1º.-Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, calcular:

a) el vector X_{3x1} que cumple $AX=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$

b) Todos los vectores X_{3x1} que cumplen $AX=3X$

Solución:

a)

$$AX=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\Rightarrow X=A^{-1}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3 & 6 & -6\\ -1 & -5 & 8\\ -4 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-9\\ 15\\ 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 5/3\\ 5/3\end{pmatrix}$$

b)

$$AX=3X\Rightarrow AX-3X=0\Rightarrow (A-3I)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Se trata de un sistema homogéneo en l que $Ran\,(\text{matriz de coeficientes})=2$, pues:

$$\begin{vmatrix}-2 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}=0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}\neq 0$$

Luego: $\left.\begin{matrix}-2x+2y=2z\\ 3x-2y=-2z\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=t\\ z=t\end{cases}\Rightarrow$ que todos los vectores con la primera coordenada =0 y las segunda y tercera iguales cumplen la condición

……………………………………………………………………………………………

2ºPara qué valor de "a" el siguiente sistema tiene infinitas soluciones. Resolverlo para dicho valor de "a":

$$\begin{cases} ax+y-z=5 \\ x+ay+z=4 \\ x+y+(a-2)z=3 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} ax+y-z=5 \\ x+ay+z=4 \\ x+y+(a-2)z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a-2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a-2 \end{vmatrix} = a^3-2a^2-a+2 \text{ que se anula para } \begin{cases} a=-1 \\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

Para $a=-1$ el sistema toma la forma:

$$\begin{cases} -x+y-z=5 \\ x-y+z=4 \\ x+y-3z=3 \end{cases}$$ obviamente incompatible ya que la primera ecuación y la segunda se contradicen.

Para $a=1$ el sistema toma la forma:

$$\begin{cases} x+y-z=5 \\ x+y+z=4 \\ x+y-z=3 \end{cases}$$ obviamente incompatible ya que la primera ecuación y la tercera se contradicen.

Para $a=2$ el sistema toma la forma:

$$\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ x+2y+z=4 \\ x+y \qquad =3 \end{cases} \Rightarrow Ran\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = Ran\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$, luego para ese valor de a el sistema es compatible e indeterminado, con solución:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=5+z \\ x+2y=4-z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=2+z \\ y=1-z \end{cases}$$

…………………………………………………………………………………………

3º.-Dados los dos planos **π1**: $x + y + z = 3$ y **π2**: $x + y - a\, z = 0$, se pide calcular razonadamente:

a) El valor de “a” para que los planos **π1** y **π2** sean perpendiculares y, para este valor de “a” obtener las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de esos dos planos.

b) El valor de “a” para que los planos **π1** y **π2** sean paralelos y, para este valor de “a” obtener la distancia entre los dos planos **π1** y **π2**. [Selectivo 2008-Valencia]

Solución:

a) Los planos son perpendiculares si lo son sus vectores normales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} = 2 - a \Rightarrow a = 2 \text{ los planos son perpendiculares}$$

Para ese valor de “a” los planos se cortan en la recta:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

b) Los planos son paralelos si lo son sus vectores normales:

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{-a} \Rightarrow a = -1$$

Y la distnacia entre los dos planos la obtenemos buscando la distancia de un punto del plano $\pi 2: x + y + z = 0$, por ejemplo $(0,0,0)$, al plano $\pi 1: x + y + z = 3$

$$d = \frac{0 + 0 + 0 + 3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ unidades de long.}$$

4º.- Dados el punto $O = (0, 0, 0)$ y el plano $\pi : x + y + z = 6$, se pide calcular razonadamente:

a) La ecuación de la recta ***r*** que pasa por O y es perpendicular al plano π**.**

b) Las coordenadas del punto simétrico de O respecto del plano π**.**

[Selectivo 2008-Valencia]

Solución:

a)

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow x = y = z$$

…………………………………………………………………………………………

b) La recta *r* corta al plano π en el punto

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \\ x+y+z=6 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \text{en el punto } (2,2,2)$$

Luego el punto simétrico de *O* respecto al plano estará en un vector de origen *O* y punto medio el punto $(2,2,2)$, luegoel punto buscado es:

$$\left(\frac{0+x}{2}=2, \frac{0+y}{2}=2, \frac{0+z}{2}=2\right)=(4,4,4)$$

También lo podriamos haber encontrado teniendo en cuenta que el punto buscado es el extremo de vector de origen $(0,0,0)$, modulo $4\sqrt{3}$ (doble de la distancia del origen al plano) y en la dirección de la recta $x=y=z$, luego:

$$\left|(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2\right| = 4\sqrt{3} \quad \text{y} \quad x=y=z \Rightarrow 3x^2 = (4\sqrt{3})^2$$

5º,.Calcular y simplificar, si es posible, y' en cada una de las siguientes funciones:

a) $y = Ln\sqrt{1+x^2}$

b) $(x+y)^2 - \dfrac{x}{y} = 5$

Solución:

a) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{1+x^2}$

b)

$$(x+y)^2 - \frac{x}{y} = 5 \Rightarrow y(x+y)^2 - x = 5y \Rightarrow yx^2 + 2xy^2 + y^3 - x = 5y$$

De donde

$$\begin{aligned} &\left(yx^2+2xy^2+y^3-x\right)' = (5y)' \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2y' + 2xy + 2y^2 + 2xyy' + 3y^2y' - 1 = 5y' \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2y' + 2xyy' + 3y^2y' - 5y' = 1 - 2xy - y^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y' = \frac{1-2xy-y^2}{x^2+2xy+3y^2-5} \end{aligned}$$

…………………………………………………………………………………………

6º.- Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = |x^2 - 9| - |x - 2|$$

Solución:

La función explicitada toma la forma:

$$f(x) = \left\{ \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 + 9 & \text{si } -3 \le x < 3 \\ x^2 - 9 & \text{si } x \ge 3 \end{cases} \right\} - \left\{ \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases} \right\} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 11 & x < -3 \\ -x^2 + x + 7 & -3 \le x < 2 \\ -x^2 - x + 11 & 2 \le x < 3 \\ x^2 - x - 7 & x \ge 3 \end{cases}$$

La función es continua en cada rama y en los saltos de rama, como es fácil ver:

La función es derivable dentro de las ramas:

$$f'_{\text{dentro de las ramas}}(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < -3 \\ -2x + 1 & -3 < x < 2 \\ -2x - 1 & 2 < x < 3 \\ 2x - 1 & x > 3 \end{cases}$$

En los saltos de ramala función no es derivable pues no coinciden las derivadas laterales, como fácilmente se puede ver, luego la derivada de la función es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < -3 \\ -2x + 1 & -3 < x < 2 \\ -2x - 1 & 2 < x < 3 \\ 2x - 1 & x > 3 \end{cases}$$