………..………………………………………………………………………………

1º Una tienda de ropa deportiva tiene en su almacén 200 balones y 300 camisetas. Para su venta se hacen dos lotes (A y B). El lote A contiene 1 balón y 3 camisetas, y el lote B está formado por 2 balones y 3 camisetas. La ganancia obtenida con la venta de un lote del tipo A es de 12 € y 9 € con cada lote del tipo B. Sabiendo que el número máximo de lotes del tipo A es de 80, determinar:

a) El número de lotes de cada tipo que deben prepararse para obtener una ganancia máxima.

b) La ganancia máxima obtenida [*Selec. Extremadura*]

Solución:

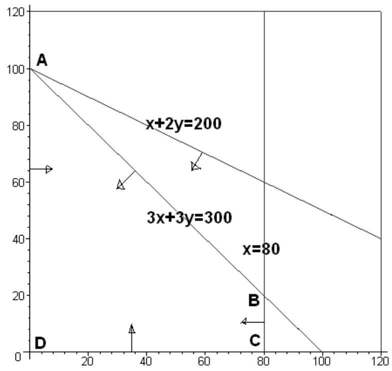
a) Sea

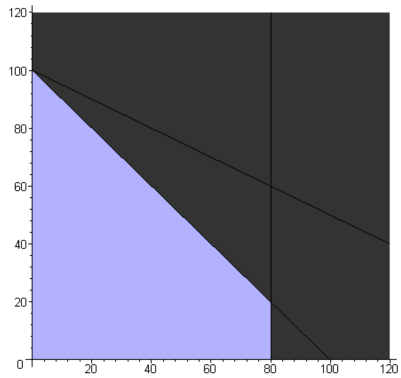
$$\begin{cases} x = \text{nº de lotes del tipo A} \\ y = \text{nº de lotes del tipo B} \end{cases}$$

Entonces se trata de maximizar $f(x,y) = 12x + 9y$

Sujeto a: $$\begin{cases} x + 2y \le 200 \\ 3x + 3y \le 300 \\ x \le 80 \\ x \ge 0 \ \ , \ \ y \ge 0 \end{cases}$$

Cuyo conjunto de soluciones factibles es:





Y las posibles soluciones:

$A = (0,100)$, $B = (80, 20)$ $C = 80, 0)$ y $D(0,0)$ y la función objeto en dichos punto toma los valores:

$f(A) = 900$, $f(B) = 1140$, $f(960)$ y $f(D) = 0$, luego la mejor opción es preparar 80 lotes del tipo A y 20 lotes del tipo B.

b) La ganancia obtenida es de 1124 €

……….……………………………………………………………………………

2º.-Se considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$; calcular:

a) La matriz BA
b) La matriz $(BA)^{-1}$
c) Resuelve, por Cramer, el sistema $BA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ -17 \end{pmatrix}$

Solución:

a)

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $$(BA)^{-1}=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{27} & \frac{-2}{27} \\ \frac{11}{81} & \frac{-5}{81} \end{pmatrix}=\frac{1}{81}\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 11 & -5 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{cases} -5x+6y=7 \\ -11x-3y=-17 \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ -17 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -11 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{81}{81}=1 \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -11 & -17 \end{vmatrix}}{81}=\frac{162}{35}=2$$

3º.- Estudiar y resolver el sistema homogéneo: $\begin{cases} x-4y+3z=0 \\ -2x-3y+z=0 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$

Solución:

Por tratarse de un sistema homogéneo es siempre compatible:

$$\begin{cases} x-4y+3z=0 \\ -2x-3y+z=0 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Rang(A)\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow Rang(A)=2$$

……….……………………………………………………………………………

Luego se trata de un sistema compatible e indeterminado:

$$\begin{cases} x-4y+3z=0 \\ -2x-3y+z=0 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4y+3z=0 \\ -2x-3y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4y=-3z \\ 2x+3y=z \end{cases}$$

Que podemos resolver por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -3z & -4 \\ z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{-5}{11}z \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3z \\ 2 & z \end{vmatrix}}{11}=\frac{7}{11}z$$

4º.-Encontrar las asíntotas de la función: $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x+2}$

Solución:

- Asíntotas horizontales no hay ya que $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{x+2}=\infty$
- Asíntotas verticales: Hay una en $x=-2$, pues:

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-1}{x+2}=\infty$$

- Asíntotas oblicuas: serán de la forma: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-1}{x+2}}{x}=\frac{2x^2-1}{x^2+2x}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{x+2}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x-1}{x+2}=-4$$

$y=2x-4$ es una asíntota oblicua

5º Estudiar la continuidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-4x+3} & \text{si } x<3 \\ 2x-1 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$

Solución:

- La función es continua dentro de cada rama, menos en el punto $x=1$ que anula el denominador de $\dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-4x+3}$ y además $\lim_{x\to 1}\dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-4x+3}=\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\infty \end{cases}$

………..……………………………………………………………………………

- En $x=3$,

$f(3)=5$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty 3^-} \dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-4x+3}=5 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} 2x-1=5 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x)=5$$

y como $f(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)=5$

La función es continua en $x=3$

6º.- Calcular la derivada de la siguiente función:

$$f(x)=\frac{\sqrt{\ln(x+1)}}{x+1}$$

Solución:

$$f'(x)=\left(\frac{\sqrt{\ln(x+1)}}{x+1}\right)'=\frac{\left(\sqrt{\ln(x+1)}\right)'(x+1)-\left(\sqrt{\ln(x+1)}\right)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x+1)}}-\sqrt{\ln(x+1)}}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{1-2\ln(x+1)}{2(x+1)^2\sqrt{\ln(x+1)}}$$