1º.-En el primer curso de bachillerato de un instituto hay matriculados 65 alumnos divididos en tres grupos: A,B ,y C. Comen en el centro 42 de ellos, que corresponden a la mitad de los del grupo A, las cuatro quintas partes de los del B y las dos terceras partes de los del C. A una salida fuera del centro acudieron las tres cuartas partes de los alumnos del grupo A, todos los del B y las dos terceras partes de los del C, sumando en total 52 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo?

Solución:

Sea: $\begin{cases} x = \text{"Alumnos que hay en el grupo A"} \\ y = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{B"} \\ z = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{C"} \end{cases}$

Entonces:

$\begin{cases} x + y + z = 65 \\ \frac{x}{2} + \frac{4y}{5} + \frac{2z}{3} = 42 \\ \frac{3x}{4} + y + \frac{2z}{3} = 52 \end{cases}$ que resolviendo por cualquier procedimiento conocido nos da

$$\begin{cases} x = 24 \\ y = 20 \\ z = 21 \end{cases}$$

2º.-Encontrar la matriz A que verifica la ecuación:

$$A \cdot B + A = 2B' \quad \text{siendo} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B' <> B^t$$

Solución:

$$A \cdot B + A = 2B' \Rightarrow A(B + I) = 2B' \Rightarrow A = 2B'\left(B + I\right)^{-1}$$

luego:

$$A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}' \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3º.-Encontrar el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -8 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -8 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Rango} \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -8 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -30 \Rightarrow \text{ Rango es 3} \right.$$

4º.- a) Para qué valor de "*m*" la siguiente matriz no tiene inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & m & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calcula, por determinantes, A^{-1} cuando $m = 5$

Solución:

a)

A no tiene inversa si su determinante se anula;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & m & -1 \end{vmatrix} = m - 4$$ que se anula para $m = 4$, luego para ese valor de m la matriz A no tiene inversa.

b)

Si $m = 5$ la matriz toma la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -11 & -3 & 18 \\ 7 & 2 & -11 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[Adj(A)\right]^t = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 18 & -11 & -5 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 18 & -11 & -5 \end{pmatrix}$$

5º.- Estudiar el siguiente sistema y resolverlo por Cramer:

$$\begin{cases} 3x+y+2z=1 \\ x+y-z=2 \\ x-y+4z=-3 \end{cases}$$

Solución:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$Rang(A)\Rightarrow\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow Rang(A)=2$$

Estudio del rango de *AB:*

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}=0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}=0$$

luego $Rang(AB)=2$

Se trata de un sistema compatible e indeterminado, equivalente a:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y=1-2z \\ x+y=2+z \end{array}\right\}$$ que resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1-2z & 1 \\ 2+z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=-\frac{1+3z}{2} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-2z \\ 1 & 2+z \end{vmatrix}}{2}=\frac{5+5z}{2}$$