe ser continua en ese punto
2º.-Las derivadas laterales en ese punto deben coincidir.

Ejercicio 6.- Estudia, en *x* = *3,* la derivabilidad de la función $f(x) = |x-3|$

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si} \quad x<3 \\ \text{x - 3} & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

En el punto *x* = *3*

$$\underset{x\to 3}{Lim}\ f(x) = \begin{cases} \underset{x\to 3^-}{Lim}(-x+3) = 0 \\ \underset{x\to 3^+}{Lim}(x-3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \underset{x\to 3}{Lim}\ f(x) = 0 = f(3)$$, luego la función es continua en *x*= *3*

$$f'(3) = \begin{cases} \underset{h\to 0^-}{Lím}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \underset{h\to 0^-}{Lím}\dfrac{\left[-\left(3+h\right)+3\right]-\left(-3+3\right)}{h} = -1 \\ \underset{h\to 0^+}{Lím}\dfrac{f(3+h)-f(x)}{h} = \underset{h\to 0^-}{Lím}\dfrac{\left[\left(3+h\right)-3\right]-\left(3-3\right)}{h} = 1 \end{cases}$$

luego al ser las derivadas laterales distintas, la función no es derivable en *x* = *3*

Ejemplo 7**.** Calcula derivada de la función $\begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x<1 \\ 2x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ en *x* = 1

En x = *1*

$$\underset{x\to 1}{Lím}\ f(x) = \begin{cases} \underset{x\to 1^-}{Lím}\ (x^2+1) = 2 \\ \underset{x\to 1^+}{Lím}\ 2x = 2 \end{cases} \Rightarrow \underset{x\to 1}{Lím}\ f(x) = 2 = f(1)$$

Por lo tanto la función es continua en *x* = 1. Pasamos a calcular su derivada en ese punto

$$f'(1)=\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\left[(x+h)^2+1\right]-\left[x^2+1\right]}{h}=2 \\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\left[2(x+h)\right]-\left[2x\right]}{h}=2 \end{cases} \Rightarrow f'(1)=2$$

9.10 FUNCIÓN DERIVADA

La derivada de una función hace corresponder a cada valor x_o de la variable independiente un valor *f´(x$_o$)*, por tanto podemos definir la función *f´(x)* que haga corresponder a cada x_o el valor de la derivada en dicho punto.

Ejemplo 8. Encuentra la función derivada de la función $f(x)=x^2+2x-3$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^2+2(x+h)-3\right]-\left[x^2+2x-3\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+2h}{h}=2x+2$$

A la función derivada de una función le llamaremos simplemente *derivada de la función*

9.11 REGLAS DE DERIVACIÓN

Aunque el procedimiento seguido en el punto anterior es válido para encontrar la derivada, el conocimiento de las reglas de derivación nos permite agilizar el cálculo.

9.11.1 Derivada de la función obtenida al operar con funciones:

a) Derivada de la suma de funciones

Si f y g son dos funciones derivables, la derivada de la función suma se obtiene sumando las derivadas de las funciones:

$$\left[f(x)+g(x)\right]' = f'(x)+g'(x)$$

En efecto:

$$\left[f(x)+g(x)\right]' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+$$
$$+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}= f'(x)+g'(x)$$

b) Derivada de una constante por una función

La derivada de una constante por una función derivable es igual a la constante por la derivada de la función:

$$\left[k\cdot f(x)\right]' = k\cdot f'(x)$$ En efecto:

$$\left[k\cdot f(x)\right]' = \lim_{h\to 0}\frac{k(f(x+h)-kf(x)}{h}=k\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}k\cdot f'(x)$$

c) Derivada del producto de dos funciones

La derivada del producto de dos funciones derivables es igual a la derivada de la primera por la segunda sin derivar, más la primera sin derivar por la derivada de la segunda:

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

En efecto

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = \underset{h\to 0}{Lím}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \underset{h\to 0}{Lím}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} =$$

$$= \underset{h\to 0}{Lím}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \underset{h\to 0}{Lím}\frac{f(x)\cdot g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

d)Derivada del cociente de dos funciones

La derivada del cociente de dos funciones derivables es igual a la derivada del numerador por el denominar sin derivar, menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, y todo ello dividido por el cuadrado del denominador:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

En efecto:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \underset{h\to 0}{Lím}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \underset{h\to 0}{Lím}\frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)} =$$

$$= \underset{h\to 0}{Lím}\frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)} =$$

$$= \underset{h\to 0}{Lím}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}\left[\underset{h\to 0}{Lím}\frac{g(x)\left[f(x+h) - f(x)\right]}{h} - \underset{h\to 0}{Lím}\frac{f(x)\left[g(x+h) - g(x)\right]}{h}\right] =$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

e)Derivada de la función compuesta de dos funciones

La derivada de una función compuesta de dos funciones derivables es igual a la derivada de la primera por la derivada de la segunda, cada una con su correspondiente variable:

$$\left(f[g(x)]\right)' = \left(f'[g(x)]\right)\cdot g'(x)$$

Ya que:

$$\left(f\left[g(x)\right]\right)' = \underset{h\to 0}{Lím}\frac{f\left[g(x+h)\right]-f\left[g(x)\right]}{h} = \underset{h\to 0}{Lím}\frac{f\left[g(x+h)\right]-f\left[g(x)\right]}{h}\cdot\frac{\mathrm{g(x+h)\text{-}g(x)}}{g(x+h)-g(x)} =$$

$$= \underset{h\to 0}{Lím}\frac{f\left[g(x+h)\right]-f\left[g(x)\right]}{g(x+h)-g(x)}\cdot\underset{h\to 0}{Lím}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'\left[g(x)\right]\cdot g'(x)$$

A la regla para derivar funciones compuestas se le llama también **Regla de la cadena.**

9.11.2 Derivadas de las funciones elementales

a) **Derivada de la función constante** $f(x)=k$

La derivada de la función constante es cero.

$$f(x)=k \iff f'(x)=0$$

Demostración: $$f'(x)=\underset{h\to 0}{Lím}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{k-k}{h}=0$$

b) Derivada de la función identidad $f(x)=x$

La derivada de la función identidad es uno.

$$f(x)=x \iff f'(x)=1$$

Demostración: $$f'(x)=\underset{h\to 0}{Lím}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\underset{h\to 0}{Lím}\frac{x+h-x}{h}=1$$

c) Derivada de la función potencial $f(x)=x^n$

La derivada de la función potencial es igual al exponente por la base elevada al exponente menos uno

$$f(x)=x^n \iff f'(x)=nx^{n-1}$$

Demostración:

$$f'(x)=\underset{h\to 0}{Lím}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\underset{h\to 0}{Lím}\frac{x^n+nx^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n-x^n}{h}=nx^{n-1}$$

d) **Derivada de la función logarítmica** $f(x)=Ln\,x$

La derivada de la función logarítmica es igual a $\frac{1}{x}$

$$f(x) = Ln\, x \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Demostración:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{Ln(x+h) - Ln\, x}{h} = \lim_{h\to 0} Ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = Ln \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{h}{x}\cdot\frac{1}{h}} = Ln\, e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

e) Derivada de la función seno $f(x) = \text{sen}\, x$

La derivada de la función seno es la función coseno

$$f(x) = sen\, x \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = cos\, x$$

En efecto:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}\, x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}\, x\cdot cos\, h + \text{sen}\, h\, cos\, x \text{ - } sen\, x}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{sen\, x(cos\, h \text{ - } 1) \text{ - } sen\, h\, cos\, x}{h} = \cos x$$, para lo cual hemos tenidos en cuenta que $\lim_{h\to 0}\frac{sen\, h}{h} = 1$ y que $\lim_{h\to 0}\frac{cos\, h \text{ - } 1}{h} = 0$

e) **Derivada de la función coseno** $f(x) = cos\, x$

La derivada de la función coseno es la función seno, con signo menos

$$f(x) = cos\, x \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \text{-}sen\, x$$

Como puede comprobar el lector realizando una demostración similar a la del punto anterior.

Ejemplo 9. Calcula de derivada de la función $f(x) = x^3 - cos\, x + Ln\, x$

Por tratarse de una suma de funciones, aplicamos la derivada de la función suma

$$f'(x) = [x^3]' - [cos\, x]' + [Ln\, x]'$$

Y derivando a ahora las funciones sumandos:

$$f'(x) = [x^3]' - [cos\, x]' + [Ln\, x]' = 3x^2 + cos\, x + \frac{1}{x}$$

Ejemplo 10. Calcula la derivada de la función $f(x) = x^2 sen\, x + \dfrac{x+1}{x}$

Se trata de una suma de funciones

$$f'(x) = \left[x^2 sen\, x\right]' + \left[\frac{x+1}{x}\right]' = \left[x^2\right]' sen\, x + x^2\left[sen\, x\right]' + \frac{\left[x+1\right]' x - (x+1)\left[x\right]'}{x^2} =$$

$$= 2x\, sen\, x + x^2 cos\, x + \frac{x - (x+1)}{x^2} = 2x\, sen\, x + x^2 cos\, x - \frac{1}{x^2}$$

Ejemplo 11. Calcula la derivada de la función $f(x) = Ln\dfrac{x+2}{x-2}$

Se trata de una función de función, luego:

$$f'(x) = \left[Ln'\frac{x+2}{x-2}\right]\cdot\left[\frac{x+2}{x-2}\right]' = \frac{1}{\dfrac{x+2}{x-2}}\cdot\frac{(x-2)-(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{-4(x-2)}{(x+2)(x-2)^2} = \frac{-4}{x^2-4}$$

Por ser de uso frecuente, a continuación damos algunas derivadas que resulta conveniente memorizar. Se pueden obtener como ejercicio aplicando las reglas anteriores.

f) Derivada de la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

g) Derivada de la función tangente $f(x) = tan\, x$

$$f(x) = tan\, x \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{cos^2 x}$$

9.11.3 Técnicas auxiliares de derivación

Las dos siguientes técnicas de derivación resultan útiles para encontrar algunas derivadas de funciones cuyo calculo sería mucho más laborioso empleando el procedimiento basado en la definición de derivada.

a) **Derivada de la función inversa**

La derivada de la función inversa de una función es igual a 1 dividido pr la derivada de la función directa.

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x) \quad \Leftrightarrow f^{-1'}(x) = \frac{1}{f'(y)}$$

En efecto, sabemos que

$$f\left[f^{-1}(x)\right]=x$$

Si derivamos ambos miembros:

$$f'\left[f^{-1}(x)\right]\cdot\left[f^{-1}(x)\right]'=1 \quad \text{de donde} \quad \left[f^{-1}(x)\right]'=\frac{1}{f'[y]}$$

b) Derivada logarítmica

Cuando nos aparece una función compuesta con una función en el exponente resulta útil aplicar siguiente técnica que llamamos derivada logarítmica:

$$f(x)=\left[g(x)\right]^{h(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)=f(x)\left[h(x)\cdot Ln\ g(x)\right]'$$

Resultado que obtenemos fácilmente sin más que tomar logaritmos en ambos miembros antes de derivar.

Como hemos dicho anteriormente, estas dos últimas técnicas nos permiten calcular fácilmente las derivadas de algunas funciones de uso práctico:

c) Derivada de la función exponencial $f(x)=e^x$

La derivada de la función exponencial es la misma función

$$f(x)=e^x \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)=e^x$$

En efecto

$$f(x)=e^x \Rightarrow Ln\ f(x)=x \Rightarrow \left[Ln\ f(x)\right]'=1 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=1 \Rightarrow f'(x)=f(x)=e^x$$

d) Derivada de la función arco seno $f(x)=ar\ sen\ x$

La derivada de la función arco seno es igual a 1 divido por la raíz cuadrada de 1 menos x al cuadrado

$$f(x)=ar\ sen\ x \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demostración

Sea $f(x)=y=ar\ sen\ x$, entonces $x=sen\ y$, es decir $x=g(y)=\operatorname{sen} y$ luego $g'(y)=cos\ y=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}=\sqrt{1-x^2}$

Y como *f(x)* y *g(y)* son inversas:

$$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e) Derivada de la función arco coseno $f(x)=ar\cos x$

La derivada de la función arco coseno es igual menos 1 divido por la raíz cuadrada de 1 menos x al cuadrado

$$f(x)=ar\cos x \;\Leftrightarrow\; f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La demostración la dejamos como ejercicio

f) Derivada de la función arco tangente $f(x)=ar\tan x$

La derivada de la función arco tangente es igual a 1 dividido por la suma de 1 más el cuadrado de x

$$f(x)=ar\tan x \;\Leftrightarrow\; f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Demostración:

Sea $f(x)=y=ar\tan x \;\Rightarrow x=\tan y=g(y)$

De donde $g'(y)=\dfrac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^2$, y como *f(x)* y *g(y)* son inversas

$$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}=\frac{1}{1+x^2}$$

Ejemplo 12. Calcula la derivada de la función $f(x)=ar\tan\dfrac{x+1}{x-1}$

Se trata de una función de función, luego

$$f'(x)=\left[ar\tan'\frac{x+1}{x-1}\right]\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}\cdot\frac{-2}{(x-1)^2}=\frac{-2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Ejemplo 13. Calcula la derivada de $y = sen^{Ln\ x}x$

Por tratarse de una función compuesta, en la que aparece una función como exponente, podemos aplicar la técnica de la derivada logarítmica:

$Ln\ y = Ln\ x \cdot sen\ x$, luego $\frac{1}{y}y' = \frac{sen\ x}{x} + Ln\ x \cdot cos\ x$, de donde

$$y' = y\left[\frac{sen\ x}{x} + Ln\ x\cdot cos\ x\right] = \left(sen^{Ln\ x}x\right)\left[\frac{sen\ x}{x} + Ln\ x\cdot cos\ x\right]$$

9.12. DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

En puntos anteriores hemos visto que:

$$\underset{h\to 0}{Lím}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

De esta forma, para valores pequeños de *h* , podemos escribir

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \approx f'(x_0) \qquad \text{o también}$$

$$f(x_0+h)-f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot h$$

El primer miembro de esta aproximación es la tasa de variación de la función en x_0 y *h* es la tasa variación (o incremento) de la variable independiente, luego *podemos obtener una buena aproximación a la tasa de variación de la función, multiplicando la derivada por la tasa de variación de la variable independiente.*

Al producto $f'(x)\cdot h$ *se le llama **diferencial** de la función y lo representamos por **dy***

$$dy = f'(x)\cdot h$$

Ahora bien, si hacemos $y = x \Rightarrow dy = dx = h$, luego podemos expresar la diferencial en la forma:

$$dy = f'(x)dx$$

que leeremos en la forma: *la diferencial de y es igual a la derivada por la diferencial de x*

Ejemplo 14. Expresa la diferencia de la función $f(x) = Ln(x^2+1)$

$$dy = \frac{2x}{x^2+1}dx$$

Ejemplo 15. Al calentar una moneda de 1 cm de radio, éste aumenta 0,3 mm . ¿Cuánto aumenta su área?

Si llamamos *x* al radio, el área vendrá dada por la función *y*= $f(x) = \pi\, x^2$, luego la variación aproximada del área será

$$dy = 2\pi\, x\, dx = 2\cdot\pi\cdot\cdot 10\cdot 0{,}3 \approx 18{,}8\ mm^2$$

a) Aplicación de la diferencial para el calculo de la derivada de funciones implícitas

De la definición de diferencias podemos expresar $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, lo que nos permite calcular derivadas diferenciando previamente la función. Veamos un par de ejemplos:

Ejemplo 16. Calcula la derivada de la función $x^2 + y^2 - xy = 2$

Diferenciemos previamente ambos miembros, teniendo en cuenta que para diferenciar debemos derivar y multiplicar por la diferencial de la variable que hemos derivado.

$$2xdx + 2ydy - (ydx + xdy) = 0$$

escribiendo en un miembro todos los términos que contienen *dy* y en otro los que contienen *dx*

$$2xdx - ydx = xdy - 2ydy$$

sacando factor común: $(2x - y)dx = (x - 2y)dy$

dividiendo por *dx* $2x - y = (x - 2y)\dfrac{dy}{dx}$

y despejando $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$, es decir $y' = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$

Ejemplo 17. Calcula la derivada de $x^2 y = sen\ x$

Siguiendo los pasos del ejemplo anterior:

$$2xydx + x^2dy = cox\ dx$$

$$x^2dy = (\cos x - 2xy)dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{cos\ x - 2xy}{x^2}$$