…………………………………………………………………………………………

1º En una fábrica de artículos deportivos se dispone de 10 cajas de diferente tamaño: grandes, medianas y pequeñas para envasar las camisetas de atletismo producidas, con capacidad para 50, 30 y 25 camisetas, respectivamente. Si una caja grande fuera mediana, entonces habría el mismo número de grandes y de medianas. En total se envasaron 390 camisetas. ¿Cuántas cajas hay de cada clase? [Castilla la Mancha 2008]

Solución:

Sea: $\begin{cases} x = \text{nº de cajas grandes} \\ y = \text{nº de cajas medianas} \\ z = \text{nº de cajas pequeñas} \end{cases}$, entonces $\begin{cases} x+y+z=10 \\ 50x+30y+25z=390 \\ x-1=y+1 \end{cases}$ que si resolvemos obtenemos $\begin{cases} x = 5 \text{ cajas grandes} \\ y = 3 \text{ cajas medianas} \\ z = 2 \text{ cajas pequeñas} \end{cases}$

2º.-Analizar y resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x-y+z=2 \\ x-2y+2z=1 \end{cases}$$

Solución:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$Ran(A)\rightarrow\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow Ran(A)\rightarrow\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow Ran(A)=2$$

$$Ran(AB)=\begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \end{cases}\Rightarrow Ran(AB)=2=Ran(A)$$

……………………………………………………………………………………………………
Luego el sistema es compatible e indeterminado:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \\ x - 2y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 + z \\ 3x - y = 2 - z \end{cases}$$

De donde $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1+z & 1 \\ 2-z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{3}{5}$ e $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1+z \\ 3 & 2-z \end{vmatrix}}{-5} = -\dfrac{1}{5} + z$

3º.-Un profesor ha dado a sus alumnos una lista de problemas para que resuelvan, como máximo , 70 problemas. Los problemas está, clasificados en dos grupos. Los del grupo del tipo A valen 5 puntos cada uno y los del tipo B , 7 puntos. Para resolver un problema del tipo A se necesitan 2 minutos y para resolver uno del tipo B , 3 minutos. Si los alumnos disponen de 150 minutos para resolver los problemas, ¿cuántos problemas de cada tipo habría que hacer para obtener la puntuación máxima¿?Cuál es dicha puntuación máxima? [La Rioja .Junio 2008]

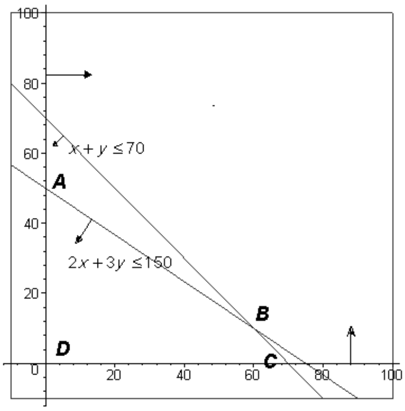
Solución:

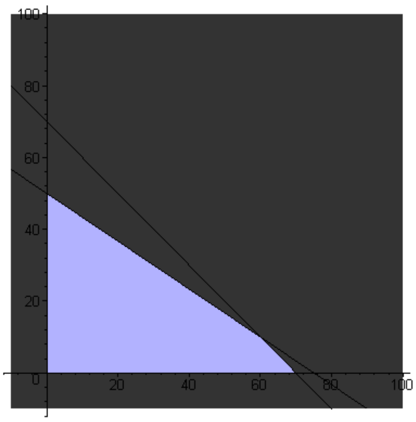
$$\text{Sean} \begin{cases} x = \text{ nº de problemas del tipo A} \\ y = \text{ nº de problemas del tipo B} \end{cases}$$

Entonces se trata de maximizar $f(x, y) = 5x + 7y$ sujeta a las restricciones.

$$x + y \le 70$$
$$2x + 3y \le 150$$
$$x \ge 0 \ , \ \ y \ge 0$$

Cuya solución factible es.





……………………………………………………………………………………………

$$A=\begin{cases}2x+3y=150\\ x=0\end{cases}\Rightarrow(0,50)\quad B=\begin{cases}2x+3y=150\\ x+7=70\end{cases}\Rightarrow(60,10)$$

$$C=\begin{cases}x+y=70\\ y=0\end{cases}\Rightarrow(70,0)\qquad C=\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\Rightarrow(0,0)$$

Y las puntuaciones obtenidas son:

$$f(A)=350\ ,\quad f(B)=370\ ,\quad f(C)=350\ ,\quad f(D)=0$$

Luego para obtener la puntuación máximo debe hacer 60 problemas del tipo A y 10 problemas del tipo B y con ello conseguirá 370 puntos

4º.- El coste de fabricación en euros de "*x*" unidades de un artículo viene dado por la función $f(x)=x-2\sqrt{x}+20$

a) Encuentra la función que determina el coste de fabricación de cada unidad de ese artículo [C.Valenciana .Junio 2008]

b) ¿Para qué producción resulta mínimo el coste de fabricación?

c) Calcula $\int_1^4\left(x-2\sqrt{x}+20\right)dx$

Solución:

a) Si la función de costo la dividimos por el número de unidades fabricadas obtenemos el costo de una unidad, luego la función de costo unitario es:

$$\text{costo de una unidad}=\frac{f(x)}{x}=1-2\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{20}{x}$$

b)

$f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ que se anula para $1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0\Rightarrow\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=0\Rightarrow\sqrt{x}=1\Rightarrow x=1$, como para $x<1, f'(x)<0$ y para $x>1, f'(x)>0$ en las cercanías de $x=1$, ese valor da un mínimo de la función de coste

c)

$$\int_1^4\left(x-2\sqrt{x}+20\right)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+20x\Big|_1^4=\frac{349}{6}$$

…………………………………………………………………………………………

5º.- a) Sabiendo que $p(A)=0,4$, $p(B)=0,6$ y $p(A\cup B)=0,7$, calcular $p(A/B)$

b) El 60 % de los alumnos de cierta asignatura aprueban en junio. El 80% de los presentados en septiembre también aprueba la asignatura, Sabiendo que los alumnos que se presentaron en septiembre son todos los que no aprobaron en junio, determinar.

1º) La probabilidad de que un alumno seleccionado al azar haya aprobado la asignatura

2º) Si sabemos que un estudiante ha aprobado la asignatura, la probabilidad de que haya sido en junio [C.Valenciana. Junio 2008]

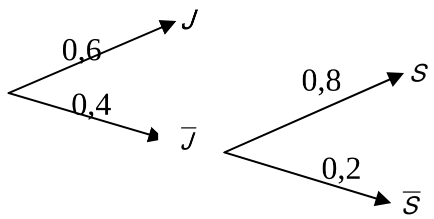
Solución:

a)

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{p(A)+p(B)-p(A\cup B)}{p(B)}=\frac{0,4+0,6-0,7}{0.6}=\frac{1}{2}=0,5$$

b)

Sea el suceso $\begin{cases} J\text{=aprobar en junio} \\ S\text{=Aprobar en septiembre} \end{cases}$, entonces:



1º) $p(\text{aprobar})=0,6+0,4\cdot 0,8=0,92$

2º) $p(J/A)=\dfrac{p(J)}{p(A)}=\dfrac{0.6}{0.92}\simeq 0,652$