…………………..…………………………………………………………………………..

1º.-Calcular los valores de "a" y "b" para los cuales la recta tangente a la curva $y = x^2 + ax + b$ en el punto $(3,0)$ tanga de pendiente 2

Solución:

La pendiente de la tangente geométrica en el punto (3,0) es:

$$y' = 2x + a \Rightarrow 2(3) + a = 2 \Rightarrow a = -4$$

Además la curva pasa por el punto $(3,0)$, luego:

$$0 = 3^2 - 4(3) + b \Rightarrow b = 3$$

Luego la función $y = x^2 - 4x + 3$ cu8mple l a condición pedida.

2º.- Estudiar las zonas de crecimiento y decrecimiento, las distintas zonas de concavidad, los máximos y mínimos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x^4 - 12x^2 + 8$$

Solución:

$$f'(x) = 4x^3 - 24x \quad \text{que se anula para } \begin{cases} x = -\sqrt{6} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24$$

en el intervalo
$$\begin{array}{l} \left(-\infty, -\sqrt{6}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente} \\ \left(-\sqrt{6}, 0\right) \rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente} \\ \left(0, \sqrt{6}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente} \\ \left(\sqrt{6}, \infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente} \end{array}$$

luego en $x = -\sqrt{6}$ y en $x = \sqrt{6}$ la función tiene mínimos relativos y en $x = 0$ tiene un máximo relativo

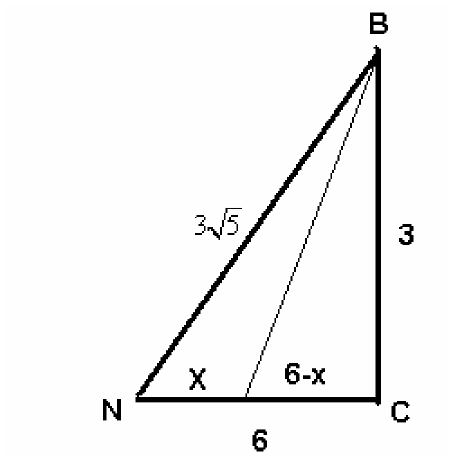
Por otra parte: $f''(x)$ se anula para $\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$

$$\text{En el intervalo } \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ tiene concavidad positiva} \\ \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ tiene concavidad negativa} \\ \left(\sqrt{2}, \infty\right) \rightarrow f''^{\cdot\cdot}(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ tiene concavidad positiva} \end{cases}$$

……………………..………………………………………………………………………………...

3º.-Desde un punto N de la orilla del mar, un nadador debe alcanzar una boya que flota a 3 kilómetros de la costa y dista $3\sqrt{5}$ kilómetros del punto N. Si recorriendo la orilla (que se supone recta y plana), su velocidad media es de 5 kilómetros por hora y nadando, de 3 kilómetros por hora, ¿cuánto tiempo deberá caminar hasta lanzarse al mar, para alcanzar la boya en el menor tiempo posible?

Solución:



La distancia a la que se encuentra el nadador de la perpendicular a la boya es:

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(3\sqrt{5}\right)^2 - 3^2} = 6$$

Si llamamos "x" a la distancia que debe andar por la orilla, el tiempo que deberá andar por la orilla, es:

$$\frac{x}{5}$$

y el tiempo que debe nadar es:

$$\frac{\sqrt{(6-x)^2 + 3^3}}{3} = \frac{\sqrt{x^2 - 12x + 45}}{3}$$

Luego el tiempo total es:

$$f(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 12x + 45}}{3} \quad \text{que derivamos:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{5} + \frac{2x - 12}{6\sqrt{x^2 - 12x + 45}} \quad \text{y se anula para:} \quad x = \frac{33}{4} \quad x = \frac{15}{4}$$

Resulta fácil ver que para $x = \frac{15}{4}$ la función nos da un mínimo; luego deberá recorrer 3,75 kilómetros por la orilla y desde allí lanzarse a nadar para alcanzar la boya con el mínimo tiempo