

1°.- Encontrar un número de tres cifras sabiendo que sus unidades valen la suma de sus decenas más centenas; que el doble de las centenas más dos es igual al doble de sus unidades menos 2 y que la suma de sus cifras es 6 veces la de sus decenas.

**Solución:**

$$\text{Sean } \begin{cases} x = \text{"cifra de las unidades"} \\ y = \text{"cifra de las decenas"} \\ z = \text{"cifra de las centenas"} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + z \\ 2z + 2 = 2x - 2 \\ x + y + z = 6y \end{cases} \text{ que resolviendo} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Luego el número buscado es el 426

2°.- a) Para qué valores de "a" no tiene inversa la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Para  $a = 2$ , calcula la matriz inversa de A

**Solución:**

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + a \text{ que se anula para } \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}; \text{ para dichos valores de "a" la}$$

matriz A no tiene inversa.

b) Para  $a = 2$  la matriz tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -2$$

$$[Adj(A)]^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ de donde } A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

.....  
3°.-Encontrar la matriz  $X$  que cumple

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - X$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - X \Rightarrow X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow X \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4°.-Analizar y resolver, por el método de Cramer, el sistema:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x - y + z = -1 \\ -x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 \text{ ; luego}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1 \text{ ; } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2 \text{ ; } z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{6}{-6} = -1$$

5°.- Analizar , según el parámetro “h”, el siguiente sistema y resolverlo en sus distintos casos.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + hz = 0 \\ x + 4y - 4z = 0 \end{cases}$$

**Solución:**

Por tratarse de un sistema homogéneo, es siempre compatible.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & h \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -3x + 3 ; \text{ que se anula para } x = 1 ; \text{ luego}$$

Si  $x \neq 1$  el sistema es determinado y su solución es:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Si  $x = 1$  el sistema toma la forma:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 4y - 4z = 0 \end{cases} \text{ y como el rango de la matriz de coeficientes es 2, el sistema es}$$

equivalente a  $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z \\ 2x - y = -z \end{cases}$  que podemos resolver por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-3} = 0 ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 2 & -z \end{vmatrix}}{-3} = z$$