Nom i cognom………………………………………………………………………

1º.- Una empresa importa 21000 equipos mensuales de las marcas A,B y C al precio de 1,2; 1,5 y 2 miles de euros. Si el total de las importaciones ascienden a 33200 miles de euros, y de la marca A se importan el 40% de la suma de las otras dos marcas, ¿cuántos equipos de cada marca entran en la empresa?

Solución:

Sea: $\begin{cases} x = \text{nº de equipos de la marca A} \\ y = \quad " \quad\quad " \quad \text{B} \\ z = \quad " \quad\quad " \quad \text{C} \end{cases}$, entonces $\begin{cases} x + y + z = 21000 \\ 1{,}2x + 1{,}5y + 2z = 33200 \\ 0{,}40(y+z) = x \end{cases}$

Que nos como solución ; $x = 6000$, $y = 8000$, $z = 7000$

2º.- a) Emplea el método de Gauss para encontrar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Aprovecha el resultado anterior para resolver matricialmente el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Solución

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3º.- a) Para qué valor de "a" la siguiente matriz no tiene inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 0 & -2 \\ a & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Para $a = 8$, calcula por determinantes A^{-1}

Solución:

a) *A* no tiene inversa si su determinante es cero:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 0 & -2 \\ a & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2a + 14$ que se anula para $a = 7$, luego para ese valor de *a* la matriz no tiene inversa.

Nom i cognom……………………………………………………………………

b) Para $a = 8 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & -2 \\ 8 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

$$A^{-1} = \frac{\left[Adj\left(A\right)\right]^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -10 & 2 \\ 14 & -67 & 15 \\ -4 & 18 & -4 \end{pmatrix}^t}{-2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -14 & 4 \\ 10 & 67 & -18 \\ -2 & -15 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 2 \\ 5 & 67/2 & -9 \\ -1 & -15/2 & 2 \end{pmatrix}$$

4º.- a) Analizar y resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + 3y + z = 1 \\ x + 7y + 5z = -3 \end{cases}$$

b) Si $\left(x, y, 0\right)$ es una solución del sistema anterior, ¿cuáles son los valores de *x* y de *y*

Solución:

a)

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + 3y + z = 1 \\ x + 7y + 5z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{B}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Ran\left(A\right) = 2$; por otra parte:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \Rightarrow Ran\left(AB\right) = 2$$

Se trata de un sistema compatible indeterminado, con solución:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + 3y + z = 1 \\ x + 7y + 5z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 + z \\ x + 3y = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 2z \\ y = -1 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases}$$

b) Si $\left(x, y, 0\right)$ es una solución del sistema anterior $z = 0$, luego, los valores de x e y son:

$$\begin{cases} x = 4 + 2 \cdot 0 = 4 \\ y = -1 - 0 = -1 \end{cases}$$

Nom i cognom……………………………………………………………………

5º.- Analizar y resolver, por Cramer, el sistema:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ x-y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Solución:

Por se un sistema homogéneo es compatible:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Ran(A) = 2$; se trata de una sistema indeterminado

Con solución:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ x-y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -z \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -z$$