1º.-Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Justificar que la matriz *A* tiene inversa y obtener razonadamente A^{-1}

b) Calcular razonadamente le determinante de la matriz A^{-1}

c) Calcular los valores de x, y, z que verifican la ecuación $xI + yA + zA^2 = B$, siendo I la matriz unidad de orden 3 [Selectividad C.Valenciana 2008]

Solución:

a)

Como la matriz *A* es triangular su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, 9, distinto de cero, luego existe la A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\left(Adj\,[A]\right)^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ -12 & -6 & 9 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Como sabemos que $(A)\left(A^{-1}\right) = I \Rightarrow |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = 1 \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{9}$

lo que podemos comprobar realizando el calculo directamente

$$\left|A^{-1}\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \cdot 3 = \frac{1}{9}$$

c)

$$x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 9z = 18 \\ x + y + z = 6 \\ 6y + 36z = 48 \\ 2y + 8z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 & 18 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 36 & 48 \\ 0 & 2 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 0, \text{ mientas que } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 36 \end{vmatrix} \neq 0$$

Luego el sistema es compatible y determinado con solución:

$$\begin{cases} x + 3y + 9z = 18 \\ x + y + z = 6 \\ 6y + 36z = 48 \\ 2y + 8z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 9z = 18 \\ x + y + z = 6 \\ y + 6z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

……………………………………………………………………………………………………
2º.-Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (a+3)x-4y-2z=4 \\ x-2y-(a+2)z=2 \\ 2x+(a-3)y-2z=4 \end{cases}$$

a) justificar que para $a=0$ el sistema es incompatible

b) ¿Para qué valores del parámetro a es sistema es compatible y determinado

c) Resolver le sistema para el valor de a para el cual el sistema es compatible indeterminado [Selectividad C.Valenciana-2008]

Solución:

a)

Para $a=0$ el sistema toma la forma:

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=4 \\ x-2y-2z=2 \\ 2x-3y-2z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Luego el sistema es incompatible

b)

$$\begin{vmatrix} a+3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -a-2 \\ 2 & a-3 & -2 \end{vmatrix} = a^3+2a^2+a$$ **,** que se anula para $\begin{cases} a=0 \\ a=-1 \end{cases}$

Para $a=0$ ya hemos visto que el sistema es incompatible

Para $a=-1$ el sistema toma la forma**:**

$$\left.\begin{matrix} 2x-4y-2z=4 \\ x-2y-z=2 \\ 2x-4y-2z=4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x-2y-z=2$$ **,** luego el sistema es compatible e indeterminado

c) Con solución:

$$x=2+2y+z \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2p+q \\ y=p \\ z=q \end{cases}$$

……………………………………………………………………………………………

3º.- a) Sin desarrollar el determinante, demostrar que el siguiente determinante es múltiplo de a^2-5a+6

$$\begin{vmatrix} a^2-3a+2 & a^2-4 \\ a^2-9 & a^2-2a-3 \end{vmatrix}$$

b) Justificar que si $a=2$, es incompatible el sistema:

$$\begin{cases} \left(a^2-3a+2\right)x+\left(a^2-4\right)y=7 \\ \left(a^2-9\right)x+\left(a^2-2a-3\right)y=5 \end{cases}$$

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} a^2-3a+2 & a^2-4 \\ a^2-9 & a^2-2a-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (a-2)(a-1) & (a-2)(a+2) \\ (a-3)(a+3) & (a-3)(a+1) \end{vmatrix}=(a-2)(a-3)\begin{vmatrix} a-1 & a+2 \\ a+3 & a+1 \end{vmatrix}=$$

$$=a^2-5a+6\begin{vmatrix} a-1 & a+2 \\ a+3 & a+1 \end{vmatrix}$$

b)

A la vista del resultado anterior, para $a=2$ el determinante de coeficientes se anula, mientras la matriz ampliada tiene rango 2, luego el sistema es incompatible

4º.-Dados los vectores $\vec{a}=i-2j-2k$ y $\vec{b}=4i+j+k$

a) Comprobar que pueden ser los catetos de un triángulo rectángulo y calcular cuánto mide la hipotenusa de ese triángulo.

b) Calcular qué ángulo forma el cateto que contiene al vector $\vec{b}$ con la hipotenusa.

c) Calcular el área del triángulo y la altura sobre la hipotenusa

d) Justificar que los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}\times\vec{b}$, determinan un prisma rectangular recto ; calcular su volumen y la altura sobre la base que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Solución:

a) Para que los dos vectores puedan ser catetos de un triángulo rectángulo deben ser perpendiculares:

$$[1,-2,-2]\cdot[4,1,1]=0\Rightarrow \vec{a} \text{ y } \vec{b} \text{ son perpendiculares}$$

En este caso la hipotenusa medirá el módulo del vector $\vec{a}+\vec{b}$, es decir:

$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{5^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{27} \text{ uni. de long.}$$

……………………………………………………………………………………………

b)

$$\cos\ \alpha = \frac{[4,1,1][5,-1,-1]}{|[4,1,1]|\cdot|[5,-1,-1]|} = \frac{18}{\sqrt{18}\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \alpha = ar\cos\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \alpha \simeq \begin{cases} 0{,}62\ \text{r} \\ 35º15'51'' \end{cases}$$

c)

El área del triángulo es la mitas del área del paralelogramo , luego:

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|[0,-9,9]| = \frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ unid. De área}$$

Teniendo en cuenta que se trata de un triángulo rectángulo, el área también es igual a la mitad del producto de los dos catetos, luego:

$$S = \frac{1}{2}|[1,-2,-2]|\cdot|[4,1,1]| = \frac{1}{2}3\cdot\sqrt{18} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ uni. de área}$$

La altura sobre la hipotenusa la podemos obtener a partir de la fórmula del área del triángulo:

$$Altura = \frac{\frac{9}{2}\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \text{ unidades de long.}$$

d) Por ser el vector $\vec{a}\times\vec{b}$ perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y al ser estos perpendiculares entre sí, los tres vectores pueden ser las aristas de un prisma rectangular recto, de donde:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & 9 \end{vmatrix} = 162 \text{ unidades de volumen}$$

Y la altura pedida será el módulo del vector $\vec{a}\times\vec{b}$, es decir $9\sqrt{2}$ uni. de long.